French Exam Winter 2004
Teaching of MATH.

quatre couleurs au moyen de l'ordinateur peut être correcte, elle n'est pas "belle." Ensuite, une menace sur l'avenir du métier de mathématicien, concurrencé par l'appel des métiers de l'informatique, et par conséquent une menace sur l'héritage mathématique.

Au niveau de l'enseignement, on peut aussi énumérer les vues pessimistes:

- les élèves vont devenir paresseux
- ils ne vont plus savoir calculer à la main
- ils ne s'intéresseront plus qu'à l'informatique
- les enseignants ne pourront jamais s'adapter aux nouveaux outils
- ceux qui s'adapteront deviendront informaticiens
- si en plus on touche au contenu de l'enseignement, on court au même désastre qu'avec les "mathématiques modernes."

Ces dangers existent. Mais il faut également apprécier les chances nouvelles. Il y a de belles mathématiques à faire pour dominer l'usage des ordinateurs, et on peut attendre, dans l'avenir, un stimulant venant de l'informatique aussi important que le stimulant—classique—venant de la physique; aujourd'hui déjà, les "mathématiques discrètes" se trouvent ainsi stimulées et valorisées. D'autre part—et c'est là une raison essentielle d'être optimiste—les ordinateurs et même les calculettes ressuscitent de très belles mathématiques qui étaient oubliées ou négligées. J'illustrerai cela par quelques exemples tout à l'heure. Cette possibilité de réanimer des sujets dormants—parfois pendant des siècles—est un trait particulier des mathématiques dans l'ensemble des sciences, et c'est ce qui en fait un héritage extrêmement précieux. C'est une justification, pour le présent et pour l'avenir, d'une formation en grand nombre de jeunes mathématiciens.

On peut déjà dire qu'en face des ordinateurs, les élèves sont souvent actifs, intéressés et agiles—ils acquièrent l'usage des outils plus vite que leurs professeurs. Ils adoptent facilement l'attitude expérimentale. Mails ils ne peuvent pas découvrir seuls les bonnes voies où s'engager. L'expérience mathématique des enseignants est irremplaçable. Face à l'ordinateur, l'enseignant devient un conseiller. Plus encore que par le passé, l'essentiel est sa qualification comme mathématicien.

Après ces vues très générales, je vais évoquer des choses très anciennes sur lesquelles l'informatique, les ordinateurs et les calculettes font porter un regard neuf: les nombres, les figures, les symboles, les algorithmes.

START

Les nombres. Avec les cailloux (l'origine du "calcul") on a une conception claire de nombres entiers petits. Pour les nombres entiers plus grands, la vision qu'on en a dépend du mode de notation. Chez les Grecs de l'Antiquité, le système usuel permettait d'écrire 3 ou 700 avec une seule lettre, mais ne permettait pas d'écrire 2.100 (d'où la question de Socrate au savant Hippias: "toi qui es si savant, si on te demandait combien fait 3 fois 700, tu saurais répondre avec célérité et exactitude?"). Aujourd'hui, ne fût-ce que par la radio et la télévision, tous les enfants sont familiarisés avec des nombres entiers très grands; à chaque élection par exemple, on voit défiler des grands nombres, et des rapports exprimés en pourcentages. On change constamment d'échelle—le budget de la famille, le budget de la cité, les dépenses militaires dans le monde; l'âge de l'humanité, de la terre, de l'univers; les dimensions de l'atome, du système solaire, etc. Ce qui permet d'appréhender ces nombres et ces changements d'échelle, c'est l'écriture décimale et les puissances de 10. Ce qu'affiche une calculette, c'est justement une écriture décimale, et éventuellement (en virgule flottante) une puissance de 10.

L'enfant qui dispose d'une calculette se trouve immédiatement devant de grands nombres entiers, et aussi devant des développements décimaux assez longs. Des développements décimaux assez longs permettent d'imaginer naturellement des développements décimaux illimités. Ainsi la définition d'un nombre réel par un développement décimal illimité—esquissée par Simon Stevin il y a tout juste quatre siècles [**B**]—mérite d'être bien connue des enseignants. En France, un livre vient de paraître, sur les fondements de la géométrie, dont le premier chapitre est la théorie des réels à partir des développements décimaux illimités; c'est une présentation simple et complète, à l'intention des enseignants du secondaire, qui me paraît venir à son heure [**F**].

Cela ne supprime pas, mais au contraire valorise, la représentation du nombre réel positif comme rapport de deux longueurs. L'algorithme d'Euclide pour trouver une partie aliquote commune à deux longueurs, nous allons le retrouver comme algorithme des fractions continues.

