APPLIED MATHS.

French Exam Fall 2003

où T est la température renormalisée du mélange (elle vaut 0 pour les gaz frais et 1 pour les gaz brûlés), $u=(u_1,\dots,u_N)^t$ le vecteur vitesse des gaz, $f(T)(1-T)$ le taux d'avancement de la réaction chimique.

On suppose que ω est un ouvert régulier contenu dans la boule unité de $\mathbb{R}^N$, $0<\theta_0<1$, $u_i\in C^{0,\delta}(\Omega)$ pour $i\in\{1,\dots,N\}$ $(0<\delta\leqslant 1)$, $f\in C^{0,1}([0,1])$ admet une température d'ignition :

$$\exists\theta\in(0,1),\quad f=0\quad\text{sur }[0,\theta],\quad f>0\quad\text{sur }]\theta,1[. \tag{2}$$

On étend f par 0 à l'extérieur de l'intervalle $[0,1]$. Par conséquent f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et selon des estimations elliptiques standards, si une solution T de (1) est bornée, alors T est de classe $C^{2,\delta}(\Omega)$.

Dans cette Note, on suppose que $\theta>\theta_0$ et qu'il existe une constante $\alpha>0$ telle que

$$\|u\cdot x\|<\alpha. \tag{3}$$

De nombreux travaux portent sur les questions d'existence, d'unicité et les proprietés qualitatives des équations elliptiques semilinéaires dans des domaines cylindriques, sur $\mathbb{R}$ ou sur l'espace entier $\mathbb{R}^N$. En particulier, Éq. (1) intervient dans des modèles de combustion et de biologie.

En dimension 1, l'existence, l'unicité et des proprietés de monotonie des ondes planes ont été obtenues par Kolmogorov, Petrovskii, Piskunov [11], Zeldovich, Frank-Kamenetskii [13], Aronson et Weinberger [1], Kanel' [10]. Le cas d'un système et de la limite singulière a été traité par Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [6].

En dimension $N\geqslant 2$, des résultats similaires ont été obtenus dans des domaines cylindriques infinis ou bornés, par Berestycki, Larrouturou, Lions, Nirenberg [3,5,7]. Le problème de limite singulière conduit alors à un problème de frontière libre.

Dans la Section 2, on montre l'existence d'un profile $0<T<1$, solution de (1). La preuve est basée sur un argument de point fixe pour construire une famille d'approximations $(T_b)_{b>0}$ sur des domaines bornés Ω_b et sur des estimations uniformes en b. En passant à la limite $b\to\infty$, on montre que $T_b\to T$ localement (à une sous-suite près) vers une solution de (1).

La Section 3 traite simultanément les questions de l'unicité et des proprietés de monotonie des solutions de (1) en dimension $N=2$. Les preuves sont basées sur la sliding method [8] et sur le comportement asymptotique des solutions, lorsque $|x|\to\infty$.

Dans la Section 4, on effectue une analyse asymptotique rigoureuse du modèle (1) dans la limite $E\to\infty$ des hautes énergies d'activation, en dimension $N\geqslant 2$.

2. Existence

Théorème 2.1. *Le problème* (1) *admet une solution T de classe $C^2(\Omega)$.*

Démonstration. On considère l'opérateur K_b défini dans $X_b=C^{1,\delta}(\overline{\Omega}_b)$ qui à w associe l'unique solution W du problème suivant posé dans le domaine borné $\Omega_b=\{x\in\Omega\colon |x|<b\}$:

$$\begin{cases}-\Delta W+u\cdot\nabla W=f(w)(1-w) & \text{dans }\Omega_b,\\ W=\theta_0\quad\text{sur }\partial\omega,\quad W(x)=1 & \text{si }|x|=b.\end{cases} \tag{4}$$

On montre que l'application K_b admet un point fixe T_b en appliquant le théorème de Point Fixe de Schauder. De plus, puisque f vérifie (2), le principe du maximum implique $\theta_0<T_b<1$.

