Analysis
French Exam Fall 2004

Avant-propos

Les équations aux dérivées partielles (en abrégé edp) constituent la généralisation naturelle des équations différentielles au cas où l'inconnue dépend de plusieurs variables. Elles modélisent de très nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques ou économiques. Classiquement, une solution d'une edp d'ordre m est une fonction m fois continûment différentiable. Cependant, il est apparu au début du XX^{e} siècle que cette notion était trop restrictive et que si l'on voulait rendre compte, de manière satisfaisante, de certains phénomènes il convenait d'affaiblir la notion de solution afin d'y inclure des objets plus singuliers – par exemple des fonctions discontinues. C'est ainsi que dans les années 1930, sous l'impulsion notamment des mathématiciens Jean Leray et Leonid Sobolev, est apparue la notion de solution faible qui contenait en germe celle de distribution. Inspiré par ces travaux, le mathématicien Laurent Schwartz a élaboré dans les années 1945–50, une théorie générale, rigoureuse et d'utilisation aisée qu'il a baptisée « théorie des distributions ». Le lecteur intéressé par la genèse de cette découverte pourra se reporter au chapitre du livre de mémoires (*) que L. Schwartz consacre à cette question ainsi qu'à l'introduction de son livre [S] (voir bibliographie). Immédiatement après leurs publications, ses travaux ont été utilisés par de très nombreux chercheurs et les bases d'une théorie moderne des edp ont été jetées.

Le texte qui suit a pour but d'exposer en détail la théorie de L. Schwartz et de montrer comment celle-ci fournit un cadre naturel et efficace aux edp. Il constitue une version étendue d'un cours enseigné pendant plusieurs années à l'Université de Paris XI-Orsay dans le cadre de la maîtrise de Mathématique.

Les travaux en edp se comptent par milliers et dépassent, pour la plupart, le niveau auquel on se place ici. Aussi avons-nous choisi de présenter les équations les plus simples qui représentent les principales familles d'edp. Il s'agit des équations de Laplace, des ondes, de la chaleur et de Schrödinger.

Décrivons maintenant le contenu de ce volume.

Le chapitre 1 est constitué de préliminaires. On y traite de certains espaces de fonctions différentiables du point de vue de leurs propriétés

(*) *Un mathématicien aux prises avec le siècle, Odile Jacob, 1997.*

topologiques et métriques et on présente des outils utiles pour la suite : fonctions plateaux, partitions de l'unité, théorèmes de densité.

C'est au chapitre 2 qu'est introduite la notion de distribution. Celle-ci étant abstraite, nous présentons plusieurs exemples destinés à familiariser le lecteur avec cette notion.

Les chapitres 3 à 7 sont consacrés aux diverses opérations permises dans la théorie – multiplication par une fonction C^∞, dérivation, produit tensoriel, produit de convolution, image – ainsi qu'à la notion de suite convergente, ce qui nous donne l'occasion de détailler un théorème fondamental d'analyse fonctionnelle : le théorème de Banach-Steinhaus. Une attention particulière est portée aux espaces $C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\Omega))$ si utiles pour formuler rigoureusement le problème de Cauchy. Toute distribution est, en un sens approprié, indéfiniment dérivable ; un outil pour calculer les dérivées de certaines d'entre-elles est constitué par les formules de Gauss et Green dont on trouvera ici des preuves détaillées.

Vient ensuite, aux chapitres 8 et 9, l'étude des premières edp – équations de Laplace et des ondes – modèles les plus simples des équations elliptiques et hyperboliques. On y détaille les problèmes pertinents qui leurs sont associés, le problème de Dirichlet et celui de Cauchy.

Le chapitre 10 est capital. On y montre que les distributions (tempérées) fournissent un cadre idéal à la transformation de Fourier. Outre ses applications en théorie du signal (où elle sert à analyser un signal selon ses fréquences) elle permet de transformer des problèmes de nature différentielle en des problèmes algébriques ; son utilisation dans des théorie récentes – analyse microlocale par exemple – a permis de considérables progrès.

Le chapitre 11 présente une étude systématique des espaces de Sobolev construits sur L^2. Ces espaces qui permettent de mesurer très finement la régularité des distributions constituent également une chaîne continue entre les distributions à support compact et les fonctions C^∞ permettant ainsi de faire le lien entre les notions de solutions faibles et classiques.