★ ★ ★

La calculette ne se contente pas d'écrire. Elle permet de *traiter les données numériques*, elle calcule. La facilité du calcul doit permettre aux élèves, en arithmétique élémentaire comme en géographie, de traiter des données réelles, et beaucoup de suggestions intéressantes sont faites à ce sujet dans des ouvrages d'enseignement récents. Je ne m'y étend pas, quoiqu'il s'agisse d'une chose essentielle dans les écoles primaires. Ce traitement des données réelles oblige à réfléchir pour savoir quelles opérations faire, et par contre rend superflus les algorithmes d'opérations posées sur papier.

Ainsi l'addition, la multiplication, la soustraction, la division cessent d'être des opérations qu'on pose, pour devenir des opérations qu'on ordonne à la machine de faire. Il n'y a sans doute plus lieu, au début de l'enseignement élémentaire, d'insister sur les modes opératoires et les refrains traditionnels ("je pose, je retiens,...."). Par contre le *calcul mental*, et particulièrement le calcul des ordres de grandeurs, doivent permettre de deviner et de contrôler les résultats donnés par la machine. *Les modes opératoires traditionnels* ne disparaissent pas pour autant; mais ils prennent leur importance bien plus tard, quand on peut faire découvrir aux enfants les opérations en "multiprécision," c'est-à-dire quand on opère en base 10^n en utilisant la calculette comme table de multiplication.

STOP ⊢

★ ★ ★

La calculette fait instantanément les divisions. Plus précisément, elle donne immédiatement une écriture décimale à n chiffres (disons $n = 10$) en guise de quotient. Elle fait donc passer d'une fraction, disons 14/31, à un développement

ALGEBRA

COROLLAIRE 1. — *Soit* A *un anneau local séparé et complet, dont le corps résiduel est une extension algébrique de* **Q**. *Il existe alors un unique corps de représentants de* A.

En effet l'anneau A est de caractéristique 0 (nº 1).

COROLLAIRE 2. — *Soit* A *un anneau local séparé et complet de caractéristique* $p \neq 0$. *Supposons que le corps résiduel* κ_A *soit parfait. Alors il existe un unique corps de représentants de* A, *à savoir l'ensemble des représentants multiplicatifs.*

Le cor. 2 résulte aussitôt du th. 1 et de la prop. 7 du § 2, nº 4.

THÉORÈME 2. — *Soit* A *un anneau local noethérien complet de dimension* d *contenant un corps. Soit* K *un corps de représentants de* A, *et soit* m *la dimension de l'espace vectoriel* $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ *sur le corps* K.

a) Il existe un idéal $\mathfrak{a}$ *de* $K[[T_1, ..., T_m]]$ *tel que la* K*-algèbre* A *soit isomorphe à* $K[[T_1, ..., T_m]]/\mathfrak{a}$.

*b) Il existe une sous-*K*-algèbre* A′ *de* A, *isomorphe à* $K[[T_1, ..., T_d]]$ *et telle que* A *soit une algèbre finie sur* A′.

c) Supposons que l'anneau local noethérien A *soit régulier,* i.e. $d = m$. *Alors il existe un* K*-isomorphisme de* A *sur* $K[[T_1, ..., T_d]]$.

Soient $t_1, ..., t_m$ des éléments de $\mathfrak{m}_A$ dont les classes modulo $\mathfrak{m}_A^2$ engendrent le K-espace vectoriel $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$. D'après le lemme 3 du § 2, nº 5, il existe un K-homomorphisme surjectif de $K[[T_1, ..., T_m]]$ dans A, transformant T_i en t_i pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Ceci prouve *a*).

De même, l'assertion *b*) résulte du lemme 4 de *loc. cit.* et de l'existence d'une suite sécante maximale pour A (VIII, § 3, nº 2, th. 1).

Enfin, l'assertion *c*) n'est autre que le cor. 3 du th. 1 de VIII, § 5, nº 2.

START

§ 4. FERMETURE INTÉGRALE D'UN ANNEAU LOCAL COMPLET

1. Anneaux japonais

DÉFINITION 1. — *Soit* A *un anneau noethérien intègre. On dit que* A *est japonais si la fermeture intégrale de* A *dans toute extension finie de son corps des fractions est une* A*-algèbre finie.*

Remarques. — 1) Il revient au même de dire que A satisfait à la condition suivante : toute A-algèbre intègre B entière sur A, contenue dans une extension de type fini du corps des fractions K de A, est une A-algèbre finie. En effet, le corps des fractions L de B est une extension algébrique de K, donc est de degré fini sur K (A, V, p. 112, cor. 1 de la prop. 17). La A-algèbre B est contenue dans la fermeture intégrale de A dans L, et est donc finie si cette dernière est finie.

