

## ALTÉRATIONS DE VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

[d'après A. J. DE JONG]

par Pierre BERTHELOT

### 1. INTRODUCTION

Deux problèmes de désingularisation jouent un rôle fondamental en Géométrie Algébrique : le problème de la *résolution des singularités* d'une variété singulière, et celui de la *réduction semi-stable* pour une variété propre et lisse sur un corps muni d'une valuation discrète. Les résultats obtenus sur ces questions, souvent limités à la caractéristique nulle, sont des outils extrêmement puissants, notamment dans l'étude de la cohomologie des variétés algébriques. Par contre, leur démonstration passe généralement pour très délicate. Des travaux récents de A. J. de Jong [31] montrent qu'une version un peu affaiblie de ces problèmes amène à une solution remarquablement simple et élégante, sans limitation de caractéristique, et qui fournit néanmoins des résultats suffisants pour beaucoup d'applications.

#### 1.1. Résolution des singularités

Sous la forme générale que lui donne Grothendieck dans [EGA IV, 7.9], le problème de la résolution des singularités s'énonce de la manière suivante :

**Problème 1.1.1.** — *Si  $X$  est un schéma localement noethérien et réduit, existe-t-il un schéma régulier  $X'$ , et un morphisme propre et birationnel  $f : X' \rightarrow X$  ?*

Un tel morphisme est appelé *désingularisation* de  $X$ . Cette question est dominée par le théorème fondamental d'Hironaka [28] :

**Théorème 1.1.2.** — *Soient  $k$  un corps de caractéristique 0,  $X$  une variété algébrique sur  $k$ . Il existe une désingularisation  $f : X' \rightarrow X$  où  $f$  est un morphisme projectif, induisant un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $U$  des points réguliers de  $X$ , et tel que  $f^{-1}(X \setminus U)$  soit un diviseur à croisements normaux de  $X'$ .*

On notera que le résultat d'Hironaka est plus précis que 1.1.1 : la désingularisation qu'il construit ne modifie pas le lieu régulier de  $X$ , et le lieu singulier est transformé en un diviseur à croisements normaux. Toujours en caractéristique nulle, des travaux ultérieurs ont amélioré ces résultats, en fournissant notamment une méthode constructive de résolution (voir en particulier Villamayor [59], et Bierstone-Milman [7]). D'autre part, les travaux récents de Spivakovsky [58] laissent maintenant espérer qu'on puisse obtenir pour tout schéma excellent une résolution canonique des singularités (c'est à dire satisfaisant une forme faible de fonctorialité, cf. [58, déf. 1.6]), sans hypothèse de caractéristique.

## 1.2. Altérations et modifications

**1.2.1.** L'idée de de Jong consiste à affaiblir la notion de désingularisation, en autorisant le corps des fonctions rationnelles sur  $X'$  à être une extension finie du corps des fonctions rationnelles sur  $X$ , alors qu'il est invariant par désingularisation. Plus précisément, soit  $X$  un schéma noethérien intègre. Une *altération* de  $X$  est un schéma intègre  $X'$  muni d'un morphisme  $\varphi : X' \rightarrow X$  propre et surjectif, tel qu'il existe un ouvert non vide  $U \subset X$  au-dessus duquel le morphisme  $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$  est fini. Une altération est dite *génériquement étale* (resp. une *modification*) si l'on peut choisir  $U$  tel que le morphisme  $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$  soit étale (resp. un isomorphisme).

Soit  $k$  un corps quelconque. Une *variété algébrique* sur  $k$  sera un  $k$ -schéma de type fini, séparé et intègre. De Jong montre le théorème suivant [31, th. 3.1] :

**Théorème 1.2.2.** — Soient  $X$  une variété algébrique sur  $k$ , et  $Z \subset X$  un fermé de  $X$ , distinct de  $X$ . Il existe alors une altération  $\varphi : X' \rightarrow X$  et une immersion ouverte  $j : X' \hookrightarrow \bar{X}'$  telles que :

- (i)  $\bar{X}'$  est une variété projective régulière (donc lisse sur  $k$  si  $k$  est parfait);
- (ii) Le fermé  $\varphi^{-1}(Z) \cup (\bar{X}' \setminus X') \subset \bar{X}'$  est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts de  $\bar{X}'$  (cf. 2.2.1).