Théorème 2.2. *Soient les réels $\beta>0$ tel que $\beta\geqslant\|u\|_\infty+N+1$, $f_0=\min_{[\theta',1]}f>0$, $\theta'=\frac{1+\theta}{2}$. Si T_b est un point fixe de K_b, alors il existe une constante $\bar r>0$ indépendante de b telle que*

$$0<1-T_b(x)\leqslant\frac{1}{2}(1-\theta)\,\mathrm{e}^{-\mu(|x|-\bar r)}\quad \textit{pour } |x|\geqslant\bar r, \tag{5}$$

où la constante $\mu>0$ est solution de $\mu^2+\mu\beta-f_0=0$.

1

Selon le Théorème 2.2 et des estimations elliptiques standards, en passant à la limite $b \to \infty$, $T_b \to T$ localement (à une sous-suite près) vers une solution $T \in C^2(\Omega)$ de (1). □

3. Unicité et proprietés de monotonie en dimension $N = 2$

Dans cette section, on suppose que u dérive d'un potentiel ρ et qu'il existe une transformation conforme

$$\Psi : \begin{cases} \Omega \to \Sigma = \mathbb{R}^+ \times \Pi^1 \quad (\Pi^1 \text{ désigne le Tore}), \\ (x_1, x_2) \mapsto \big(\rho(x_1, x_2), \phi(x_1, x_2)\big) \end{cases} \tag{6}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

$$\text{l'application } \rho \mapsto \xi(\rho, \phi) = \left|u \circ \Psi^{-1}(\rho, \phi)\right|^{-2} \text{ est croissante} \tag{7}$$

Pour tous réels ε_0, $\kappa > 0$, il existe un réel $h_0 > 0$ tel que

$$\left|\Psi^{-1}(\rho + h, \phi)\right| \geqslant (1 + \varepsilon_0)\left|\Psi^{-1}(\rho, \phi)\right| + \kappa \quad \forall (\rho, \phi) \in \Sigma. \tag{8}$$

L'hypothèse (6) entraîne que le champ u vérifie l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot u = 0.$$

On remarque que dans le cas d'un écoulement radial de type source, donné par $u(z) = z/|z|^2$, les conditions (6)–(8) sont satisfaites si on pose $\Psi(z) = \log|z| + \mathrm{i}\arg(z)$ et $\xi(\rho, \phi) = \mathrm{e}^{2\rho}$.

Théorème 3.1. *Le problème* (1) *admet une unique solution T. De plus, l'application $\rho \mapsto T \circ \Psi^{-1}(\rho, \phi)$ est croissante.*

Démonstration. Selon (6), la fonction $\widetilde{T} = T \circ \Psi^{-1}$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_\rho^2 \widetilde{T} + \partial_\phi^2 \widetilde{T} - \partial_\rho \widetilde{T} + \xi(\rho, \phi) f(\widetilde{T})(1 - \widetilde{T}) = 0 \quad \text{dans } \Sigma, \\ \widetilde{T}(0, \phi) = \theta_0, \quad \widetilde{T}(+\infty, \phi) = 1 \quad \forall \phi \in \Pi. \end{cases} \tag{9}$$

L'idée générale de la preuve consiste à comparer une solution $\widetilde{T}_1$ de (9) et les translatées à gauche d'une seconde solution $\widetilde{T}_2$ de (9).

Tout d'abord, à l'aide de (8) et d'estimations asymptotiques précises, on montre que le graphe des fonctions $\widetilde{T}_2^h(\rho, \phi) = \widetilde{T}_2(\rho + h, \phi)$ est situé au-dessus de celui de $\widetilde{T}_1$ pour tout $h \geqslant h_0 > 0$.