2) Soient A un anneau noethérien intègre japonais et S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0. L'anneau de fractions $S^{-1}A$ est japonais. Soient en effet L une extension finie du corps des fractions de A et B la fermeture intégrale de A dans L ; alors la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans L est $S^{-1}B$ (V, § 1, nº 5, prop. 16), donc est une $S^{-1}A$-algèbre finie.

Exemple. — Toute algèbre intègre de type fini sur un corps est un anneau japonais (V, § 3, nº 2, th. 2).

PROPOSITION 1. — *Soient* A *un anneau noethérien intègre,* K *son corps des fractions. Supposons que pour toute extension finie* radicielle L *de* K, *la fermeture intégrale de* A *dans* L *soit une* A*-algèbre finie. Alors l'anneau* A *est japonais.*

Soit E une extension finie de K. Soient N une extension finie quasi-galoisienne de K contenant E (A, V, p. 54, cor. 1), et L le corps des invariants du groupe des K-automorphismes de N. Alors (A, V, p. 73, prop. 13), L est une extension radicielle de K et N est une extension séparable de L. La fermeture intégrale B de A dans L est donc par hypothèse une A-algèbre finie ; la fermeture intégrale C de B dans N est une B-algèbre finie (V, § 1, nº 6, cor. 1 à la prop. 18), donc une A-algèbre finie. La fermeture intégrale de A dans E est contenue dans C, donc est une A-algèbre finie puisque A est noethérien.

COROLLAIRE. — *Supposons le corps* K *parfait* (*par exemple de caractéristique* 0). *Alors* A *est japonais si et seulement si sa clôture intégrale est une* A*-algèbre finie.*

PROPOSITION 2. — *Soient* B *un anneau noethérien intègre et* A *un sous-anneau noethérien de* B, *tel que* B *soit une* A*-algèbre finie. Pour que* A *soit japonais, il faut et il suffit que* B *soit japonais.*

Notons K (resp. L) le corps des fractions de A (resp. B). Supposons d'abord A japonais, et soit M une extension finie de L. Notons C la fermeture intégrale de B dans M. D'après V, § 1, nº 1, prop. 6, C est la fermeture intégrale de A dans M, donc est une A-algèbre finie puisque M est une extension finie de K et que A est japonais. *A fortiori*, C est une B-algèbre finie. Ceci prouve que B est japonais.

Inversement, supposons B japonais et soit N une extension finie de K. Notons D la fermeture intégrale de A dans N. Soit E une extension de K composée de L et N ; comme B est japonais, la fermeture intégrale D′ de B dans E est une B-algèbre finie, donc une A-algèbre finie ; le A-module D qui est un sous-module de D′ est donc de type fini, ce qui entraîne que A est japonais.

Stop

2. Théorème de Nagata

THÉORÈME 1 (Tate). — *Soient* A *un anneau noethérien intégralement clos,* a *un élément de* A. *On suppose que l'idéal* aA *est premier, que l'anneau* A/aA *est japonais et que* A *est complet pour la topologie* aA*-adique. Alors l'anneau* A *est japonais.*

START

Complex Analysis

1. Histoire de la démonstration (cf. [dB 1], [dB 2])

En janvier 1984, de Branges ramena la démonstration de la conjecture de Bieberbach pour le n-ième coefficient à vérifier que certains polynômes, entièrement explicites, sont positifs sur $[0,1]$. Gautschi fit cette vérification pour $n \leq 25$ par ordinateur et se rendit compte un peu plus tard qu'en fait Askey et Gasper avaient démontré la positivité des polynômes en question dans un article paru en 1976, ce qui achevait la démonstration.

Celle-ci, assez longue, s'appuyait fortement sur les techniques introduites par de Branges dans son livre "Square summable power series" et demandait à être éclaircie. Un séminaire organisé au printemps 1984 à l'Institut Steklov de Léningrad, auquel de Branges fut convié à exposer ses résultats, permit grâce notamment aux participations d'Emel'anov, de Milin et de Kuz'mina, de confirmer et d'abréger la preuve. Un manuscrit rendant compte de ces travaux fut diffusé, puis publié par l'Institut Steklov sous la signature de de Branges. Son étude permit en août 1984 à Fitzgerald et Pommerenke ([F;P]) d'obtenir de nouvelles simplifications et de traiter les cas d'égalité laissés en suspens (résultats obtenus indépendamment par Emel'anov) : c'est leur présentation que nous adoptons ici.

2. Rappels sur les résultats de Bieberbach

THÉORÈME 1 (Bieberbach, [Bi]).- *Soit* $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction univalente sur* D *. On a* $|a_2| \leq 2|a_1|$.