Une autre équation, célèbre pour son utilisation en mécanique quantique – l'équation de Schrödinger – est présentée au chapitre 12.

Le chapitre suivant revient sur le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace (sur un ouvert borné) et s'attarde sur sa théorie spectrale ; celle-ci peut être vue comme une généralisation aux ouverts de $\mathbb{R}^n$ de la théorie des séries de Fourier sur $]0, 2\pi[$. On montre comment elle permet de résoudre le problème mixte (Cauchy-Dirichlet) pour les équations des ondes et de la chaleur. L'étude du spectre du Laplacien et de son asymptotique est une question fondamentale, en particulier pour les applications à la géométrie. L'expression du premier terme du développement asymptotique est un résultat célèbre du mathématicien Herman Weyl ; on en trouvera ici une preuve détaillée.

Enfin, comme il n'y a pas de véritable assimilation sans exercices, on présente, au chapitre 14, un choix de quatorze (longs) problèmes avec leurs solutions détaillées.

Pour terminer je voudrais citer ceux qui, à des degrés divers ont exercé une influence sur ce texte. En premier lieu je voudrais rendre hommage à l'un des grands maîtres de la théorie, le mathématicien Lars Hörmander dont l'influence sur les edp modernes est immense. Le lecteur averti reconnaîtra sans mal, dans les lignes qui suivent, l'influence de son enseignement. Qu'il en soit remercié. J'ai eu ensuite des discussions avec mes collègues Johannes Sjöstrand et Patrick Gérard (pour le chapitre 13) et je les remercie. Enfin ce texte a bénéficié des remarques des promotions successives d'étudiants à qui ce cours à été dispensé.

La réalisation technique de ce volume est l'œuvre de Mme Antoinette Bardot qui s'est acquittée de sa tâche avec beaucoup de patience, de gentillesse et de compétence. Je lui en suis reconnaissant.

Claude Zuily

Orsay, juin 2002

French Exam Fall 2004
Algebra

(4)

CHAPITRE I

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS ESSENTIELS

Ce cours est consacré à l'exposé de travaux récents de Rosenlicht et de Lang. Commençons par résumer ceux de Rosenlicht :

1. Jacobiennes généralisées

Soit X une courbe algébrique projective, irréductible, et non singulière; soit $f: X \to G$ une application rationnelle de X dans un groupe algébrique commutatif G. L'ensemble S des points de X où f n'est pas régulière est un ensemble fini. Si D est un diviseur étranger à S (c'est-à-dire de la forme $D = \sum n_i P_i$, avec $P_i \notin S$) on peut définir $f(D) = \sum n_i f(P_i)$ qui est un élément de G.

Lorsque G est une *variété abélienne*, on a $S = \emptyset$ et l'on sait que $f(D) = 0$ si D est égal au diviseur (φ) d'une fonction rationnelle φ sur X; dans ce cas, $f(D)$ ne dépend que de la *classe* de D, au sens de l'équivalence linéaire.

Dans le cas général, on est conduit à modifier la notion de classe (de même qu'en arithmétique, pour étudier les extensions ramifiées) de la façon suivante :

On appelle *module* de support S la donnée, pour tout point $P_i \in S$, d'un entier $n_i > 0$; si $\mathfrak{m}$ est un module de support S, et si φ est une fonction rationnelle, on dit que φ est « congrue à 1 mod. $\mathfrak{m}$ », et on écrit $\varphi \equiv 1 \bmod. \mathfrak{m}$, si $v_i(1 - \varphi) \geqslant n_i$ pour tout i, v_i désignant la valuation attachée au point P_i. Puisque les n_i sont > 0, une telle fonction est régulière aux points P_i et y prend la valeur 1; son diviseur (φ) est donc étranger à S.

THÉORÈME 1. *Pour toute application rationnelle* $f: X \to G$, *régulière en dehors de* S, *il existe un module* $\mathfrak{m}$ *de support* S *tel que l'on ait* $f(D) = 0$ *pour tout diviseur* $D = (\varphi)$, *avec* $\varphi \equiv 1 \bmod. \mathfrak{m}$.
(Pour la démonstration, voir chap. III, § 2.)

