

French Exam Fall 2002

Algebra

9. Modules de fractions de modules gradués.

Soient A un anneau gradué, M un A -module gradué, Δ le monoïde des degrés ; nous supposons dans ce n° que Δ est un *groupe*. Rappelons (*Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 11) que A et M sont respectivement sommes directes de groupes additifs

$$A = \bigoplus_{i \in \Delta} A_i, \quad M = \bigoplus_{i \in \Delta} M_i$$

avec $A_i A_j \subset A_{i+j}$ et $A_i M_j \subset M_{i+j}$ quels que soient i, j dans Δ . Soit S une partie multiplicative de A dont tous les éléments sont homogènes. Pour tout $i \in \Delta$, nous poserons $S_i = S \cap A_i$, et nous noterons $(S^{-1}M)_i$ l'ensemble des éléments m' de $S^{-1}M$ pour lesquels il existe des éléments j, k de Δ , un élément $m \in M_j$ et un élément $s \in S_k$ tels que $j - k = i$ et $m' = m/s$. Si $(m'_q)_{1 \leq q \leq r}$ est une famille finie d'éléments de $S^{-1}M$ telle que $m'_q \in (S^{-1}M)_{i(q)}$, il existe des éléments $j(q) \in \Delta$ et $k \in \Delta$, des éléments $m_q \in M_{j(q)}$ ($1 \leq q \leq r$) et $s \in S_k$ tels que $m'_q = m_q/s$ pour $1 \leq q \leq r$ (n° 1, Remarque 2).

PROPOSITION 21. — *L'anneau $S^{-1}A$ muni de la famille $((S^{-1}A)_i)$ est un anneau gradué, et $S^{-1}M$ muni de la famille $((S^{-1}M)_i)$ est un module gradué sur l'anneau gradué $S^{-1}A$. Les applications canoniques i_1^S et i_2^S sont homogènes de degré 0.*

Soient $m \in M_j$, $s \in S_k$, $m' \in M_{j'}$, $s' \in S_{k'}$, et supposons que $j - k = j' - k' = i$; alors $(m/s) - (m'/s') = (s'm - sm')/ss'$ et on a $s'm - sm' \in M_{j+k'} = M_{j'+k}$ et $ss' \in S_{k+k'}$, donc $(m/s) - (m'/s') \in (S^{-1}M)_i$ par définition ; ceci montre que les $(S^{-1}M)_i$ sont des sous-groupes

additifs de $S^{-1}M$. La somme de ces sous-groupes est $S^{-1}M$ tout entier : en effet, tout $x \in S^{-1}M$ s'écrit m/s où $m \in M$, $s \in S$; s est homogène par hypothèse, et m somme d'éléments homogènes m_j ; donc x est somme des m_j/s , qui appartiennent chacun à un sous-groupe $(S^{-1}M)_i$. Enfin, la somme des $(S^{-1}M)_i$ est directe ; considérons en effet une famille finie d'éléments x_q ($1 \leq q \leq n$) tels que $x_q \in (S^{-1}M)_{i(q)}$, où les indices $i(q)$ sont distincts, et supposons que $\sum_{q=1}^n x_q = 0$. Chaque x_q s'écrit $x_q = m_q/s$ avec $s \in S_k$ et $m_q \in M_{i(q)+k}$; l'hypothèse entraîne qu'il existe $s' \in S$ tel que $s' \left(\sum_{q=1}^n m_q \right) = 0$; si les $s'm_q$ n'étaient pas tous nuls, on aurait une contradiction puisque, si $s' \in S_d$, on a $s'm_q \in M_{i(q)+d}$, et les $i(q) + d$ sont tous distincts. On en conclut que $x_q = 0$ pour tout indice q .

On vérifie immédiatement que, si $a \in (S^{-1}A)_i$ et $x \in (S^{-1}M)_j$, on a $ax \in (S^{-1}M)_{i+j}$. Appliquant ce résultat au cas où $M = A$, on voit d'abord que $S^{-1}A$ est un anneau gradué par les $(S^{-1}A)_i$; on voit ensuite que $S^{-1}M$ est un module gradué sur $S^{-1}A$. Enfin, comme $1 \in A_0$, i_1^S et i_2^S sont homogènes de degré 0.

