FRENCH EXAM – FALL QUARTER 2005

ANALYSIS

①

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 45-52.

MESURES CANONIQUES DANS LE PROBLÈME CLASSIQUE DES MOMENTS

par H. BUCHWALTER et G. CASSIER

On sait, en consultant par exemple [1], que le problème classique des moments de Hamburger consiste, étant donnée une suite $\alpha = (\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}$, telle que la matrice infinie $M = [\alpha_{i+j}]$ soit de type positif, à caractériser toutes les mesures positives μ sur la droite numérique telles que $\alpha_k = \int t^k \, d\mu(t)$ pour tout k. On distingue le cas déterminé lorsque la solution μ est unique et le cas indéterminé lorsqu'elle ne l'est pas. En éliminant le cas des mesures à support fini, on se ramène à supposer que la matrice M est de type défini positif. On peut alors plonger l'espace $\mathscr{P} = \mathbf{C}[X]$ des polynômes dans chacun des espaces $L^2(\mu)$, le produit scalaire induit ne dépendant que de la suite α puisque

$$(P\,|\,Q) = \sum_{i,j} \alpha_{i+j} p_i \bar{q}_j \quad \text{si} \quad P = \Sigma p_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \Sigma q_j X^j .$$

En complétant abstraitement $\mathscr{P}$ on obtient un espace de Hilbert fondamental $H = H(\alpha)$, dont une base orthonormale importante (P_k), formée de polynômes tels que $d^\circ P_k = k$, s'obtient par le procédé habituel d'orthonormalisation. Avec quelques précautions on peut identifier isométriquement H à l'adhérence $\bar{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ dans $L^2(\mu)$.

Un cas particulier intéressant est celui où $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$. On sait alors que le problème peut être déterminé ou indéterminé. S'il est indéterminé on dit que μ est une solution N-extrémale.

Les mesures m-canoniques. — En suivant [1], on introduit, à côté des mesures N-extrémales, les mesures m-canoniques pour $m \geqslant 0$, entier fini, les mesures N-extrémales correspondant au cas $m = 0$. On trouve dans [1] deux définitions possibles des mesures m-canoniques. L'une est donnée par le biais de la représentation de Nevanlinna et nécessiterait d'assez longs détours de présentation. L'autre, équivalente, est plus directement accessible. Pour l'écrire, associons à chaque mesure μ et à chaque entier $m \geqslant 0$ la mesure $d\mu_m(t) = (1+t^2)^{-m}\, d\mu(t)$. Alors en suivant [1], p. 121, on a :

DÉFINITION 1. — *Soit μ une mesure ayant des moments de tous les ordres. On dit que μ est m-canonique, avec $m \geqslant 1$, lorsque l'espace $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mu_m)$ et ne l'est pas dans $L^2(\mu_{m-1})$.*

L'objet de cet article est de fournir une caractérisation nouvelle des mesures m-canoniques, en terme de codimension, faisant clairement apparaître le défaut de densité de $\mathscr{P}$ dans l'espace $L^2(\mu)$. Le théorème essentiel est le suivant :

THÉORÈME 1 (de la codimension). — *Soit $m \geqslant 1$. Une mesure μ est m-canonique si, et seulement si, l'espace fondamental $H = \mathscr{P}$ est exactement de codimension m dans $L^2(\mu)$.*

Ce théorème a déjà été présenté dans [3] et [4], avec une démonstration assez longue. Nous reprenons ici la question en apportant quelques éléments nouveaux, permettant des simplifications dans la preuve. Rappelons tout d'abord un résultat classique de M. Riesz, à savoir

PROPOSITION 1. — *Soit μ une mesure ayant des moments de tous les ordres. Pour que $\mathscr{P}$ soit dense dans $L^2(\mu)$, il faut et il suffit que la mesure μ_1 soit déterminée.*

Avec la définition 1 on a sans difficulté :

PROPOSITION 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que μ soit m-canonique est que la mesure μ_m soit N-extrémale.*

Dégageons maintenant un résultat fréquemment utile, qui n'est pas correctement explicité dans la littérature relative au problème des moments. Désignons par $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\mathbf{C})$ l'espace de Montel des fonctions entières sur le plan complexe.