Inversement, si on se donne un module $\mathfrak{m}$, on peut reconstruire, sinon le groupe G, du moins un groupe « universel » pour les groupes G :

THÉORÈME 2. *Pour tout module* $\mathfrak{m}$, *il existe un groupe algébrique commutatif* $J_\mathfrak{m}$ *et une application rationnelle* $f_\mathfrak{m} : X \to J_\mathfrak{m}$ *tels que la propriété suivante soit vérifiée :*

Pour toute application rationnelle $f : X \to G$ *vérifiant vis-à-vis de* $\mathfrak{m}$ *la propriété du théorème* 1, *il existe un homomorphisme (affine) rationnel unique* $\theta : J_\mathfrak{m} \to G$ *tel que* $f = \theta \circ f_\mathfrak{m}$.
(Pour la démonstration, voir chap. V, nº 9.)

On peut préciser la structure de $J_\mathfrak{m}$, exactement comme pour la jacobienne usuelle (que l'on retrouve si $\mathfrak{m} = 0$). Pour cela, soit $C_\mathfrak{m}$ le groupe des classes de diviseurs étrangers à S modulo ceux qui s'écrivent $D = (\varphi)$, avec $\varphi \equiv 1 \bmod. \mathfrak{m}$, et soit $C^0_\mathfrak{m}$ le sous-groupe de $C_\mathfrak{m}$ formé des classes de degré 0. Si l'on désigne par C^0 le groupe des classes (au sens usuel) de diviseurs de degré 0, on a un homomorphisme surjectif $C^0_\mathfrak{m} \to C^0$. Le noyau $L_\mathfrak{m}$ de cet homomorphisme est formé des classes, dans $C_\mathfrak{m}$, des diviseurs de la forme (φ), avec φ inversible en tout point $P_i \in S$. Or, pour chaque $P_i \in S$, les éléments inversibles modulo ceux congrus à 1 mod. $\mathfrak{m}$ forment un groupe algébrique commutatif $R_{\mathfrak{m},i}$ de dimension n_i; soit $R_\mathfrak{m}$ le produit de ces groupes. D'après le théorème d'approximation pour les valuations, on peut trouver une fonction correspondant à des éléments $r_i \in R_{\mathfrak{m},i}$ donnés arbitrairement. On en déduit que $L_\mathfrak{m}$ s'identifie au groupe quotient $R_\mathfrak{m}/G_m$, en désignant par G_m le groupe multiplicatif des constantes, plongé de façon naturelle dans $R_\mathfrak{m}$. Si l'on pose $J = C^0$, on a donc finalement une suite exacte :

$$0 \to R_\mathfrak{m}/G_m \to C^0_\mathfrak{m} \to J \to 0.$$

On observera que J a une structure naturelle de *groupe algébrique* puisque c'est la jacobienne de X; il en est de même de $R_\mathfrak{m}/G_m$, on vient de le voir. Ceci s'étend à $C^0_\mathfrak{m}$:

THÉORÈME 3. *L'application* $f_\mathfrak{m} : X \to J_\mathfrak{m}$ *définit, par extension aux classes de diviseurs, une bijection de* $C^0_\mathfrak{m}$ *sur* $J_\mathfrak{m}$. *Si l'on identifie* $C^0_\mathfrak{m}$ *et* $J_\mathfrak{m}$ *au moyen de cette bijection, le groupe* $J_\mathfrak{m}$ *devient une extension (au sens des groupes algébriques) du groupe* J *par le groupe* $R_\mathfrak{m}/G_m$.
(Pour la démonstration, voir chap. V, § 3.)

Les groupes $J_\mathfrak{m}$ sont les *jacobiennes généralisées* de la courbe X.

2. Revêtements abéliens

Soit G un groupe algébrique commutatif, connexe, et soit $\theta : G' \to G$ une *isogénie* (le groupe G' étant aussi supposé connexe); rappelons que cela signifie que θ est un homomorphisme (au sens des groupes algébriques) surjectif et à noyau fini. Supposons en outre que l'extension de corps correspondant à θ soit séparable, auquel cas nous dirons que θ est *séparable*. Si $\mathfrak{g}$ désigne le noyau de θ, le groupe G s'identifie au quotient $G'/\mathfrak{g}$, et G' est un revêtement non ramifié de G, ayant comme groupe de Galois le groupe abélien $\mathfrak{g}$.

