APPLIED MATHEMATICS

Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 3, p. 47 à 56.

French Exam Winter 2003

MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE ET ONDES DE CHOC

par André LICHNEROWICZ

Introduction.

Au cours des dernières années, la théorie des fluides relativistes, et particulièrement la magnétohydrodynamique, se sont révélées importantes au double point de vue mathématique et physique ; le système différentiel de la magnétohydrodynamique donne l'exemple d'un système suggéré par la physique qui est hyperbolique, sans être strictement hyperbolique. D'autre part, en astrophysique théorique, interviennent, particulièrement dans le système solaire, mais aussi à plus grande échelle, des ondes de choc magnétohydrodynamiques.

Le but principal de cet exposé est l'esquisse de la théorie rigoureuse des ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. La forme relativiste des conditions de compressibilité d'un fluide joue ici un rôle important. De ces conditions et d'une généralisation convenable de l'équation d'Hugoniot, on peut déduire une étude complète des vitesses des ondes et de la thermodynamique des chocs.

1. **Fluide parfait thermodynamique.**

a) Soit V_4 un espace-temps donné, muni d'une métrique lorentzienne de signature $+---$. En coordonnées locales $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$). Dans un domaine de V_4, un fluide parfait est décrit par un tenseur d'énergie

$$T^{(f)}_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha\, u_\beta - p\, g_{\alpha\beta}$$

où ρ est la densité propre d'énergie, p la pression, u_α le vecteur-vitesse unitaire orienté vers le futur ; ρ se compose d'une densité de matière et d'une énergie interne. Nous posons :

$$\rho = c^2\, r \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2}\right) \qquad (r > 0)$$

où r est la densité de matière du fluide et ϵ son énergie interne spécifique. Considérons les scalaires :

$$\rho + p = c^2\, r \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2\, r}\right) \quad , \quad i = \epsilon + \frac{p}{r} = \epsilon + p\, V \quad \left(\text{où } V = \frac{1}{r}\right)$$

i est l'enthalpie spécifique. A la place de i, j'ai introduit systématiquement *l'indice du fluide* $f = 1 + i/c^2$. Le tenseur d'énergie peut s'écrire :

$$T^{(f)}_{\alpha\beta} = c^2\, r\, f\, u_\alpha\, u_\beta - p\, g_{\alpha\beta}$$

b) La *température propre* Θ du fluide et son *entropie spécifique* S peuvent être définies, comme en hydrodynamique classique par la relation différentielle

$$\Theta\, dS = d\epsilon + p\, dV = di - V\, dp = c^2 df - V\, dp \qquad (\Theta > 0)$$

Ainsi :

$$c^2\ df = V\ dp + \Theta\ ds \tag{1-1}$$

En relativité, la variable thermodynamique $\tau = fV$ ("volume dynamique") joue un rôle important et se substitue souvent au volume spécifique. Nous considérons $\tau = \tau(p\,,S)$ comme une fonction donnée de p et S qui constitue l'équation d'état du fluide.

Soit Σ une hypersurface régulière, d'équation locale $\varphi = 0$; nous posons $l_a = \partial_a \varphi$. La vitesse de Σ par rapport au fluide est donnée par :

$$\frac{(v^{\Sigma})^2}{c^2} = \frac{(u^a\ l_a)^2}{(u^a\ l_a)^2 - l^a\ l_a}$$

$v^{\Sigma} < c$ est équivalent à $l^a\ l_a < 0$ (Σ orientée dans le temps). Si v est la *vitesse sonique* du fluide, on a $v^2/c^2 = 1/\gamma$ avec :

$$c^2\ \tau'_p = -\ V^2\ (\gamma - 1)$$

Nous supposons que $\tau(p\,,S)$ vérifie les *conditions de compressibilité* suivantes (extension des conditions classiques dites de Hermann Weyl)

$$(H_1) \qquad \tau'_p < 0 \qquad \tau'_S > 0$$

et

$$(H_2) \qquad \tau''_{p^2} < 0$$

$\tau'_p < 0$ est équivalent à $\gamma > 1$ ou $v < c$

2. Le système de la magnétohydrodynamique relativiste

a) Un champ électromagnétique est défini par deux tenseurs antisymétriques, dont l'un H est le tenseur champ électrique-induction magnétique. Si $^*H$ est le tenseur dual, les vecteurs spatiaux :

$$e_\beta = u^a\ H_{a\beta} \qquad b_\beta = u^a\ (^*H)_{a\beta}$$

sont respectivement le champ électrique et l'induction magnétique par rapport à la direction temporelle u et $u^\beta\ e_\beta = u^\beta\ b_\beta = 0$. Si μ (constante donnée) est la perméabilité magnétique du fluide, $b_\beta = \mu\ h_\beta$ où h est le champ magnétique. Le courant électrique est, en première approximation, la somme de deux termes :

$$J^\beta = \lambda\ u^\rho\ + \sigma\ e^b$$

où λ est la densité propre de charge électrique et σ la *conductivité* du fluide.

