ALGÈBRE

French Exam Spring 2002

Si H se réduit à un point isolé μ de $\operatorname{Sp} x$, $x|E'_{\{\mu\}}$ admet pour spectre $\operatorname{Sp} x - \{\mu\}$, et en particulier $(x - \mu)|E'_{\{\mu\}}$ est un automorphisme de $E'_{\{\mu\}}$. D'autre part, $(x - \mu)|E_{\{\mu\}}$ est quasi-nilpotent. Pour que μ soit pôle d'ordre $p > 0$ de la résolvante de x, il faut et il suffit que $(x - \mu)^{p-1}|E_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x - \mu)^p|E_{\{\mu\}} = 0$. Dans ce cas, $E_{\{\mu\}} = \operatorname{Ker}(x - \mu)^p$ et $E'_{\{\mu\}} = \operatorname{Im}(x - \mu)^p$.

Nous résumerons une partie de ces résultats de la manière suivante:

Proposition 16. — *Soient* E *un espace de Banach complexe,* x *un endomorphisme continu de* E, μ *un point isolé de* $\operatorname{Sp} x$, K *le complémentaire de* $\{\mu\}$ *dans* $\operatorname{Sp} x$.

(i) *Soit* Γ *le bord orienté d'un disque ouvert* Δ *de centre* μ, *tel que* $K \cap (\Gamma \cup \Delta) = \varnothing$. *Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (z - x)^{-1}\,dz$$

est un idempotent j *qui ne dépend que de* x *et* μ.

(ii) $E' = \operatorname{Im} j$ *et* $E'' = \operatorname{Ker} j$ *sont stables par* x, $(x - \mu)|E'$ *est quasi-nilpotent,* $(x - \mu)|E''$ *est un automorphisme de* E''.

(iii) *Pour que* μ *soit pôle d'ordre* $p > 0$ *de la résolvante de* x, *il faut et il suffit que* $(x - \mu)^{p-1}|E' = 0$, $(x - \mu)^p|E' = 0$.

§ 5. Algèbres de Banach commutatives régulières

1. Définition et premières propriétés

Proposition 1. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La topologie faible et la topologie de Jacobson sur* X(A) *coïncident.*

(ii) *Pour tout* $\chi \in X(A)$ *et toute partie faiblement fermée* F *de* X(A) *telle que* $\chi \notin F$, *il existe un* $x \in A$ *tel que* $\mathscr{G}x$ *soit égale à* 1 *en* χ *et à* 0 *sur* F.

(iii) *Pour toute partie faiblement compacte* K *et toute partie faiblement fermée* F *de* X(A) *telles que* $K \cap F = \varnothing$, *il existe un* $x \in A$ *tel que* $\mathscr{G}x$ *soit égale à* 1 *sur* K *et à* 0 *sur* F.

Soit $M \subset X(A)$. Dire que M est fermé pour la topologie de Jacobson signifie que, pour tout $\chi \in X(A) - M$, il existe un $x \in A$ tel que $\mathscr{G}x$ s'annule sur M mais pas en χ. La condition (ii) signifie

ANALYSE french DOZ

Corollaire. — *Soit* N *une partie* ν*-négligeable de* X. *L'ensemble des* $t \in$ T *tels que* N *ne soit pas* λ_t*-négligeable est localement négligeable pour* μ *(et négligeable si en outre l'application* $t \to \lambda^t$ *est vaguement continue).*

Proposition 3. — *Soit* f *une fonction* ν*-mesurable définie dans* X, *à valeurs dans un espace topologique* E, *constante dans le complémentaire d'une réunion dénombrable d'ensembles* ν*-intégrables. Alors l'ensemble des* $t \in$ T *tels que* f *ne soit pas* λ_t*-mesurable est localement négligeable pour* μ.

Par hypothèse, il existe une partition de X formée d'un ensemble ν-négligeable N, d'une suite (K_n) d'ensembles compacts et d'un ensemble (ν-mesurable) B, tels que f soit constante dans B et que la restriction de f à chacun des K_n soit continue. En vertu du cor. de la prop. 2, N est λ_t-négligeable sauf pour un ensemble localement négligeable S de valeurs de t. Pour $t \notin$ S, la restriction de f à chacun des ensembles N, B, K_n est donc λ_t-mesurable, d'où la proposition (§ 1, n° 4, prop. 5).

La conclusion de la prop. 3 ne subsiste plus nécessairement si f n'est pas constante dans le complémentaire d'une réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables, même si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue (exerc. 4).