Version française abrégée

On examine ici le problème de fermeture apparaissant lorsque l'on souhaite effectuer des simulations d'écoulements diphasiques en retenant l'approche à deux fluides inconditionnellement hyperbolique, ce qui peut être réalisé en privilégiant les formulations basées sur les modèles ne faisant pas l'hypothèse d'équilibre local instantané sous jacente aux modèles « à une pression ». De tels modèles à deux pressions ont été proposés notamment dans [2,9,10,13,6–8,14–16,18]. Ces modèles nécessitent de faire certaines hypothèses concernant le transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à l'interface d'une part. La littérature propose pour cela un certain nombre de fermetures locales plus ou moins dédiées. Ils requièrent d'autre part la donnée de la vitesse et de la pression d'interface (qui interviennent explicitement dans l'expression des termes convectifs). On propose donc ici une approche qui permet d'une part de fermer le problème, au sens des relations algébriques, mais également en terme de relation de saut, ce qui est nécessaire puisque le système convectif associé n'admet pas de forme conservative. Une première hypothèse pré-suppose un type topologique de l'interface. Cette hypothèse impose alors trois formes possibles de moyenne pour la vitesse interfaciale. Une seconde hypothèse de fermeture permet d'obtenir une

E-mail addresses: coquel@ann.jussieu.fr (F. Coquel); gallouet@cmi.univ-mrs.fr (T. Gallouët); herard@cmi.univ-mrs.fr; herard@chi80bk.der.edf.fr (J.-M. Hérard); seguin@chi80bk.der.edf.fr (N. Seguin).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S 1631-073X(02)02366-X/FLA

927

F. Coquel et al. / C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 927–932

inégalité d'entropie physiquement admissible. Elle permet d'obtenir une relation liant vitesse d'interface et pression d'interface. Muni de ces fermetures, on vérifie alors que le problème de Riemann unidimensionnel associé au système convectif non conservatif admet des solutions qui respectent le principe physique de positivité pour les grandeurs fondamentales : densité partielle, fraction volumique et énergie interne. Il est alors en effet possible de fermer le système des relations de saut au voisinage de l'onde associée à la valeur propre $\lambda_1 = V_I$, lorsque l'on a retenu les hypothèses précédentes. Les modèles sont comparés à quelques propositions existantes. Quelques résultats numériques donnent un aperçu du comportement de certains schémas pour un choix de conditions initiales conduisant à une solution instationnaire simple mais d'importance fondamentale. On propose également une voie de modélisation alternative pour le terme de pression interfaciale, qui permet également de fermer le problème aux relations de saut dans tous les champs, dès lors que l'on retient le modèle de vitesse d'interface de base proposé.

Théorème. Il existe un voisinage V du point $x \in U$, tel que dans V l'équation (2) admette $n-1$ intégrales premières f_1, \dots, f_{n-1} fonctionnellement indépendantes*). Chaque intégrale première de l'équation (2) est une fonction de f_1, \dots, f_{n-1} dans V .

) On rappelle que les fonctions $f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$ sont fonctionnellement indépendantes dans le voisinage du point $x \in U$ si le rang de la dérivée $f_|_x$ de l'application $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, définie par les fonctions f_1, \dots, f_m est égal à m (voir G. Fikhtengoltz, *Cours de calcul différentiel et intégral*, « Naouka », 1970, t. 1, chap. 6).

§ 11) DÉRIVÉE SUIVANT LA DIRECTION DU CHAMP DE VECTEURS 83

Démonstration. Pour l'équation standard (fig. 82) dans \mathbb{R}^n

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n = 0 \tag{5}$$

le théorème est évident: les intégrales premières étant en effet des fonctions différentiables arbitraires dépendant des coordonnées y_2, \dots, y_n ; les coordonnées y_2, \dots, y_n , ne sont autres que $n-1$ intégrales premières fonctionnellement indépendantes.