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une mesure* μ, *ayant des moments de tous les ordres, soit indéterminée, il faut et il suffit que le disque*

$$D_2(\mu) = D_2 = \left\{ P \in \mathscr{P} ;\ \int |P|^2 \, d\mu \leqslant 1 \right\}$$

soit relativement compact dans l'espace $\mathscr{H}$. *Cela revient à dire que l'injection canonique* $\mathscr{P} \cap L^2(\mu) \to \mathscr{H}$ *est continue (et même compacte).*

Preuve. — *a*) Supposons μ indéterminée. Elle est alors à support infini de sorte qu'on a $\mathscr{P} \subset L^2(\mu)$. Par ailleurs la suite orthonormale polynomiale (P_k) est telle que la série $\Sigma |P_k(z)|^2$ est uniformément convergente sur tout compact K de **C**. Il suit de là, par Cauchy-Schwarz, que tout $P = \Sigma a_k P_k \in D_2$ est tel que

$$\|P\|_K \leqslant C_K = \operatorname*{Sup}_{z \in K} \left[\sum_0^\infty |P_k(z)|^2 \right]^{1/2}$$

et ainsi D_2 est borné, donc relativement compact, dans $\mathscr{H}$.

b) Réciproquement si la propriété est satisfaite alors μ est à support infini. Pour voir que μ est indèterminée, il faut prouver que l'on a $\sum_0^\infty |P_k(z)|^2 < +\infty$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, ou même pour un seul $z = z_0 \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}$. Pour cela commençons par remarquer qu'il est facile de vérifier que sur le disque D_2 la topologie faible de $L^2(\mu)$ est séparée et moins fine que celle de $\mathscr{H}$, de sorte qu'elle lui est en fait identique par compacité. Pour toute suite $a = (a_k) \in \ell^2$, telle que $\|a\|_2 \leqslant 1$, la suite $S_n = \sum_0^n a_k P_k$ est de Cauchy dans $L^2(\mu)$, donc est aussi suite de Cauchy faible. Par conséquent elle est encore suite de Cauchy dans $\mathscr{H}$, donc convergente. Il suit de là que la série $\Sigma a_k P_k(z)$ est convergente pour tout $z \in \mathbf{C}$ et toute suite $a = (a_k) \in \ell^2$. Alors la suite $(P_k(z))$ est bien élément de ℓ^2, et μ est indéterminée. □

COROLLAIRE 1. — *Soit* μ *une mesure indéterminée. Alors dans l'espace* $L^2(\mu)$ *on a la décomposition en somme directe topologique (non orthogonale)*

$$H = \bar{\mathscr{P}} = \mathbf{C}1 \oplus \overline{(t-i)\mathscr{P}}.$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que la forme linéaire $P \to P(i)$ est continue pour la norme de $L^2(\mu)$. □

ALGEBRA

②

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 1-27.

$\mathscr{S}$-CLASSES INFINITÉSIMALES D'UN CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Jean-François JAULENT

Nous introduisons dans cet article certains groupes de nombres et d'idéaux, canoniquement attachés à un corps de nombres algébriques, et que nous appelons infinitésimaux parce que leur logarithme ℓ-adique, pour un premier donné ℓ, est identiquement nul. Notre propos est de montrer comment ces groupes, qui interviennent de façon naturelle dans l'étude du groupe de Galois $\mathscr{A}(K)$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale d'un corps de nombres K, comme dans celle de son sous-groupe de torsion $\mathscr{T}(K)$, permettent de ce fait d'éclairer les problèmes de ℓ-ramification. Disons un mot sur leur définition :

Si K est un corps de nombres de degré fini sur $\mathbf{Q}$, le tensorisé $\mathscr{K} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} K^\times$ du groupe multiplicatif de ses éléments non nuls s'envoie canoniquement dans son complété profini au-dessus de ℓ, défini comme la complétion projective $\varprojlim_m \left(\bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell} K_\mathfrak{l}^\times / K_\mathfrak{l}^{\times \ell^m} \right)$ du composé des groupes multiplicatifs des complétés de K pour les places au-dessus de ℓ. Le noyau de cette application est ce que nous appelons le ℓ-groupe des éléments infinitésimaux de K; son image $\mathscr{P}_\infty(K)$ dans le tensorisé $\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} P(K)$ du groupe des idéaux principaux est le ℓ-groupe des idéaux principaux-infinitésimaux; et nous disons qu'un idéal de K est infinitésimal lorsqu'une de ses puissances non nulles tombe dans $\mathscr{P}_\infty(K)$.