Ensuite, si (7) a lieu, la fonction $v^h = \widetilde{T}_2^h - \widetilde{T}_1$ vérifie

$$\partial_\rho^2 v^h + \partial_\phi^2 v^h - \partial_\rho v^h + \zeta(\rho, \phi) v^h \leqslant 0 \quad \text{dans } \Sigma. \tag{10}$$

Par conséquent, le principe du maximum fort et le lemme de Hopf implique $v^h > 0$ pour tout $h > 0$; d'où en passant à la limite $h \to 0$, on obtient $\widetilde{T}_2 - \widetilde{T}_1 = v^0 \geqslant 0$. □

4. Limite asymptotique pour les grandes énergies d'activation

On suppose que la fonction f dépend d'un paramètre $\varepsilon > 0$, proportionnel à l'inverse d'une énergie d'activation $E \to \infty$ (voir [13,6,2]) :

$$f_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^2} f\left(1 - \frac{1 - s}{\varepsilon}\right). \tag{11}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε vérifie (2) avec la température d'ignition $\theta_\varepsilon = 1 - \varepsilon(1 - \theta)$. On note T_ε la solution du problème de perturbation singulière. En procédant comme pour (5), on montre qu'il existe des constantes $\mu, \bar{r} > 0$ indépendantes de ε telles que

$$0 \leqslant 1 - T_\varepsilon(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(1 - \theta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(|x| - \bar{r})} \quad \text{pour } |x| \geqslant \bar{r}. \tag{12}$$

2

COMPLEX ANALYSIS

4.2 Familles normales

Théorème : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \qquad \exists M_K > 0, \qquad \sup_{z\in K}\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(z)| \le M_K$$

(On dit qu'une telle famille est normale, mais dans le langage des espaces vectoriels topologiques, on dira plutôt qu'il s'agit d'une famille bornée, ce qui signifie que son image par chacune des semi-normes qui définissent la topologie est bornée dans $\mathbb{R}$ (mais pas uniformément par rapport à la semi-norme); attention à ne pas confondre cette notion de bornitude avec celle liée à la distance qui définit également la topologie). Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

Preuve : Soit $K \subset \Omega$ compact . On pose $\delta = d(K, \Omega^c)$. C'est un nombre réel strictement positif. La formule de Cauchy fournit l'estimation

$$\sup_{z\in K+\overline{B(0,\delta/3)}}\sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z)| \le \frac{3}{\delta} M_{K+\overline{B(0,2\delta/3)}}.$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis: Pour $z_1, z_2 \in K$ tels que $|z_1 - z_2| < \delta/3$, le segment $[z_1, z_2]$ est inclus dans $K + \overline{B(0,\delta/3)}$, donc

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{3}{\delta} M_{K+\overline{B(0,2\delta/3)}} |z_1 - z_2|.$$

On en déduit que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue (et bornée) sur chaque compact K de Ω. Le théorème d'Ascoli permet de conclure que $\mathcal{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur $C(\Omega, \mathbb{C})$. Comme $\mathcal{H}(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé dans $C(\Omega, \mathbb{C})$, $\mathcal{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque : En pratique, ce théorème s'utilise souvent de la manière suivante: si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \qquad \exists M_K > 0, \qquad \sup_{z\in K}\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(z)| \le M_K,$$

alors il existe une suite extraite $f_{\sigma(n)}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $f_{\sigma(n)} \to f$ pour la topologie de la convergence compacte sur Ω.

Remarque : Le théorème de compacité des familles normales peut s'énoncer sous la forme familière : tout ensemble de $\mathcal{H}(\Omega)$ fermé et borné est compact (fermé, borné et compact se rapportant à la topologie de la convergence compacte). Cette propriété est bien sûr partagée par les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie (et munis de leur topologie naturelle : celle associée à n'importe quelle norme), mais également par certains espaces de fonctions de classe C^∞. Elle est par contre toujours fausse pour les espaces vectoriels normés de dimension infinie (théorème de Riesz). On en déduit qu'il n'y a pas de norme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ dont la topologie sous-jacente soit celle de la convergence compacte.