Si  $k$  est parfait, on peut de plus choisir  $\varphi$  *génériquement étale*.

On notera que, contrairement à ce que donne la méthode d'Hironaka, l'ouvert de  $X$  au-dessus duquel  $\varphi$  est fini est en général plus petit que l'ouvert  $\text{Reg}(X)$  des points réguliers : on peut être amené au cours de la construction à faire des éclatements centrés en des sous-variétés rencontrant  $\text{Reg}(X)$ . La construction n'est pas canonique, mais, si l'on se donne une action d'un groupe fini sur  $X$ , de Jong en donne aussi une version équivariante [31, th. 7.3]. Grâce à celle-ci, il est possible de construire (après extension radicielle du corps de base) une modification d'une variété donnée  $X$ , qui n'ait que des singularités quotients [31, cor. 7.4]. Signalons aussi qu'en caractéristique 0, Abramovich et de Jong [1]

ont pu pousser ces résultats plus loin, et obtenir une version faible du théorème d'Hironaka (là encore, des éclatements rencontrant le lieu lisse peuvent intervenir). Ce dernier résultat a été obtenu indépendamment par Bogomolov et Pantev [8], par des techniques d'esprit assez proche.

La méthode de de Jong est complètement différente de celles qui sont utilisées dans les travaux mentionnés en 1.1. Dans ceux-ci, le principe général mis en œuvre consiste à associer certains invariants aux singularités de  $X$ , en fonction desquels on pourra choisir un sous-schéma de  $X$  que l'on va éclater, et dont le comportement contrôle la suite d'éclatements nécessaires pour désingulariser  $X$ . Ici, la nature des singularités de  $X$  ne joue aucun rôle. En un sens, la méthode suivie rappelle la technique des *bons voisinages* utilisée par M. Artin dans la démonstration du théorème de comparaison en cohomologie étale [SGA 4, exp. XI, § 3] : il s'agit de décrire une variété  $X$  par une suite de fibrations en courbes sur des variétés de dimension inférieure. Mais, à la différence de la méthode d'Artin, dans laquelle on localise au voisinage d'un point de manière à pouvoir trouver une fibration de ce voisinage en courbes lisses, avec une compactification relative lisse par un lieu à l'infini étale sur la base, la construction de de Jong est de nature globale, et autorise donc certaines singularités. Elle procède par récurrence sur la dimension de  $X$ . Dans une première étape, on altère  $X$  par des techniques de géométrie projective de manière à pouvoir construire un morphisme projectif  $X \rightarrow Y$ , ayant pour fibres des courbes géométriquement connexes, et dont l'ouvert de lissité est dense dans chaque fibre. On fait ensuite appel à la théorie des espaces de modules pour les courbes stables pour montrer qu'on peut altérer ce morphisme de manière à ce que  $X$  devienne une courbe nodale de base une variété lisse  $Y$ , qui soit lisse en dehors d'un diviseur à croisements normaux strict de  $Y$ . Les singularités de  $X$  peuvent alors être décrites de manière simple à partir de la théorie des déformations des singularités quadratiques ordinaires [SGA 7, VI 6], et on peut les résoudre explicitement.

STOP

### 1.3. Réduction semi-stable

Soient  $S$  un schéma noethérien connexe, régulier de dimension 1,  $K$  son corps de fonctions rationnelles. Une  $S$ -variété est un  $S$ -schéma intègre, séparé, plat et de type fini sur  $S$ . Un  $S$ -schéma  $X$  est dit *semi-stable* si  $X$  est lisse sur  $S$ , sauf au-dessus d'un nombre fini de points  $s \in S$ , au voisinage desquels  $X$  est localement pour la topologie étale isomorphe à un schéma de la forme  $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - \pi))$ , où  $\pi$  est une uniformisante en  $s$  (voir aussi 5.2).