Bien entendu, le principal intérêt des groupes présentés est de rendre compte des propriétés de ℓ-ramification, tout en dissimulant sous un formalisme commode les problèmes souvent fastidieux de passage à la limite.

C'est ainsi que dans une première partie nous montrons comment le ℓ-

groupe des idéaux principaux-infinitésimaux apparaît comme limite des groupes de rayons associés par la théorie du corps de classes aux extensions abéliennes ℓ-ramifiées, et nous relions ce résultat à la description idélique traditionnelle du groupe $\mathcal{A}(\mathrm{K})$. Auparavant, nous précisons la structure des groupes d'unités infinitésimales du corps K, qui gouvernent la répartition des sous-groupes de décomposition des places de K dans la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de ce corps.

Enfin, dans les deux dernières parties nous mettons en œuvre les résultats précédents pour étudier les questions de classes ambiges et de théorie des genres dans une extension galoisienne finie $\mathrm{L/K}$:

a) La suite exacte des classes ambiges.

Ces considérations sur les classes ambiges trouvent leur origine dans un article de G. Gras (cf. [5]) qui souligne l'analogie entre le comportement du groupe de défaut de la conjecture de Leopoldt vis-à-vis du groupe $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ et celui du groupe des unités vis-à-vis du groupe des classes d'idéaux. Nous avons choisi une méthode d'exposition de la formule des classes ambiges qui s'appuie sur des résultats de cohomologie tout à fait semblables à ceux développés par Iwasawa dans sa note sur les unités (cf. [9]), mais nous aurions pu aussi bien, du moins dans le cas cyclique, reprendre la démonstration plus élémentaire de Chevalley (cf. [1]), pour la transposer dans le cas qui nous intéresse, le parallélisme des résultats étant éclatant. Reprenant une idée de [6], nous montrons ensuite comment l'extension du logarithme aux groupes d'idéaux permet, dans bien des cas, d'élucider la structure du sous-groupe de torsion $\mathcal{T}(\mathrm{K})$.

b) La suite exacte des genres.

Nous reprenons ici des considérations de théorie des genres, que nous avons développées ailleurs dans un tout autre contexte (cf. [10]). Après avoir étudié l'application norme dans une extension finie $\mathrm{L/K}$, nous regardons plus attentivement le cas abélien dans lequel nous étendons au groupe $\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{K}^\times$ les symboles de Hasse pour généraliser aux éléments infinitésimaux la réciproque de la formule du produit. Nous introduisons enfin la notion de genre infinitésimal d'une extension galoisienne $\mathrm{L/K}$, et nous montrons en particulier que les ℓ-groupes d'inertie des places ramifiées dans $\mathrm{L/K}$ sont déployés dans le corps des genres associé, dès que la conjecture de Leopoldt est vérifiée dans K.

1. DESCRIPTION DES GROUPES DE CLASSES ET D'UNITÉS

Dans ce paragraphe, K désigne un corps de nombres de degré fini sur le corps des rationnels, ℓ un nombre premier, et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places de K étrangères à ℓ, contenant les places à l'infini.

a. Définition du groupe de défaut et des éléments infinitésimaux.

Convenons d'écrire $K^\times$ le groupe multiplicatif du corps K, puis $E^{\mathcal{S}}(K)$ le sous-groupe des $\mathcal{S}$-unités (i.e. des éléments unités en dehors de $\mathcal{S}$) et $E'(K)$ celui des ℓ-unités, $E(K)$ enfin celui des unités de l'anneau des entiers de K. Nous notons $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)$, $\mathcal{E}'(K)$, $\mathcal{E}(K)$ leurs tensorisés ℓ-adiques respectifs, c'est-à-dire les fermetures de leurs images respectives dans le groupe $\mathcal{K} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} K^\times$, pour la topologie des sous-groupes d'indice fini.