4.3 Séries de fonctions holomorphes

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$. Si $\sum_{p=0}^{n} f_p$ converge uniformément sur tout compact K de Ω, alors $\sum_{p=0}^{+\infty} f_p$ est dans $\mathcal{H}(\Omega)$, $\sum_{p=0}^{n} f'_p$ converge uniformément sur tout compact K de Ω et $(\sum_{p=0}^{+\infty} f_p)' = \sum_{p=0}^{+\infty}(f_p)'$.

C'est en particulier vrai si pour tout compact K de Ω, $\sum_{p=0}^{+\infty} \sup_{z\in K} |f_p(z)| < +\infty$ (convergence normale sur tout compact).

Remarque : On a un théorème analogue dans le cas des familles sommables. On dit que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille sommable de somme x (noté en général $\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$) d'un espace vectoriel normé E (muni de la norme $\|\,\|$) lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε partie finie de A telle que pour toute partie finie F' de A contenant F_ε, on ait $\|x - \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\| \leq \varepsilon$.

On montre alors que si $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$, telle que pour une certaine fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (notée en général $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$), pour tout $\varepsilon > 0$ et K compact de Ω, il existe $F_{\varepsilon,K}$ partie finie de A telle que pour toute partie finie F' de A contenant $F_{\varepsilon,K}$, $\sup_{z\in K} \|f(z) - \sum_{\alpha\in F'} f_\alpha(z)\| \leq \varepsilon$ (uniforme sommabilité sur tout compact de Ω), alors $f = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(\sum_{\alpha\in A} f_\alpha)' = \sum_{\alpha\in A} f'_\alpha$. C'est en particulier vrai si pour tout compact K de Ω, $\sum_{\alpha\in A} \sup_{z\in K} |f_\alpha(z)|$
$\left(= \sup_{F\subset A \text{ finie}} \sum_{\alpha\in F} \sup_{z\in K} |f_\alpha(z)|\right) < +\infty$.

Exercice :

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, et définit une fonction holomorphe 1-périodique sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Calculer un développement asymptotique en 0 à l'ordre $O(1)$ de cette fonction.

2. Montrer que $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ définit également une fonction holomorphe 1-périodique sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Calculer un développement asymptotique en 0 à l'ordre $O(1)$ de cette fonction.

3. Montrer que
$$|\sin(\pi z)| \geq |\operatorname{sh}(\pi \mathcal{I}m z)|.$$
En déduire que
$$\lim_{|\mathcal{I}m z|\to+\infty} |\sin(\pi z)| = +\infty$$
uniformément pour $\mathcal{R}e z \in [0,1]$.

4. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur le domaine
$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{R}e z \in [0,1], |\mathcal{I}m z| \geq 1\}.$$

TOPOLOGY

Chapitre 1

Topologie et compacité

Dans ce paragraphe, nous nous contentons de rappeler des définitions et des résultats utiles pour la suite de cet ouvrage. Le lecteur pourra trouver les démonstrations de tous les énoncés cités dans [Choquet] et [Dixmier].

Rappels de topologie générale : une *topologie* sur E est définie comme une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(E)$ stable par intersection finie et union quelconque et contenant E et $\emptyset$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* de la topologie. On appelle *voisinage ouvert* de $x \in E$ tout ouvert $O \in \mathcal{O}$ contenant x. On appelle *base de voisinages ouverts* de la topologie toute partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{O}$ telle que si $x \in O \in \mathcal{O}$, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset O$.
Conséquence : tout ouvert est une union de voisinages ouverts de la base.
Exemple classique : une topologie $\mathcal{O}$ sur E est dite métrisable s'il existe une distance sur E telle que $\mathcal{O}$ coïncide avec l'ensemble des unions arbitraires de boules. Une base de voisinages ouverts commode est alors constituée par les boules ouvertes elles-mêmes. Les boules ouvertes centrées en x forment une base de voisinages ouverts de x et également les boules ouvertes contenant x.

Définition 1.1 *On dit que l'espace E est séparé si $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ et $\exists U \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.*

Tous les espaces topologiques que nous considérerons seront séparés. On appelle fermeture d'un ensemble A, notée $\overline{A}$, l'intersection de tous les fermés contenant A. On appelle ouverture, ou intérieur, de A l'union de tous les ouverts contenus dans A, noté Intérieur(A).