Si  $K'$  est une extension finie de  $K$ , nous noterons  $S'$  la normalisation de  $S$  dans  $K'$ , et  $X_{K'} = K' \otimes_K X$ . Le problème de la réduction semi-stable sur  $K$  est le suivant :

## GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE

par Ivan KUPKA

### INTRODUCTION

START HERE

Les structures sous-riemanniennes (ou de Carnot-Caratheodory), notées SR dans la suite, ont été étudiées ou utilisées dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne, dans la théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude des équations différentielles stochastiques et de la diffusion, en mécanique des contraintes non-holonomes. Mais leur étude est aussi intéressante en elle-même.

La géométrie SR a déjà fait l'objet de divers travaux, mais la contribution la plus importante, de loin, à ce sujet est le long mémoire [Gr1] de Gromov, très riche en résultats et aperçus très intéressants et stimulants. Mais il est juste de dire que l'étude des structures SR est loin d'être achevée.

Bien que la géométrie riemannienne serve souvent de guide dans cette étude, ses résultats restent rarement vrais en géométrie SR et ses concepts pas toujours bien appropriés. Il y a deux différences radicales entre les deux géométries : ce sont le caractère anisotrope de la géométrie SR et sa nature non commutative, cette deuxième étant en partie conséquence de la première.

Pour conclure, je voudrais remercier ici A. Bellaïche et J.-J. Risler pour plusieurs discussions sur la géométrie SR, et plus particulièrement M. Gromov pour un entretien très intéressant et très illuminant.

### 0. PRÉLIMINAIRES

Dans cet exposé, on se placera dans la catégorie infiniment différentiable (ou  $C^\infty$ ) par souci de simplicité. En fait, la plupart des définitions ont un sens et la plupart des résultats sont valables dans les catégories analytiques réelles ou même analytiques

complexes, car on peut définir des structures "sous-hermitiques". Nous laisserons au lecteur intéressé le soin de faire les modifications nécessaires, en général assez simples. Ceci ne nous empêchera pas, dans la suite de l'exposé, de faire des remarques relatives à la catégorie analytique réelle si elles présentent de l'intérêt.

Dans la suite, il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

$M$  : variété  $C^\infty$  connexe, sauf mention du contraire.

$C_M$  : faisceau des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $C_{M,m}$  : fibre de  $C_M$  en  $m \in M$ .

$TM$  : son espace tangent,  $T_m M$  : sa fibre en  $m$ .

$T^*M$  : espace cotangent de  $M$ ,  $T_m^* M$  : sa fibre en  $m \in M$ .

$\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ ,  $\pi_{T^*M} : T^*M \rightarrow M$  les projections canoniques.

Si  $E$  désigne un fibré  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $\underline{E}$  désignera le faisceau des germes de sections  $C^\infty$  de  $E$ .

Si  $\mathcal{F}$  désigne  $\underline{E}$  ou un sous-faisceau de  $\underline{E}$ ,  $\mathcal{F}_m$  sera la fibre de  $\mathcal{F}$  en  $m \in M$  et  $\mathcal{F}[m] = \{e \in E \mid \text{il existe } \sigma \in \mathcal{F}_m \text{ telle que } \sigma(m) = e\}$ .

Un sous-fibré  $C^\infty$   $\mathcal{D}$  de  $TM$  sera appelé distribution et un sous-fibré  $C^\infty$   $\Delta$  de  $T^*M$ , codistribution. Si  $\mathcal{D}$  est une distribution sur  $M$ , désignons par  $\text{Lie}(\mathcal{D})$  le sous-faisceau d'algèbres de Lie de  $\underline{TM}$ , engendré par  $\underline{\mathcal{D}}$ .

Dans une algèbre de Lie, un élément sera appelé commutateur de degré  $n$  d'éléments d'un sous-ensemble de l'algèbre si c'est un monôme de Lie de degré  $n$  d'éléments de ce sous-ensemble et si  $n$  est minimal pour cette propriété.