Pour chaque place $\mathfrak{l}$ de K au-dessus de ℓ, introduisons le groupe $\mathfrak{U}_\mathfrak{l}$ des unités principales du complété $K_\mathfrak{l}$ de K en $\mathfrak{l}$; faisons choix d'une uniformisante $\pi_\mathfrak{l}$ de $K_\mathfrak{l}$; et notons $\mu_\mathfrak{l}$ le groupe des racines de l'unité d'ordre étranger à ℓ contenues dans $K_\mathfrak{l}$. Le groupe multiplicatif du corps $K_\mathfrak{l}$ s'écrit comme produit direct $K_\mathfrak{l}^\times = \mu_\mathfrak{l}.\pi_\mathfrak{l}^{\mathbf{Z}}.\mathfrak{U}_\mathfrak{l}$, ce qui permet de définir son complété profini en posant : $\mathcal{K}_\mathfrak{l} = \pi_\mathfrak{l}^{\mathbf{Z}_\ell}.\mathfrak{U}_\mathfrak{l}$ (cette définition étant indépendante du choix de l'uniformisante $\pi_\mathfrak{l}$). Le complété profini de K au-dessus de ℓ, $\mathfrak{K} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{K}_\mathfrak{l}$, produit des complétés $\mathcal{K}_\mathfrak{l}$ pour les places au-dessus de ℓ, contient naturellement le groupe $\mathcal{U}(K) = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathfrak{U}_\mathfrak{l}$ des unités semi-locales de K et sa filtration canonique $\mathcal{U}_m(K) = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} (1+\mathfrak{l}^m)$, pour $m \in \mathbf{N}$.

Cela étant, l'injection diagonale de $K^\times$ dans le produit de ses complétés $\prod_{\mathfrak{l}|\ell} K_\mathfrak{l}^\times$ se prolonge par continuité en une surjection s du tensorisé $\mathcal{K}$ sur le complété profini $\mathfrak{K}$. La filtration transportée

$$\mathcal{K}_m = \{x \in \mathcal{K} \mid s(x) \in \mathcal{U}_m(K)\}$$

DIFFERENTIAL GEOMETRY

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 191-226.

3

DÉFORMATIONS INFINITÉSIMALES DES ESPACES RIEMANNIENS LOCALEMENT SYMÉTRIQUES. II. LA CONJECTURE INFINITÉSIMALE DE BLASCHKE POUR LES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES

par J. GASQUI et H. GOLDSCHMIDT

Considérons un espace projectif X, différent d'une sphère, muni de sa métrique canonique g; toutes ses géodésiques sont fermées et de longueur π. La conjecture de Blaschke prétend que toute autre métrique sur X, vérifiant cette condition, est isométrique à g. Elle a été résolue pour les structures riemanniennes de Blaschke sur les projectifs réels par L. Green et M. Berger (cf. [2]). Si g_t est une déformation de $g_0 = g$ sur X, dont chaque membre a toutes ses géodésiques périodiques de longueur π, alors la 2-forme symétrique $h = \left.\frac{dg_t}{dt}\right|_{t=0}$ est d'intégrale nulle sur les géodésiques de g, c'est-à-dire,

$$\int_0^\pi h(\dot\gamma(s),\ \dot\gamma(s))\,ds = 0,$$

pour toute géodésique γ de g, paramétrée par sa longueur, où $\dot\gamma(s)$ est son vecteur-vitesse en $\gamma(s)$. Ceci amène à formuler la version infinitésimale de la conjecture de Blaschke : une 2-forme symétrique h sur X, qui est d'intégrale nulle sur les géodésiques de g, est une dérivée de Lie de g.

R. Michel [7] a démontré qu'une 2-forme symétrique sur X, dont les restrictions aux droites projectives de X sont des dérivées de Lie, est globalement une dérivée de Lie de g. L'hypothèse de ce dernier résultat est plus forte que celle de la conjecture, sauf dans le cas des projectifs réels où elle lui est équivalente. C. Tsukamoto [9] a récemment démontré la conjecture pour les espaces projectifs restants. Plus précisément, il prouve celle-ci pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et l'obtient ensuite pour les autres espaces projectifs, grâce au théorème de Michel cité ci-dessus.