On se ramène par translation au cas où $a_0 = 0$. La fonction $f(z^2)$ possède alors pour seul zéro un zéro double à l'origine. Elle admet donc une racine carrée holomorphe h sur D ; celle-ci est impaire, univalente, et s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$ avec $c_1^2 = a_1$ et $2c_1c_3 = a_2$. On conclut grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 2.- *Soit* $h : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$ *une fonction univalente impaire sur* D *. On a* $|c_3| \leq |c_1|$.

Il suffit d'appliquer le théorème qui suit à la fonction $g : z \longmapsto c_1 h(z^{-1})^{-1}$, dont le développement de Laurent au voisinage de l'infini s'écrit $z - \frac{c_3}{c_1} z^{-1} + \dots$.

THÉORÈME 3 (dit "de l'aire").- *Soit* $g : z \longmapsto z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ *une fonction univalente sur* $\mathbb{C} - \bar{D}$ *. L'aire de* $\mathbb{C} - g(\mathbb{C} - \bar{D})$ *est* $\pi(1 - \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2)$ *. On a en particulier* $|b_1| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

Notons C_r le cercle de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique. Pour $r > 1$, l'aire du domaine de Jordan borné de frontière $g(C_r)$ est

$$\frac{1}{2i}\int_{g(C_r)} \bar{z}dz = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \overline{g(z)}\; g'(z)dz = \pi(r^2 - \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}) \ .$$

On conclut en faisant tendre r vers 1 .

Remarque 1.- Il résulte aussitôt des démonstrations ci-dessus que les seules fonctions $f \in \mathcal{S}$ telles que $|a_2(f)| = 2$ sont celles de la forme :

$K_\vartheta : z \longmapsto \dfrac{z}{(1-e^{i\vartheta}z)^2}$ (avec $\vartheta \in \mathbb{R}$).

rop

Signalons quelques conséquences remarquables du théorème 1 :

THÉORÈME 4 (dit "du quart").- *Soit* $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction univalente sur* D . *Le rayon* r *de la plus grande boule ouverte centrée en* a_0 *contenue dans* $f(D)$ *vérifie* $\dfrac{|a_1|}{4} \le r \le |a_1|$.

On se ramène par translation et homothétie au cas où $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. L'application $g : z \longmapsto f^{-1}(rz)$ envoie 0 sur 0 et D dans D ; on a donc d'après le lemme de Schwarz $r = |g'(0)| \le 1$. Soit w un élément de $\mathbb{C} - f(D)$. L'application $z \longmapsto \dfrac{w^2}{w - f(z)}$ est univalente sur D et son développement de Taylor en 0 s'écrit $w + z + (\frac{1}{w} + a_2)z^2 + \dots$. D'après le théorème 1, on a $|\frac{1}{w} + a_2| \le 2$, d'où $|\frac{1}{w}| \le 2 + |a_2| \le 4$ et $|w| \ge \frac{1}{4}$. L'inégalité $\frac{1}{4} \le r$ en résulte.

THÉORÈME 5.-*Pour toute fonction* $f \in \mathcal{S}$ *et tout* $z \in D$, *on a* $|f(z)| \le \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$

Soit w un élément de D . Posons $r = |w|$. L'application $g : z \longmapsto f\left(\dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}\right)$ est univalente sur D . On a $g'(z) = \dfrac{1-r^2}{(1+\bar{w}z)^2} f'\left(\dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}\right)$, d'où $g'(0) = (1-r^2) f'(w)$ et $g''(0) = -2\bar{w}(1-r^2)f'(w) + (1-r^2)^2 f''(w)$. D'après le théorème 1, on a $|g''(0)| \le 4\ |g'(0)|$, d'où

(1) $$\left|\frac{f''(w)}{f'(w)} - \frac{2\bar{w}}{1-r^2}\right| \le \frac{4}{1-r^2}$$

(2) $$\left|\frac{f''(w)}{f'(w)}\right| \le \frac{4+2r}{1-r^2}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à $\log f'$ (avec la détermination du logarithme pour laquelle $\log f'(0) = 0$), on en déduit

(3) $$|\log f'(w)| \le \log \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

(4) $$|f'(w)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

et on conclut en appliquant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis.

Remarque 2.- En fait on a mieux (Grunsky, 1932, [Gr]) : pour tout $z \in D$, l'ensemble $\{\log\left(\dfrac{f(z)}{z}\right) \mid f \in \mathcal{S}\}$ est la boule fermée de centre $\log\left(\dfrac{1}{1-|z|^2}\right)$ et de rayon $\log\left(\dfrac{1+|z|}{1-|z|}\right)$ (avec pour déterminations du logarithme celles qu'on imagine).

COROLLAIRE.- *L'ensemble* $\mathcal{S}$ *est compact (pour la topologie de la convergence compacte sur* D).