On imposera à toutes les distributions considérées ici, sauf mention du contraire, la :

**Condition du rang :**  $\mathcal{D}$  satisfait la condition du rang si, pour tout  $m \in M$ ,  $\text{Lie}(\mathcal{D})[m] = T_m M$ .

Ces distributions sont l'extrême opposé des distributions intégrables.

*Remarque 0.*— Plus généralement, si  $\mathcal{F}$  est un sous-faisceau de  $C_M$ -modules de  $\underline{TM}$ , on dira que  $\mathcal{F}$  satisfait à la condition du rang si, en désignant par  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  le sous-faisceau d'algèbres de Lie de  $\underline{TM}$  engendré par  $\mathcal{F}$ , on a en tout  $m \in M$  :

$$\text{Lie}(\mathcal{F})[m] = T_m M.$$

**Métrique riemannienne  $g$  sur une distribution  $\mathcal{D}$  :**  $g$  est une fonction  $C^\infty : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction à toute fibre  $\mathcal{D}[m]$  est une forme quadratique positive définie.

## 1. LES STRUCTURES SR

**DÉFINITION 0.**— Une structure SR sur une variété  $M$  est un couple  $(\mathcal{D}, g)$  d'une distribution  $\mathcal{D}$  satisfaisant la condition du rang et d'une métrique riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Remarque 1.**— Les données  $(\mathcal{D}, g)$  permettent de définir une cométrique  $g^*$  sur  $T^*M$ , c'est-à-dire une fonction  $C^\infty$   $g^* : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction à chaque fibre  $T_m^*M$  est une forme quadratique positive semi-définie : pour  $z \in T_m^*M$ ,  $g^*(z) = \max \left\{ \frac{\langle v, z \rangle^2}{g(v)} \mid v \in \mathcal{D}[m] - \{0\} \right\}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est l'accouplement canonique  $TM \times_M T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ . La donnée de  $g^*$  permet de déterminer à la fois  $\mathcal{D}$  et  $g$  :  $\mathcal{D}$  est l'annulateur du noyau de  $g^*$  et, pour  $v \in \mathcal{D}[m]$ ,  $g(v) = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \langle v, z \rangle^2 \leq \lambda g^*(z) \text{ pour tout } z \in T_m^*M \}$ .

**Remarque 2.**— La remarque précédente permet de généraliser la notion de structure SR : on se donne  $g^* : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  qui, sur chaque fibre de  $T^*M$ , est une forme quadratique positive semi-définie. En lui imposant la condition suivante : si  $\underline{\mathcal{D}}$  est le faisceau engendré par les champs de vecteurs  $V$  tels que, pour tout  $m$  du domaine de  $V$ , tout  $z \in T_m^*M$  tel que  $g^*(z) = 0$ , on a  $\langle V[m], z \rangle = 0$ , alors  $\underline{\mathcal{D}}$  satisfait la condition du rang.

Alors  $g^*$  définit une structure  $(\mathcal{D}, g)$  sur  $M$ .  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble de  $TM$ , mais n'est plus un sous-fibré, en général. Il est défini comme suit :  $\mathcal{D} = \cup_{m \in M} \mathcal{D}[m]$ ,  $\mathcal{D}[m] \subset T_m M$ ,  $\mathcal{D}[m] = \{ v \mid \langle v, z \rangle = 0 \text{ pour tout } z \in T_m^*M, \text{ tel que } g^*(z) = 0 \}$  et  $g$  est la fonction  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(v) = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \langle v, z \rangle^2 \leq \lambda g^*(z) \text{ pour tout } z \in T_m^*M \}$ , si  $v \in \mathcal{D}[m]$ . Certains des résultats exposés dans la suite sont valables pour ces structures, en particulier le lemme 0 (Lemme de Chow) et le théorème 0. **STOP**

La donnée de la métrique  $g$  ne nous permet pas, contrairement au cas riemannien, de définir la longueur d'une courbe quelconque (même  $C^\infty$ ). Pour cela, on introduit les :

**Courbes horizontales** : une courbe horizontale est une courbe absolument continue  $\varphi : I \rightarrow M$ ,  $I$  intervalle (non réduit à un point !) telle que, pour presque tout  $t \in I$ , le vecteur tangent  $\frac{T\varphi}{dt}(t)$  appartient à  $\mathcal{D}[\varphi(t)]$ .