Nous nous proposons de donner ici une autre démonstration de la conjecture infinitésimale de Blaschke pour tous les espaces projectifs $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, avec $m \geqslant 2$, directement à partir du théorème de Michel pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ qui, dans ce cas, a une preuve élémentaire.

Cet article est la suite de notre papier [4]; toutefois, il peut être lu indépendamment de celui-ci.

Soit h une 2-forme symétrique sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, muni de sa métrique canonique g, où $m \geqslant 2$. Nous introduisons un opérateur différentiel linéaire D_g d'ordre 2, provenant de la linéarisation de l'opérateur non-linéaire de courbure de Riemann, et nous montrons que l'hypothèse de la conjecture infinitésimale de Blaschke pour h est équivalente au fait que la restriction de $D_g h$ à tout plan projectif réel de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ est nulle. Nous exprimons cette dernière condition par la nullité de $D'_g h$, où D'_g est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2, défini à partir de D_g. La conjecture infinitésimale de Blaschke pour $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ est maintenant équivalente à l'exactitude au niveau des sections globales d'un complexe d'opérateurs différentiels, où apparaît D'_g. Signalons au passage que l'hypothèse du théorème de Michel revient à supposer que $D_g h$ s'annule sur toutes les sous-variétés totalement géodésiques à courbure constante de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$.

Au § 1, nous décrivons l'opérateur D_g et ses propriétés. Au § 2, on considère sur un espace homogène compact G/K un complexe

$$C^\infty(F_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty(F_2) \xrightarrow{P_2} C^\infty(F_3) \tag{1}$$

d'opérateurs différentiels linéaires, homogènes, où P_1 est à symbole injectif et $C^\infty(F_j)$ l'espace des sections globales d'un fibré vectoriel complexe F_j sur G/K. Avec la réciprocité de Frobenius (cf. [10]), on associe, à chaque élément du dual de G, un sous-complexe de (1), d'espaces vectoriels de dimension finie, et on vérifie que l'exactitude de (1) est équivalente à celle de tous ces sous-complexes. Le § 3 est consacré à des résultats classiques sur les représentations du groupe unitaire.

La conjecture infinitésimale se traduit plus précisément, au § 4, en termes d'exactitude d'un complexe du type (1) sur

$$G/K = U(m+1)/U(1) \times U(m):$$

les fibrés F_1 et F_2 sont le complexifié du fibré tangent et le fibré des 2-formes symétriques, à valeurs complexes, sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, tandis que P_1 est l'opérateur de Killing et $P_2 = D'_g$. C'est ici qu'intervient le théorème de Michel pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Nous décrivons ensuite explicitement une décomposition en $U(m+1)$-modules irréductibles de $C^\infty(F_2)$, à l'aide des sous-espaces propres du laplacien de la métrique g. Avec le critère décrit plus haut, on est ramené à étudier l'action de D'_g sur certains facteurs irréductibles de cette décomposition, et, en fait, à celle de D_g sur des sections explicites de F_2. Ces derniers calculs sont menés à bien, au § 5, par des méthodes de géométrie kählérienne locale dans l'espace projectif complexe.

1. Propriétés de l'opérateur D_g.

Tous les objets considérés dans ce papier sont supposés différentiables de classe C^∞. Soit X une variété différentiable de dimension finie, dont on note T le fibré tangent et T^* le fibré cotangent. On désigne par S^kT^* et $\wedge^\ell T^*$ la puissance symétrique k-ième et la puissance extérieure ℓ-ième de T^*, respectivement. Si E est un fibré vectoriel sur X, on note $\mathscr{E}$ le faisceau des sections de E sur X et $C^\infty(E)$ l'espace des sections globales de E sur X.