La magnétohydrodynamique est ici l'étude des propriétés d'un fluide parfait de conductivité infinie, $\sigma = \infty$; J et par suite σe étant essentiellement finis, ALGEBRA

French W 03

2. *Sous-groupes.*

DÉFINITION 2. — *On appelle sous-groupe d'un groupe* G, *une partie non vide* H *de* G, *telle que la structure induite sur* H *par celle de* G *soit une structure de groupe.*

PROPOSITION 1. — *Soit* H *une partie non vide d'un groupe* G ; *les propositions suivantes sont équivalentes* :

a) H *est un sous-groupe de* G.

b) H *est une partie stable de* G (autrement dit, les relations $x \in H$, $y \in H$ entraînent $xy \in H$), *et la relation* $x \in H$ *entraîne* $x^{-1} \in H$.

c) *Les relations* $x \in H$, $y \in H$, *entraînent* $xy^{-1} \in H$.

Montrons d'abord que *a*) entraîne *b*). Comme la loi de composition induite sur H par celle de G doit être partout définie, H doit être une partie stable de G. En second lieu, cette loi induite doit posséder un élément neutre u, qui satisfait à $u \cdot u = u$; on en conclut que $u = u \cdot u^{-1} = e$, donc H contient e ; si $x \in H$ est inversible *dans* H, son inverse dans H est par suite identique à son inverse x^{-1} dans G, ce qui achève de démontrer *b*).

Réciproquement, *b*) entraîne *a*) ; en effet, pour tout $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$, puis $x \cdot x^{-1} = e \in H$; la loi de composition induite sur H par celle de G est bien une loi de groupe.

Enfin, il est clair que *b*) entraîne *c*) ; réciproquement, si *c*) est vérifiée, la relation $x \in H$ entraîne $x \cdot x^{-1} = e \in H$, puis $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$; donc, les relations $x \in H$, $y \in H$ entraînent $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$, ce qui prouve que *c*) entraîne *b*).

Remarques. — 1) On prouve de même que la proposition *b*) de l'énoncé est équivalente à la proposition :

c') *Les relations* $x \in H$, $y \in H$ *entraînent* $y^{-1}x \in H$.

2) La proposition *b*) peut encore s'écrire : $H.H \subset H$ et $H^{-1} \subset H$. Pour une partie *non vide* H de G, ces relations entraînent donc que H est un sous-groupe ; par suite $e \in H$, d'où $X \subset H.X$ pour toute partie X de G, et en particulier $H \subset H.H$; d'autre part, la symétrie de G transforme l'inclusion $H^{-1} \subset H$ en $H \subset H^{-1}$. Donc, pour tout sous-groupe H de G, on a les relations

$$(1) \qquad H \cdot H = H, \qquad H^{-1} = H.$$

La proposition *c*) s'écrit de même : $H.H^{-1} \subset H$; pour une partie non vide H de G, cette relation équivaut donc aux relations (1) ; il en est de même de la relation $H^{-1}.H \subset H$.

Z

Si H est un sous-groupe de G, et K un sous-groupe de H, il est clair que K est un sous-groupe de G.

L'ensemble $\{e\}$ est un sous-groupe de G ; c'est évidemment le plus petit (il est contenu dans tous les sous-groupes de G). L'intersection H d'une famille de sous-groupes (H_ι) est un sous-groupe, car elle est non vide (on a $e \in H_\iota$ quel que soit ι), et les relations $x \in H$, $y \in H$ entraînent $xy^{-1} \in H_\iota$ pour tout ι, donc $xy^{-1} \in H$.

Il y a donc un plus petit sous-groupe de G contenant une partie donnée X de G ; on l'appelle le *sous-groupe engendré par* X, et X est appelé un *système de générateurs* de ce sous-groupe.

Exemple. — Cherchons les sous-groupes du groupe additif $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels. Si H est un tel sous-groupe, et n'est pas réduit au seul élément 0, soit $x \in H$ tel que $x \neq 0$: ou bien $x > 0$, ou bien $x < 0$, et alors $x' = -x > 0$ et $x' \in H$, donc l'ensemble des éléments > 0 de H n'est pas vide : soit a le plus petit. Par récurrence sur $m \in \mathbf{N}^*$, on voit que $ma \in H$; donc aussi $-ma \in H$ pour $m \in \mathbf{N}^*$, et comme $0 \in H$, il suit que $na \in H$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$. Si $x \in H$, on a (§ 4, n° 3) $x = qa + r$, avec $q \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant r < a$; on a $qa \in H$, donc $r = x - qa \in H$; mais, d'après la définition de a, $0 < r < a$ entraîne $r \notin H$, donc $r = 0$, $x = qa$: H est donc l'ensemble des na pour $n \in \mathbf{Z}$, autrement dit $H = a.\mathbf{Z}$. Réciproquement, $a\mathbf{Z}$ est évidemment un sous-groupe de $\mathbf{Z}$ pour $a \in \mathbf{N}^*$; si $a = 0$, $a.\mathbf{Z} = \{0\}$; si $a < 0$ et $a' = -a$, on a $a' > 0$ et $a\mathbf{Z} = a'\mathbf{Z}$; il résulte d'ailleurs de la démonstration ci-dessus que $a.\mathbf{Z}$ est le sous-groupe engendré par $\{a\}$, et que la partie stable de $\mathbf{Z}$ engendrée par $\{a\}$ est l'ensemble $a.\mathbf{N}^*$ des ma pour $m \in \mathbf{N}^*$.