**Longueur d'une courbe horizontale**  $\varphi : I \rightarrow M$  :  $\mathcal{L}(\varphi)$  désignera la valeur finie ou  $+\infty$  de l'intégrale :

$$\int_I \sqrt{g\left(\frac{T\varphi}{dt}(t)\right)} dt$$

FALL 2001

APPLIED

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 487-492, 2001  
Analyse numérique/*Numerical Analysis*

START HERE

## Étude de sensibilité d'un système mécanique en interaction fluide-structure

Miguel-Ángel FERNÁNDEZ<sup>a</sup>, Marwan MOUBACHIR<sup>b</sup>

### 1. Introduction

Notre travail constitue une étude préliminaire du contrôle et de la conception automatique de systèmes faisant intervenir un couplage fluide-structure. Plus précisément, nous établissons la structure des dérivées, par rapport aux données frontières, d'un système couplé comportant un fluide, modélisé par les équations de Navier-Stokes, et une structure élastique en grands déplacements.

Dans la première partie, nous introduisons le problème mécanique traité et sa formulation mathématique. Nous utilisons notamment un formalisme arbitrairement lagrangien-eulérien (ALE) pour le fluide, particulièrement adapté au traitement des problèmes à frontière mobile. Nous présentons, dans une deuxième partie, le résultat principal de cette Note concernant le calcul des dérivées de l'état du système couplé vis-à-vis de conditions de Dirichlet à la frontière du domaine fluide.

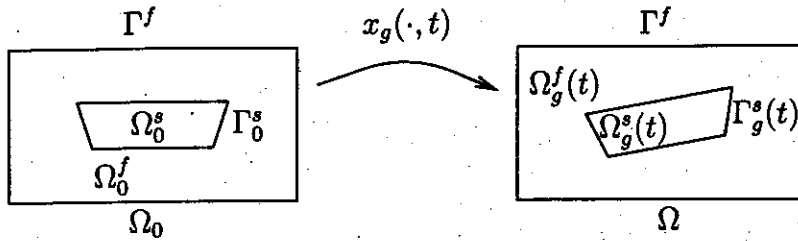


Figure 1. - Géométrie du problème.

## 2. Le problème mécanique

Nous considérons un solide occupant à l'instant  $t \geq 0$  un domaine  $\Omega^s(t) \subset \mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma^s(t)$ . Ce solide baigne dans un fluide s'étendant dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous introduisons un volume de contrôle  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  contenant le solide pour tout instant  $t \in (0, T)$ . La frontière de  $\Omega$  est notée  $\partial\Omega$ . Ainsi l'analyse de l'évolution du fluide se restreindra au volume  $\Omega^f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega - \overline{\Omega^s(t)}$ . On notera dans la suite  $\Gamma^f \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega$  et la frontière du domaine fluide est donnée par

$$\partial\Omega^f(t) = \Gamma^f \cup \Gamma^s(t).$$

Le fluide est supposé newtonien, homogène, en écoulement incompressible, son état est décrit par sa vitesse et sa pression. Le solide est supposé élastique en grands déplacements, son état est décrit par sa vitesse et son tenseur de contraintes. L'évolution de ces inconnues est régie par les lois de conservation de la mécanique des milieux continus.

En formulation eulérienne, l'état du fluide satisfait les équations de Navier-Stokes incompressibles dans  $\Omega^f(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}[u \otimes u - \sigma(u, p)] &= 0 \quad \text{dans } \Omega^f(t), \\ \text{div } u &= 0 \quad \text{dans } \Omega^f(t), \end{aligned} \quad (1)$$

où le couple  $(u, p)$  représente respectivement la vitesse et la pression du fluide. De plus, le tenseur de contraintes est donné par :

$$\sigma(u, p) = -pI + \nu(\nabla u + \nabla u^T).$$

*Remarque 1.* - Dans la suite la notation  $\partial/\partial t|_a$  représente l'opérateur de dérivation temporelle lorsque la variable  $a$  est fixée.