Ceci s'applique également à l'équation (5) dans un domaine convexe quelconque W de l'espace \mathbb{R}^n (un domaine de \mathbb{R}^n est convexe

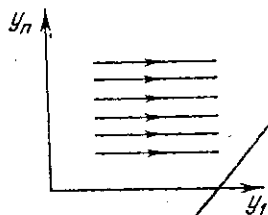


Fig. 82. La coordonnée y_n est une intégrale première

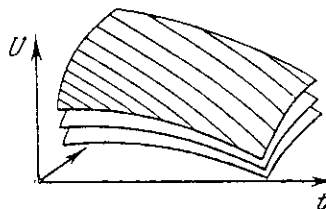


Fig. 83. Courbes intégrales de la surface de niveau de l'intégrale première fonction du temps

s'il contient le segment qui joint deux quelconques de ses points; citer un exemple d'intégrale première de l'équation (5) ne se ramenant pas à une fonction de y_2, \dots, y_n dans le domaine non convexe W de l'espace \mathbb{R}^n).

D'après le théorème fondamental, l'équation (2) peut prendre la forme (5) dans un voisinage du point x si l'on se donne un système convenable de coordonnées y . On peut considérer que ce voisinage est un domaine convexe dans le système de coordonnées y (dans le cas contraire on prend un voisinage moindre, mais convexe).

Il nous reste à souligner que les propriétés de première intégrale et d'indépendance fonctionnelle de la fonction ne dépendent pas du système de coordonnées. Le théorème est démontré.

6. Intégrales premières fonction du temps. Soit $f: \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur l'espace des phases élargi de l'équation non autonome *)

$$\dot{x} = v(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in U. \tag{6}$$

On dit que f est une *intégrale première fonction du temps* si elle est une intégrale première du système autonome obtenu à partir de l'équation (6) par adjonction de l'équation $\dot{t} = 1$:

$$\dot{X} = V(X), \quad X \in \mathbb{R} \times U, \quad X = (t, x), \quad V(t, x) = (1, v).$$

*) On suppose que le deuxième membre $v(t, x)$ est différentiable.

En d'autres termes: chaque courbe intégrale de l'équation (6) est entièrement contenue dans un ensemble de niveau de la fonction f (fig. 83).

Le champ de vecteurs V ne s'annule pas. D'après le théorème précédent dans le voisinage de chaque point (t, x) , l'équation (6) possède n intégrales premières (fonctions du temps) fonctionnellement indépendantes en fonction desquelles s'exprime toute intégrale première (fonction du temps) de l'équation (6) dans ce voisinage.

En particulier, l'équation autonome (2), définie dans un espace des phases de dimension n , possède dans le voisinage d'un point quelconque (qui peut bien être singulier) n intégrales premières fonctions du temps et fonctionnellement indépendantes.

Exercice 1. Supposons que chaque solution de l'équation (6) puisse être prolongée sur l'axe t tout entier. L'équation (6) possède alors n intégrales premières (fonctions du temps) fonctionnellement indépendantes dans l'espace des phases élargi en fonction desquelles on peut exprimer chaque intégrale première (fonction du temps).

On appelle intégrale première d'une équation différentielle (ou d'un système d'équations différentielles) d'ordre quelconque, l'intégrale première du système équivalent d'équations du premier ordre.

§ 12. Système conservatif à un degré de liberté

A titre d'exemple où l'intégrale première est appliquée à l'étude d'une équation différentielle, voyons un système mécanique à un degré de liberté sans frottement.

1. Définitions. On appelle système conservatif à un degré de liberté le système décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{x} = F(x), \tag{1}$$

où F est une fonction différentiable sur un certain intervalle I de l'axe réel x .

L'équation (1) est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F(x_1), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in I \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

La notation suivante est à l'usage en mécanique

- I — espace de configuration;
- $x_1 = x$ — coordonnée;
- $x_2 = \dot{x}$ — vitesse;
- \ddot{x} — accélération;
- $I \times \mathbb{R}$ — espace des phases;
- (1) — équation de Newton;
- F — champ de forces;
- $F(x)$ — force.