4. *Intégrales superposées de fonctions à valeurs dans un espace de Banach.*

Théorème 1. — *Soit* $t \to \lambda_t$ *une famille* μ*-adéquate de mesures sur un espace localement compact* X, *et soit* $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$. *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction* ν*-intégrable, à valeurs dans un espace de Banach* F *ou dans* $\overline{\mathbf{R}}$. *Soit* H *l'ensemble des* $t \in$ T *pour lesquels* $\mathbf{f}$ *n'est pas* λ_t*-intégrable. Alors* H *est localement négligeable pour* μ ; *la fonction* $t \to \int \mathbf{f}(x)d\lambda_t(x)$, *définie pour* $t \notin$ H, *est essentiellement* μ*-intégrable, et on a*

$$\int \mathbf{f}(x)d\nu(x) = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x)d\lambda_t(x). \tag{6}$$

Si en outre l'application $t \to \lambda_t$ *est vaguement continue,* H *est négligeable et la fonction* $t \to \int \mathbf{f}(x)d\lambda_t(x)$ *est intégrable.*

APPL.

French SOZ

Le théorème suivant répond à ces questions :

THÉORÈME 1. – *Il n'existe pas d'orbite convergente vers un point fixe indifférent irrationnel d'une application holomorphe distincte du point fixe lui-même.*

Cette question et des questions reliées, élevées au rang de conjectures, se trouvent dans des textes plus récents. Par exemple, notre théorème prouve la conjecture 1.2 de [7], p. 73, et montre que la conjecture 1.5 ([7], p. 77) est toujours fausse.

1. Soit $f(x) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe avec $|\lambda| = 1$. Un domaine de Jordan C^1 contenant 0 est dit *admissible* (pour f) si f ainsi que f^{-1} sont définis et univalents dans un voisinage de l'adhérence de U. Dans cette situation [5], l'auteur a établit l'existence d'un *compact de Siegel* $K \subset \overline{U}$, qui est un compact connexe plein, contenant le point fixe 0 et un point du bord de U, qui est totalement invariant par la dynamique locale de f. Un compact de Siegel est un *hérisson* si le point fixe 0 est irrationnel non linéarisable ou linéarisable avec un domaine de linéarisation maximal relativement compact dans U. Dans ce cas, le nombre de rotation α, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, est irrationnel. La construction fondamentale de [5] montre que la dynamique de f à l'extérieur de K est conjuguée à la dynamique d'un difféomorphisme analytique du cercle g de nombre de rotation α. Plus précisément, si h est une représentation conforme de l'extérieur du disque unité fermé (dans la sphère de Riemann) vers l'extérieur de K, on a que $g = h^{-1} \circ f \circ h$ s'étend en un difféomorphisme analytique du cercle unité. La topologie d'un hérisson est mauvaise ([5], [8]), il n'est jamais localement connexe, contient des points non accessibles, etc. L'idée de base pour démontrer le théorème 1 est d'étudier, malgré la mauvaise topologie, la dynamique de f sur un hérisson non linéarisable K et au voisinage de celui-ci. On se place sous les hypothèses : K hérisson non linéarisable. Des techniques plus élaborées permettent d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que ceux énoncés ici, qui représentent le strict minimum nécessaire à la démonstration du théorème 1 (sauf pour quelques corollaires spectaculaires immédiats). Elles seront présentées ultérieurement dans [8]. On note $(q_n)_{n \geq 0}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. On a

THÉORÈME 2. – *Il existe une sous-suite infinie $A \subset \mathbf{N}$ telle que les itérés $(f^{q_n})_{n \in A}$ convergent uniformément sur K vers l'identité.*

COROLLAIRE 1. – *Tout point d'un hérisson est récurrent.*

COROLLAIRE 2. – *Le centralisateur de $f_{/K}$ dans le groupe d'homéomorphismes de K est non dénombrable.*

THÉORÈME 3. – *L'ensemble ω-limite ou α-limite d'un point extérieur à K ne peut être contenu dans U s'il intersecte K.*

COROLLAIRE 3. – *Il existe un unique hérisson associé à tout domaine admissible U.*

Évidemment les théorèmes 2 et 3 entraînent le théorème 1.

2. L'outil principal pour démontrer ces théorèmes repose sur la proposition technique suivante pour les difféomorphismes analytiques du cercle :

PROPOSITION 1. – *Soit g un difféomorphisme analytique du cercle unité $\mathbf{S}^1$ de nombre de rotation irrationnel α. Il existe un ensemble infini $A \subset \mathbf{N}$, tel que pour $n \in A$ il existe deux courbes de Jordan $\gamma_1^{(n)}$ et $\gamma_0^{(n)}$ homotopes et extérieures à $\mathbf{S}^1$ ($\gamma_0^{(n)}$ extérieure à $\gamma_1^{(n)}$), convergentes vers $\mathbf{S}^1$ quand $n \to +\infty$, telles que :*

(i) *L'itéré g^{q_n} (resp. g^{-q_n}) est bien défini dans un voisinage de l'anneau fermé déterminé par $\mathbf{S}^1$ et $\gamma_0^{(n)}$; pour $z \in \gamma_0^{(n)}$, il existe un anneau $B^{(n)}(z)$ séparant z et $g^{q_n}(z)$ (resp. $g^{-q_n}(z)$) de $\mathbf{S}^1$ dont le module est supérieur à M_n, avec $M_n \to +\infty$, $n \in A$.*