Étant donné une configuration matérielle solide de référence  $\Omega_0^s \subset \Omega$  de frontière  $\Gamma_0^s$ , nous choisissons la configuration de référence fluide  $\Omega_0^f \stackrel{\text{def}}{=} \Omega - \overline{\Omega_0^s}$ . La description des domaines  $\Omega^f(t)$  et  $\Omega^s(t)$ , c'est-à-dire, du volume de contrôle  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \overline{\Omega^s(t)}$ , est réalisée par la donnée d'une application régulière et injective :

$$\begin{aligned} x : \Omega \times (0, T) &\longrightarrow \Omega, \\ (x_0, t) &\longmapsto x = x(x_0, t). \end{aligned} \quad (2)$$

On note  $x^f \stackrel{\text{def}}{=} x|_{\Omega_0^f}$  et  $x^s \stackrel{\text{def}}{=} x|_{\Omega_0^s}$ . Pour  $x_0 \in \Omega_0^s$ ,  $x^s(x_0, t)$  correspond à la position d'un point matériel  $x_0$  à l'instant  $t \geq 0$ . Ainsi, comme dans [3], l'application  $x$  est définie par



$$\begin{aligned} x(x_0, t) &= \text{Ext}(x^s|_{\Gamma_0^s})(x_0, t), \quad \forall x_0 \in \bar{\Omega}_0^f, \\ x(x_0, t) &= x^s(x_0, t), \quad \forall x_0 \in \bar{\Omega}_0^s. \end{aligned}$$

Ici, Ext désigne un opérateur d'extension de  $\Gamma_0^s$  sur  $\bar{\Omega}_0^f$  tel que  $\text{Ext}(x^s|_{\Gamma_0^s})|_{\Gamma_0^f} = I_{\Gamma_0^f}$ .

*Remarque 2.* – On a considéré ici, sans perte de généralité, que le domaine fluide est déformé seulement à partir du mouvement de l'interface fluide-structure  $\Gamma_0^s$ , car  $\Gamma_0^f = \Gamma^f$  reste fixe au cours du temps. Ceci implique que le domaine de calcul  $\Omega$  reste aussi fixe en temps, cependant on notera  $\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_0^f \cup \bar{\Omega}_0^s$  le domaine de référence, pour le distinguer de la configuration actuelle toujours notée  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \bar{\Omega}^s(t)$ .

*Remarque 3.* – La définition de l'opérateur d'extension, Ext, est arbitraire à l'intérieur de  $\Omega_0^f$ . Il ne s'agit pas d'une inconnue du problème.

En transportant les équations fluides dans le domaine de référence  $\Omega_0^f$ , nous obtenons les équations de Navier–Stokes incompressibles en formulation ALE [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_0 \{ J [u \otimes (u - w) - \sigma(u, p)] F^{-T} \} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\ \text{div}_0 (J u F^{-T}) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0^f, \end{aligned} \tag{3}$$

où les quantités  $F, J, w$  sont définies par :

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad J \stackrel{\text{def}}{=} \det(F) > 0, \quad w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0}$$

*Remarque 4.* – D'après la définition de la carte  $x$ ,  $w|_{\Omega_0^s}$  représente la vitesse du solide, alors que  $w|_{\Omega_0^f}$  représente la vitesse du volume de contrôle fluide, qui est différente, en général, de la vitesse du fluide dans  $\Omega^f(t)$ .