Soit maintenant U une variété algébrique, et soit $f : U \to G$ une application régulière. On définit l'*image réciproque* $U' = f^{-1}(G')$ de G' par f comme la sous-variété de $U \times G'$ formée des couples (x, g') tels que $f(x) = \theta(g')$. La projection $U' \to U$ fait de U' un revêtement (non ramifié) de U, de groupe de Galois le groupe $\mathfrak{g}$.

(6)

Plus généralement, soit $f : X \to G$ une application rationnelle d'une variété irréductible X dans le groupe G, et soit $X' \to X$ un revêtement de X de groupe de Galois $\mathfrak{g}$. S'il existe un ouvert non vide U de X sur lequel f soit régulière, et si le revêtement U' induit par X' sur U est isomorphe à $f^{-1}(G')$, nous dirons encore que X' est *image réciproque* de l'isogénie $G' \to G$ par l'application f (cela revient à dire que la notion d'image réciproque a un caractère birationnel).

Avec cette convention, on a :

Théorème 4. *Tout revêtement abélien d'une variété algébrique irréductible est image réciproque d'une isogénie convenable.*

Indiquons rapidement le principe de la démonstration (pour plus de détails, voir Chap. VI, § 2), en nous bornant au cas d'un revêtement irréductible $X' \to X$. On peut évidemment supposer que $\mathfrak{g}$ est un groupe cyclique d'ordre n, avec, soit n premier à la caractéristique p, soit $n = p^m$.

i) *On a* $\mathfrak{g}$ *cyclique d'ordre n, avec* $(n, p) = 1$.

Soit G_m le groupe multiplicatif, et soit $\theta_n : G_m \to G_m$ l'isogénie donnée par $\lambda \to \lambda^n$. Si l'on fait correspondre un générateur σ de $\mathfrak{g}$ à une racine primitive n-ème de l'unité, soit ε, on voit que le noyau de θ_n s'identifie à $\mathfrak{g}$. Montrons que tout revêtement abélien de groupe de Galois $\mathfrak{g}$ est image réciproque de θ_n :

Soit L/K l'extension de corps correspondant au revêtement $X' \to X$ donné. Puisque la norme de ε dans L/K est 1, le classique « théorème 90 » de Hilbert montre l'existence de $g \in L^*$ tel que $g^\sigma = \varepsilon . g$, et l'on a $L = K(g)$ (l'élément g est un générateur « de Kummer »). On a $f = g^n \in K$. L'application $g : X' \to G_m$ commute aux opérations de $\mathfrak{g}$, et définit par passage au quotient l'application $f : X \to G_m$. Ceci montre bien que $X' = f^{-1}(G_m)$.

ii) *On a* $\mathfrak{g}$ *cyclique d'ordre* p^m.

Supposons d'abord $m = 1$. Soit G_a le groupe additif, et soit $\wp : G_a \to G_a$ l'isogénie donnée par $\wp(\lambda) = \lambda^p - \lambda$. Le noyau de $\wp$ est le groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ des entiers mod. p; si l'on choisit un générateur σ de $\mathfrak{g}$, il s'identifie donc à $\mathfrak{g}$. Nous allons voir que tout revêtement abélien de groupe de Galois $\mathfrak{g}$ est image réciproque de $\wp$:

Soit, comme précédemment, L/K l'extension correspondant au revêtement. Puisque la trace de 1 dans L/K est 0, l'analogue additif du « théorème 90 » montre l'existence de $g \in L$ tel que $g^\sigma = g + 1$ (l'élément g est un générateur « d'Artin-Schreier ») et l'on a $f = \wp(g) = g^p - g \in K$. Comme ci-dessus, cela signifie que le revêtement donné est image réciproque de $\wp$ par g.

Lorsque $m > 1$, on remplace G_a par le groupe W_m des *vecteurs de Witt* de longueur m, cf. Witt [99].