Exercice 1.1 Adhérence
Soit A une partie de E, on dit que $x \in E$ est adhérent à A si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. On appellera adhérence de A, l'ensemble des points de E adhérents à A. On note $\overline{A}$ la fermeture de A, c'est-à-dire le plus petit fermé de E contenant A. Montrer que $\overline{A}$ et l'adhérence de A sont identiques et que la relation $A = \overline{A}$ caractérise les ensembles fermés.

Définition 1.2 Convergence d'une suite
On dit qu'une suite x_n tend vers x pour la topologie $\mathcal{O}$ si pour tout voisinage O de x il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in O$.

Proposition 1.1 *Tout fermé F est séquentiellement fermé, c'est-à-dire que si $x_n \in F$, fermé, et si $x_n \to x$ pour la topologie, alors $x \in F$.*

Démonstration Si on avait $x \in F^c$, qui est ouvert, il existerait un voisinage ouvert U de x tel que $U \subset F^c$. Mais $x_n \to x$ implique que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$, ce qui contredirait $x_n \in F$. ∘

Définition 1.3 Valeur d'adhérence d'une suite
Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E, on dit que $x \in E$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si $\forall n$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists i \geq n$ tel que $x_i \in V$.

Si on note $A_n = \{x_i,\ i \geq n\}$ alors x est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement si $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$.

Application continue. On note de manière générique $\mathcal{V}(x)$ une base de voisinages d'un point x d'un espace topologique $E, \mathcal{O}$.

Définition 1.4 Continuité en un point
Soient E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F. Soit $x_0 \in E$, on dit que f est continue en x_0 si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U) \subset V$.

Exercice 1.2 Une application d'un espace topologique dans un autre est dite *continue* si elle est continue en tout point. Démontrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert par l'application est un ouvert, ou de manière équivalente, si l'image réciproque de tout fermé est un fermé. Vérifier que si on a une base de voisinages ouverts $\mathcal{U}$ dans F, alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(U)$ est un ouvert pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Un exemple que nous utiliserons souvent : une application f de E dans $\mathbf{R}$ est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, l'ensemble $f^{-1}(I)$ est un ouvert. En effet, les intervalles ouverts forment une base de voisinages ouverts de $\mathbf{R}$. Il convient de vérifier que notre définition de la continuité généralise bien la notion de continuité séquentielle pour f (c'est-à-dire : $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.)

Proposition 1.2 *Si $f : (E, \mathcal{O}) \to (F, \mathcal{U})$ est continue, alors elle est séquentiellement continue.*

Démonstration Soit x_n tendant vers x pour $\mathcal{O}$. Fixons $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) \in U$ et montrons que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U$. Or, f étant continue, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. Donc $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(U)$ et on a donc, comme désiré, $f(x_n) \in U$.

∘

Rappelons un résultat classique, qui n'est pas toujours vrai quand les topologies ne sont pas métrisables :

Exercice 1.3 Si E et F sont métrisables, alors $f : E \to F$ est continue si et seulement si elle est *séquentiellement continue*, c'est-à-dire si $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Les compacts On dit qu'un sous-ensemble K d'un espace topologique séparé $(E, \mathcal{O})$ est compact si de tout recouvrement de K on peut extraire un recouvrement fini. Si la topologie E est métrisable, tout compact est séquentiellement compact, c'est-à-dire que K est compact si et seulement si toute suite x_n contenue dans K a un point d'accumulation, c'est-à-dire une valeur d'adhérence qui est contenue dans K. L'image d'un compact par une fonction continue est un compact. En conséquence, toute fonction réelle continue sur un compact atteint son maximum et son minimum.

Topologie produit Soit $(E_i, \mathcal{O}_i)$ des espaces topologiques. L'espace topologique produit $E = \Pi_i E_i$