~~STOP HERE~~

### 2.1. Formulation ALE forte du système couplé

L'évolution du solide est donnée par le mouvement  $x^s$  et son champ de contraintes  $S$  (deuxième tenseur de Piola–Kirchoff) relié à  $x^s$  par une loi de comportement adéquate. Par conséquent, le couple  $(x^s, S)$  satisfait les équations de l'élastodynamique non linéaire :

$$\ddot{x}^s - \text{div}_0(FS) = f \quad \text{dans } \Omega_0^s. \tag{4}$$

Le couplage entre les équations du solide et celles du fluide est opéré par des conditions aux limites standard sur l'interface fixe  $\Gamma_0^s$ , à savoir, la continuité cinématique des vitesses et cinétique des efforts [3,1]:

$$\begin{aligned} u &= x^s \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \\ F S n_0 &= J \sigma(u, p) F^{-T} n_0 \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \end{aligned} \tag{5}$$

où  $n_0$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega_0^f$ . De plus, les équations fluides sont munies d'une condition de Dirichlet en vitesse sur la frontière  $\Gamma_0^f$ ,

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma_0^f. \tag{6}$$

FALL 2001

# ANALYSIS

START HERE

des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *Sur le théorème de convolution de Titchmarsh*

### **Abstract.**

Soit  $M$  l'ensemble des mesures de Borel finies à valeurs complexes  $\mu \neq 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\ell(\mu) = \inf(\text{supp } \mu)$ . Le théorème classique de convolution de Titchmarsh assure que si : (i)  $\mu_j \in M$ , (ii)  $\ell(\mu_j) > -\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , alors  $\ell(\mu_1) + \dots + \ell(\mu_n) = \ell(\mu_1 * \dots * \mu_n)$ . La condition (ii) ne peut pas être omise. Il a été montré dans les années 80 que la condition (ii) peut être remplacée par la décroissance suffisamment rapide des mesures  $\mu_j$  en  $-\infty$ , et la meilleure hypothèse possible de cette forme a été trouvée. Nous montrons que cette dernière condition peut être affaiblie quand les mesures  $\mu_j$  sont linéairement dépendantes, et nous trouvons la condition optimale dans ce cas. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

### *Version française abrégée*

Soit  $M$  l'ensemble des mesures de Borel finies à valeurs complexes  $\mu \neq 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\ell(\mu) = \inf(\text{supp } \mu)$ . Le théorème classique de convolution de Titchmarsh assure que si : (i)  $\mu_j \in M$ , (ii)  $\ell(\mu_j) > -\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , alors l'équation (1) est vraie. Quelques exemples simples montrent que la condition (ii) ne peut pas être omise. Toutefois, il est montré dans [2,5] que cette condition peut être affaiblie en la remplaçant par une hypothèse de décroissance suffisamment rapide de  $|\mu_j|((-\infty, x))$  quand  $x \rightarrow -\infty$ . La meilleure condition possible (2) de cette sorte a été découverte dans [5]; il est même impossible de

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

S0764-4442(00)00510-3/FLA

© 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

remplacer le symbole « $\forall$ » par « $\exists$ ». Le but de cette Note est de montrer que (2) peut être considérablement affaiblie si les mesures sont linéairement dépendantes. Notre résultat est optimal, à la fois relativement à la décroissance des mesures et par rapport à la dépendance linéaire des mesures. Ce résultat est motivé par son lien avec la propriété de «quasi-analyticité» des puissances de convolution des mesures de [5] : si  $\mu_1, \mu_2 \in M$  vérifient (3),  $\ell(\mu_1) = -\infty$  et  $\mu_1^{n*}|_{(-\infty,0)} = \mu_2^{n*}|_{(-\infty,0)}$  pour un certain  $n \geq 3$ , alors  $\mu_1^{n*} \equiv \mu_2^{n*}$ .

Nous commençons par un cas particulier de notre résultat principal.

**THÉORÈME 1.** – Si les mesures  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1} \in M$ ,  $n \geq 3$ , sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ , vérifient (3), et si  $\mu_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1}$ , alors (1) est vraie.

La condition (3) est précise : la conclusion n'est plus vraie si « $\forall$ » dans (3) est remplacé par « $\exists$ ». En effet, définissons des mesures  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  par leur transformées de Fourier (4). Alors la condition (3) est vérifiée et on a  $\ell(\mu_1) = \ell(\mu_2) = \ell(\mu_3) = -\infty$ , alors que  $\ell(\mu_1 * \mu_2 * \mu_3) = 0$ .