En combinant le théorème 4 avec les théorèmes 1 et 2, on obtient :

Corollaire. *Soit* $X' \to X$ *un revêtement abélien d'une courbe algébrique* X. *Il existe alors une isogénie séparable* $\theta : G' \to J_m$, *où* J_m *est une jacobienne généralisée de* X, *telle que* X' *soit isomorphe à* $f_m^{-1}(G')$.

7

French Exam
Fall 2004
Geometry

CHAPITRE I

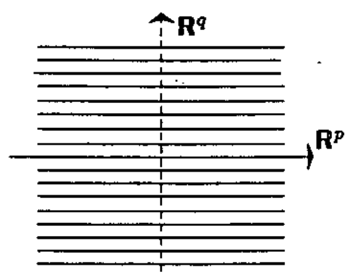
Variétés feuilletées : définitions, exemples

1. Feuilletages

L'étude des propriétés globales des systèmes de PFAFF intégrables a été abordée presque simultanément par C. EHRESMANN et G. REEB dans un cadre géométrique [1] et par C. CHEVALLEY dans le cadre plus analytique des théorèmes de Lie [2]. C'est G. REEB qui en 1947 introduisit la notion générale de variété feuilletée ainsi que la terminologie encore en usage aujourd'hui [3].

1.1. — Soit $\mathbf{R}^p_m$ le produit $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ avec $p+q=m$, où l'on munit l'espace $\mathbf{R}^q$ de la topologie discrète : $\mathbf{R}^p_m$ est une variété analytique de dimension p et l'identification de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ avec $\mathbf{R}^m$ est une immersion bijective de $\mathbf{R}^p_m$ sur $\mathbf{R}^m$.

Pour $0 \leq r \leq \infty$ ou encore $r = \omega$, on désigne par $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p_m)$ le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de classe C^r (analytiques pour $r = \omega$) de $\mathbf{R}^m$ qui sont également des difféomorphismes locaux de $\mathbf{R}^p_m$: un élément de ce pseudogroupe est un difféomorphisme h de classe C^r d'un ouvert U de $\mathbf{R}^m$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^m$ qui, au voisinage de chaque point de U, est de la forme $X = f(x,y)$, $Y = g(y)$ (on remarquera que si toutes les traces sur U des plans parallèles à $\mathbf{R}^p$ sont connexes, alors h possède une telle écriture globale sur U).



Lorsque p est égal à 0 ou à m, $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p_m)$ coïncide avec le pseudogroupe de tous les difféomorphismes locaux de classe C^r de $\mathbf{R}^m$.

1.2 Définition. — *Une* structure de variété feuilletée *de classe C^r, de dimension p et de codimension q sur un espace M est un atlas maximal $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ de M pour le pseudogroupe* $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p_m)$, $m = p + q$.

Par exemple, à une structure de variété différentiable de classe C^r et de dimension m sur un espace M correspondent deux structures de variétés feuilletées de classe C^r sur M, l'une de dimension 0 et de codimension m, Les sources des cartes de $\mathcal{F}$ ayant pour image un polytope de $\mathbf{R}^m$ forment une base de la topologie de M. On les appelle les *ouverts distingués* pour $\mathcal{F}$. Leurs composantes connexes pour la topologie fine de M associée à $\mathcal{F}$ forment aussi une base pour cette topologie fine et sont appelées les *plaques* de $\mathcal{F}$.

1.4 Définition. — *Une* feuille *de la structure de variétée feuilletée $\mathcal{F}$ sur M est une composante connexe de M pour la topologie fine associée à $\mathcal{F}$.*

Dans le cas des feuilletages triviaux d'une variété M, les feuilles sont respectivement les points de M et ses composantes connexes.

Les feuilles d'une structure de variété feuilletée $\mathcal{F}$ sur M définissent une partition de la variété M en sous-variétés connexes de classe C^r et de dimension p. On note $M/\mathcal{F}$ *l'espace des feuilles* correspondant.

Le *saturé* d'un sous-espace A de M pour $\mathcal{F}$ est la réunion de toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ rencontrant A. On dit aussi que A est saturé pour $\mathcal{F}$ si cette réunion est A lui-même.