Soit g une métrique riemannienne sur X. On note

$$g^\flat : T \to T^*, \qquad g^\sharp : T^* \to T$$

les isomorphismes canoniques déterminés par g. Si ∇ est la connexion de Levi-Civita de g, la courbure $\tilde{R}$ de g de type $(1, 3)$, section de $\wedge^2 T \otimes T^* \otimes T$, est définie par

$$\tilde{R}(\xi_1, \xi_2)\xi_3 = (\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2} - \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1} - \nabla_{[\xi_1, \xi_2]})\xi_3,$$

pour tous $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathscr{T}$. Les courbures R et $\hat{R}$ de type $(0, 4)$ et $(2, 2)$ de g sont des sections de $\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T^*$ et de $\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T$, respectivement; elles sont données par

$$R(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = g(\xi_4, \tilde{R}(\xi_1, \xi_2)\xi_3),$$

pour $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in T$, et

$$\hat{R} = g^\sharp \circ R.$$

FUNCTIONAL ANALYSIS
APPLIED MATH.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984). 155-190.

4

FONCTIONS A HESSIEN BORNE

par Françoise DEMENGEL

Cet article a pour objet d'établir quelques propriétés de l'espace des fonctions dont le hessien est une mesure bornée. Cet espace est l'espace naturel pour certains problèmes de mécanique. Il permet de résoudre des problèmes parfaitement plastiques en dimension deux, pour le modèle de Hencky (problème de plaques). Nous renvoyons à [2], [3] pour l'étude des solutions dans l'espace HB du déplacement orthogonal au plan d'une plaque à comportement parfaitement plastique du type de Hencky. Remarquons que cette étude nécessite nombre de résultats énoncés ici. La première partie de l'article présent concerne des propriétés topologiques de l'espace HB. On y montre, entre autres, la compacité relative des bornés de $HB(\Omega)$, pour une topologie dite faible ; on y introduit une topologie intermédiaire entre la topologie faible et la forte, qui sera très utile pour les théorèmes de trace : les traces sont étudiées au paragraphe 2, et nous permettent de donner des théorèmes de prolongement d'une fonction de $HB(\Omega)$ en une fonction de $HB(\mathbf{R}^n)$ à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Au paragraphe 3, on donne les théorèmes d'injection de type Sobolev. En particulier $HB(\Omega)$ est pour $n = 2$ inclus avec injection continue dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$. Remarquons que ce résultat permet de justifier la déformation plastique d'une plaque soumise à une charge ponctuelle, puisque celle-ci est représentable par une mesure de Dirac, qui appartient au dual de $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$. Nous renvoyons à [2], [3] pour plus de précisions sur ce point et pour les questions d'existence de solutions des problèmes variationnels des plaques.

Notations.

Dans ce qui suit on désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ et connexe.

- Dans la plupart des propriétés énoncées, on suppose que Ω a la propriété de cône (cf. Adams [1]); dans d'autres — notamment pour le théorème de continuité — on suppose que Ω est C^2 régulier uniforme, ce qui est évidemment plus fort.

On désigne par $L^p(\Omega)$ (resp. $\mathbf{L}^p(\Omega)$) l'espace des classes de fonctions à valeurs réelles (respectivement à valeurs dans $\mathbf{R}^n$), de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable sur Ω; on désigne par $\mathscr{M}_b(\Omega)$, (resp. $\mathscr{M}_b(\Omega,\mathbf{R}^n)$, resp. $\mathscr{M}_b(\Omega,E)$, l'espace des mesures bornées sur Ω à valeurs réelles, (resp. à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, resp. à valeurs dans l'espace E des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbf{R}^n$). $\mathscr{P}_1(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω à dérivées secondes nulles sur Ω. On note indifféremment $|\ |_p$ la norme sur $L^p(\Omega)$ ou $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $|\ |_T$ la variation totale d'un élément de $\mathscr{M}_b(\Omega)$ ou de $\mathscr{M}_b(\Omega,E)$.

On rappelle maintenant la définition des espaces de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u/D^\alpha u \in L^p(\Omega), [\alpha] \leqslant m\}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{N}^n \quad \text{et} \quad [\alpha] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

les dérivées étant prises au sens des distributions, et on note $\|\ \|_{m,p}$ la norme sur $W^{m,p}$, définie par

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0\leqslant[\alpha]\leqslant m} |D^\alpha u|_p,$$

et qui en fait un espace de Banach.