Le théorème 1 est une conséquence d'un nouveau théorème de factorisation pour la classe  $H^\infty(\mathbb{C}_+)$  des fonctions analytiques bornées sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$  :

**THÉORÈME 2.** – Soit  $h \neq 0$  une fonction dans  $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ . Supposons que  $h = g_1 g_2 \dots g_n$ , où les fonctions  $g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 3$  sont analytiques sur  $\mathbb{C}_+$ , et vérifient la condition (5). Si  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$  et  $g_n = g_1 + \dots + g_{n-1}$ , alors il existe des constantes  $b_j \in \mathbb{R}$  telles que (6) soit vraie.

La preuve du théorème 2 est fondée sur le deuxième théorème principal de H. Cartan pour les courbes analytiques et le nouveau théorème suivant sur la représentation d'une fonction harmonique sur  $\mathbb{C}_+$ .

**THÉORÈME 3.** – Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $\mathbb{C}_+$ , à valeurs réelles, qui vérifie (8) et telle qu'il existe une suite  $\{\tau_k\}$ ,  $\tau_k \rightarrow \infty$  pour laquelle (7) est vérifiée. Alors  $u$  possède une représentation (9), où  $k \in \mathbb{R}$  est une constante et  $\nu$  est une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles qui vérifie (10).

Le théorème 3 est différent des résultats déjà connus ([3], p. 109, [4], p. 233), puisqu'il impose une condition bien plus faible (7) sur la croissance de  $u$  pour que la représentation (9) soit vraie. Par exemple, dans [4], p. 233, on suppose que  $u^+(z) = O(|z|)$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ .

Des exemples simples montrent que la condition (1) n'est pas vraie en général pour des mesures qui vérifient (3). Nous donnons maintenant la condition nécessaire et suffisante sur la forme de la dépendance linéaire pour que (1) reste vraie.

Soient  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ,  $n \geq 2$ , une famille de mesures dans  $M$ . Soit  $\Lambda$  l'espace engendré par cette famille, avec  $p = \dim \Lambda$ . Supposons que  $1 \leq p \leq n - 1$ . On peut renuméroter les mesures  $\mu_j$  de telle sorte que  $\mu_1, \dots, \mu_p$  soit une base de  $\Lambda$ . Alors on a des constantes  $c_{k,j}$  telles que l'équation (11) soit vraie. Considérons la matrice  $(n - p) \times p$ ,  $C$ , de (12). Nous dirons que la famille  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  est admissible si  $C$  satisfait aux conditions  $\alpha$  et  $\beta$  suivantes :

( $\alpha$ ) chaque colonne de  $C$  contient au moins un élément non nul. Remarquons que dans certains cas il est possible d'effacer certaines lignes de  $C$  sans enfreindre ( $\alpha$ ). Notons  $\tilde{C}$  toute sous-matrice de  $C$  possédant le nombre minimal de lignes et vérifiant toujours la condition ( $\alpha$ );

( $\beta$ ) toute matrice  $\tilde{C}$  possède une seule ligne ou alors chaque paire  $\{\rho, R\}$  de ses lignes peut être insérée dans une suite  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  de ses lignes telles que  $\rho_1 = \rho$ ,  $\rho_m = R$ , et telles que pour tout  $t$ ,  $1 \leq t \leq m - 1$ ,  $\rho_t$  et  $\rho_{t+1}$  possèdent des éléments non nuls dans la même colonne (dépendants de  $t$ ).

Notons que si  $p = 1$ , alors  $C$  possède une seule colonne, et la famille  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ,  $n \geq 2$ , est toujours admissible. Si les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées, alors  $p = n - 1$  et  $C = \tilde{C}$  possèdent une seule ligne  $(1, 1, \dots, 1)$  et donc est admissible. Le théorème 1 est donc un cas particulier du résultat suivant :

**THÉORÈME 4.** – Soient  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ ,  $n \geq 3$ , une famille de mesures de  $M$  qui vérifient l'hypothèse (3). Si cette famille est admissible, alors (1) est vraie.