1.5 Proposition. — *La relation d'équivalence associée à une structure de variété feuilletée est ouverte.*

Soit en effet $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M par des ouverts distingués pour $\mathcal{F}$ et soit ρ_i la relation d'équivalence sur M identifiant les points d'une même plaque de $\mathcal{F}$ dans U_i. Chacune de ces relations est ouverte et la relation d'équivalence associée à $\mathcal{F}$ est engendrée par la réunion des ρ_i.

Par contre, cette relation d'équivalence n'est pas en général fermée. Elle l'est cependant lorsque par exemple toute feuille de $\mathcal{F}$ est fermée et possède un système fondamental de voisinages ouverts saturés pour $\mathcal{F}$.

1.6 Corollaire. — *Si un sous-espace de M est saturé pour $\mathcal{F}$ il en est de même de son complémentaire, de son adhérence, de son intérieur et de sa frontière.*

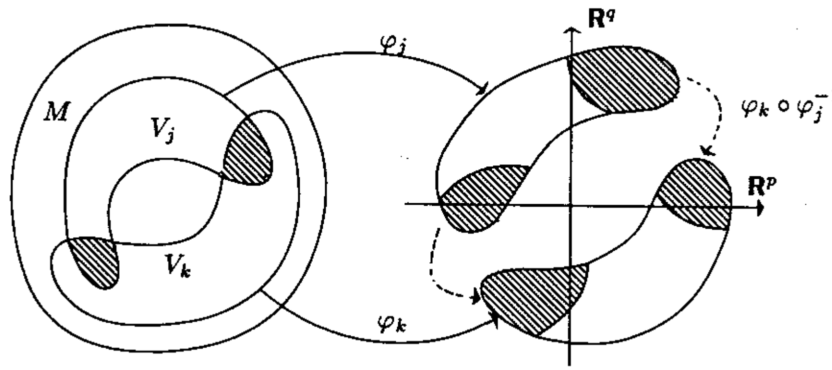
En particulier l'adhérence d'une feuille F de $\mathcal{F}$ est un fermé connexe saturé pour $\mathcal{F}$. On dit alors d'une feuille de $\mathcal{F}$ contenue dans $\overline{F}$ qu'elle est *adhérente* à F.

1.7 Définition. — *Une feuille F d'une structure feuilletée $\mathcal{F}$ sur un espace M est* propre (*resp.* localement dense) *si sa topologie fine coïncide avec celle induite par M (resp. s'il existe un ouvert U de M dans lequel elle est dense).*

Par exemple, une feuille compacte est propre.

l'autre de dimension m et de codimension 0 : ce sont les ***structures feuilletées triviales*** de la variété M.

En général, on détermine une structure de variété feuilletée sur un espace M par un atlas de M pour le pseudogroupe $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p_m)$, $m = p + q$, c'est-à-dire par la donnée d'une famille (φ_j) de bijections de parties V_j de M sur des ouverts de $\mathbf{R}^m$ de façon que les V_j recouvrent M et que les changements de cartes $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(V_j \cap V_k) \to \varphi_k(V_j \cap V_k)$ soient dans ce pseudogroupe. On complète alors cet atlas en lui adjoignant toutes les cartes de M compatibles avec lui relativement à ce pseudogroupe.



Une telle procédure permet de restreindre la classe de différentiabilité d'une structure de variété feuilletée, c'est-à-dire de considérer une telle structure de classe C^r comme une de classe C^s pour tout $s \leq r$.

1.3. — Une structure de variété feuilletée $\mathcal{F}$ comme dans la définition précédente détermine sur l'espace M une structure de variété différentiable de classe C^r et de dimension m. Lorsque cette structure de variété coïncide avec celle obtenue par restriction de la classe de différentiabilité d'une structure de variété différentiable de classe C^s, $s \geq r$, donnée sur M, on dit aussi que $\mathcal{F}$ est un *feuilletage* de classe C^r et de dimension p (ou de codimension q) de la variété M.

Cette structure de variété feuilletée $\mathcal{F}$ détermine également sur M une structure de variété différentiable de classe C^r et de dimension p. La topologie correspondant à cette dernière structure est alors appelée la *topologie fine* de M associée à $\mathcal{F}$: elle est en effet plus fine que la topologie "initiale" de M correspondant à sa structure de variété de dimension m (que l'on considère dans la suite comme la structure de base sur M).