Z

Comme le montre cet exemple, il faut se garder de confondre la partie stable d'un groupe G engendrée par une partie X de G avec le sous-groupe engendré par X : celui-ci contient toujours celle-là, mais en est distinct en général. La formation du sous-groupe engendré par X est précisée par la proposition suivante :

Proposition 2. — *Si* X *est une partie non vide d'un groupe* G, *le sous-groupe engendré par* X *est la partie stable* Y^∞ *engendrée par l'ensemble* $Y = X \cup X^{-1}$.

En effet, Y^∞ est l'ensemble des composés des suites dont tous les termes sont des éléments de X ou des inverses d'éléments de X : l'inverse d'un tel composé est un composé de même forme (§ 2, prop. 5), donc (prop. 1) Y^∞ est un sous-groupe de G ; réciproquement, tout sous-groupe contenant X contient évidemment Y, donc Y^∞.

PURE MATHEMATICS

French W 03

NOTE SUR LA CONDITION D'INTÉGRABILITÉ.

En raison du rôle fondamental de la condition d'intégrabilité, il n'est peut-être pas inutile de rappeler comment se présente cette condition dans la théorie des équations aux différentielles totales. Nous exposerons cette question sous une forme un peu différente de la forme habituelle, plus simple, à notre avis, en tout cas se prêtant mieux aux généralisations que nous avons en vue.

a. Considérons l'équation à deux variables indépendantes

$$dz = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy. \tag{1}$$

Si une fonction z vérifie cette équation, ses dérivées premières sont X et Y, et l'on en déduit deux expressions de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ qui doivent être égales, ce qui donne

$$\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + X\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{2}$$

Telle est la condition d'intégrabilité, évidemment *nécessaire*.

Soit maintenant à résoudre le problème de Cauchy relatif à l'équation (1), c'est-à-dire à déterminer une solution de cette équation égale à z_0 pour $x = y = 0$. Pour la calculer en un point ξ, η, nous pouvons faire varier d'abord x de 0 à ξ, puis y de 0 à η, et intégrer l'équation (1) le long du contour ainsi défini. En d'autres termes, la variation de z sera définie sur l'axe des x par la condition $\frac{\partial z}{\partial x} = X$, et sur une parallèle quelconque à l'axe des y par la condition $\frac{\partial z}{\partial y} = Y$. La fonction z ainsi définie vérifie donc une équation de la forme

$$dz = (X + u)\,dx + Y\,dy, \tag{3}$$

u étant une fonction de x et y, dont nous savons seulement qu'elle s'annule pour $y = 0$.

D'ailleurs, le problème de Cauchy posé ne pouvant admettre d'autre solution que la fonction z ainsi obtenue, il est nécessaire et suffisant, pour qu'il ait une solution, que cette fonction vérifie l'équation (1), c'est-à-dire que $u = 0$.

Il est évidemment nécessaire pour cela que la fonction z ainsi formée vérifie la condition (2). Je dis que, réciproquement, cela est suffisant.

Supposons donc cette condition vérifiée. D'autre part, z, vérifiant l'équation (3), vérifie la condition d'intégrabilité correspondante

$$\frac{\partial(X+u)}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + (X+u)\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{4}$$

La comparaison des formules (2) et (4) donne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\partial Y}{\partial z},$$

d'où

$$u(x, \eta) = u(x, 0)\, e^{\int_0^\eta \frac{\partial Y}{\partial z} dy} = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si la condition (2) est une identité en x, y, z, on a ainsi une solution, quel que soit z_0. La solution de l'équation (1) dépend d'un paramètre.

Si c'est une relation entre x, y, z, contenant effectivement z, il peut y avoir des solutions de (1), si la fonction z définie par la condition d'intégrabilité est bien solution de (1); en général, il n'y en a pas.

Si c'est une relation entre x et y, il ne peut pas y avoir de solutions.

b. Supposons maintenant que z soit fonction de x, y, et d'un paramètre α, variant par exemple de 0 à 1 et que ses dérivées X et Y, par rapport à x et y, soient données par des formules de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} X(x, y, \alpha_0) = F[z(x, y, \alpha);\, x, y, \alpha_0], \\ Y(x, y, \alpha_0) = G[z(x, y, \alpha);\, x, y, \alpha_0], \end{array}\right. \tag{5}$$

les fonctionnelles F et G dépendant des valeurs de z pour les valeurs particulières de x et y qui figurent au premier membre, mais pour toutes les valeurs de α entre 0 et 1.

Chacune de ces équations est du type (9) considéré dans le Chapitre qui précède, avec cette différence qu'elle contient une variable (x ou y) figurant comme paramètre. L'ensemble de ces équations définit la variation de z quand x et y varient, par exemple de la