On rappelle aussi la définition des espaces $BV(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$) utilisés en calcul des variations et en plasticité, étudiés par Giusti [6], Miranda [7], (resp. Strang-Teman [13], Suquet [14]) :

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega), \nabla u \in \mathscr{M}_b(\Omega,\mathbf{R}^n)\},$$

$$BD(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathbf{L}^1(\Omega),\ \varepsilon(\vec{u}) \in \mathscr{M}_b(\Omega,E)\},$$

où $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$.

On introduit maintenant l'espace des fonctions à hessien borné, noté :

$$\mathrm{HB}(\Omega) = \{u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega),\ \nabla\nabla u \in \mathscr{M}_b(\Omega,\mathrm{E})\}$$

et que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{\mathrm{HB}} = |u|_1 + |\nabla u|_1 + |\nabla\nabla u|_{\mathrm{T}}.$$

Remarque. – Lorsque Ω possède la propriété de cône il est aisé de voir que :

$$\mathrm{HB}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \nabla\nabla u \in \mathscr{M}_b(\Omega,\mathrm{E})\}.$$

Ce résultat est conséquence directe du résultat de Deny-Lions [5] :

$$\mathrm{W}^{1,1}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{L}^1(\Omega)\},$$

joint au résultat de Strang-Teman [13] :

$$\mathrm{BD}(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \varepsilon(u) \in \mathscr{M}^b(\Omega,\mathbf{R}^n)\}.$$

Citons un exemple de fonction de $\mathrm{HB}(\Omega)$ en dimension 2, qui présente un intérêt pour l'étude de la déformation d'une plaque élastoplastique à géométrie simple soumise à une charge concentrée au centre :

Exemple. – Un repère orthonormé de $\mathbf{R}^2$ étant choisi, Ω est le carré $]-1,+1[\times]-1,+1[$, et u est la fonction définie par

$$u(x,y) = (1-|y|)\mathbf{1}_{\{|y|<1,|x|\leq|y|\}} + (1-|x|)\mathbf{1}_{\{|x|<1,|y|<|x|\}}$$

($\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ désigne la fonction caractéristique du borélien A).

Les calculs des dérivées secondes de u donnent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\delta_{\{|y|\leq 1,x=|y|\}} - \delta_{\{|y|<1,x=-|y|\}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \delta_{\{|x|\leq 1,y=x\}} - \delta_{\{|x|<1,y=-x\}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\delta_{\{|x|<1,y=|x|\}} - \delta_{\{|x|\leq 1,y=-|x|\}}$$

(où $\delta_{\mathscr{C}}$ désigne la mesure de Dirac distribuée sur la courbe $\mathscr{C}$).

APPLIED MATH
MATHEMATICAL PHYSICS

5

Chapitre 1

Thermodynamique classique

1.1 La thermodynamique classique

1.2 Notions fondamentales

Nous rappelons ici brièvement quelques notions de thermodynamique. Pour comprendre quantitativement les liens entre les notions de volume, pression, température, énergie, chaleur, etc., il est nécessaire de considérer dans un premier temps des situations simplifiées et idéalisées comme celle qui suit.

Un système physique — Isolons mentalement une certaine quantité de matière contenue dans une portion de l'espace du reste du monde. Nous pouvons lui associer certaines grandeurs :

- la quantité la plus concrète est *le volume occupé* V
- *la pression* p, égale au quotient de la force exercée par le gaz sur une portion de la paroi par l'aire de cette paroi. Cette définition suppose que ce quotient soit le même partout (ce qui n'est pas le cas par exemple autour d'une aile d'avion, sans quoi l'avion tomberait) et donc que le gaz soit au repos.
- *la température* T : c'est déjà une notion plus subtile, bien que nous en ayons une perception immédiate. D'abord, tout comme la pression, on ne peut définir la température d'un système que s'il est à l'équilibre (Ce qui signifie que l'on a laissé reposer le système suffisamment longtemps pour qu'il « n'évolue plus », le temps de relaxation pouvant varier entre une fraction de seconde et des heures suivant les situa-

tions). La possibilité théorique de définir la température est déduite de l'observation expérimentale du *principe zéro de la thermodynamique.* Celui-ci s'énonce : *« deux systèmes, en équilibre thermique avec un même troisième, restent en équilibre entre eux ».* C'est dire que la relation d'équivalence $A \sim B$ entre des états physiques A et B, signifiant que *« A est en équilibre thermique avec B »*, qui est bien évidemment réflexive et symétrique, est aussi transitive, et est donc une relation d'équivalence. Alors chaque classe d'équivalence définit une température[1]. Ce principe conduit à la définition d'une fonction température T sur l'ensemble des systèmes physiques qui n'est bien évidemment pas unique, puisque, pour tout homéomorphisme croissant ϕ de l'image de T dans vers un ouvert de $\mathbb{R}$, $\phi \circ T$ est encore une fonction température[2].
- *la quantité de molécules N.* On l'exprime soit en nombre de molécules N, soit en nombre de moles N/N_A, où $N_A = 6,022\,136\,7 \cdot 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro.. Le nombre de molécules joue un rôle important lorsqu'on considère un mélange de différentes espèces chimiques (par exemple de l'hydrogène H_2 avec de l'oxygène O_2 et de l'eau H_2O). On doit alors comptabiliser dans l'énergie totale une énergie chimique (et des potentiels chimiques) dépendant de ces nombres.

Exercice 1 *Soit $\mathcal{U}$ un ensemble* dénombrable *d'éléments que l'on notera A, B, etc. Supposons que $\mathcal{U}$ soit muni des relations $\sim$, $\succeq$ et $\succ$, satisfaisant les propriétés (i) et (ii) énoncées dans la note en bas de page 1. Montrer qu'il existe une fonction $T : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $A \succeq B \iff T(A) \geq T(B)$.*

Toutes ces grandeurs s'appellent *grandeurs d'état.* Nous les avons défini à peu près comme on aurait pu le faire au milieu du XIXème siècle, sur la base d'un certain nombre de principes issus de l'expérience, qu'il serait difficile de déduire logiquement de la mécanique. Nous verrons ultérieurement, avec la

[1]Il faudrait compléter ce principe en introduisant la relation $A \succ B$ signifiant *« A est plus chaud que B et n'est pas en équilibre thermique avec B »* et la relation $A \succeq B$ signifiant alors que *« $A \succ B$ ou $A \sim B$ ».* Alors en postulant que (i) $\succeq$ est une relation d'ordre totale sur l'ensemble des systèmes physiques et que (ii) $\forall A, B$ tels que $A \succ B$ il existe C tel que $A \succ C \succ B$, on peut démontrer l'existence d'une fonction température (cf. Exercice 1).

[2]On peut exiger en plus que lorsque T varie (de façon quasi-statique), par exemple le volume V du système varie en étant une fonction différentiable de T et même que $\frac{dV}{dT}$ soit le plus proche possible d'une constante : c'est exactement le principe du thermomètre à alcool ou à mercure, reliant de façon affine la dilatation d'un fluide à sa température.

mécanique statistique, une approche bien plus profonde de ces notions, notament en ce qui concerne la température. Notons que parmi ces grandeurs d'état, certaines sont dites *extensives* et d'autres *intensives*. Les grandeurs extensives (volume, nombre de molécules) s'ajoutent lorsque l'on superposent deux systèmes en équilibre thermiques et chimiques : par exemple si j'assemble deux systèmes identiques et en équilibre en un seul, le volume du nouveau système est la somme des volumes de chacune des parties. Les grandeurs intensives (température, pression, potentiel chimique) ne s'ajoutent pas : par exemple si j'assemble deux systèmes à la même température, le résultat est un système qui a encore la même température.

L'énergie interne. Enfin nous aurions pu également incorporer dans la liste des grandeurs d'état *l'énergie interne* U : c'est une notion historiquement issue de la mécanique où elle est définie comme la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Pour un mouvement sans frottement, l'énergie totale est conservée : c'est ce qui rend la notion d'énergie si importante. Au milieu du XIXème siècle, les travaux de N.L.S. CARNOT, J.P. JOULE et R.J. MAYER permirent de comprendre que la chaleur était aussi une forme particulière d'énergie, accomplissant ainsi un premier pas vers une unification de la mécanique et de la thermique. Notons qu'à la différence des grandeurs d'état comme V, p, T, l'énergie totale est un concept relativement abstrait (ou transcendant). En particulier l'énergie totale ne se mesure pas directement, mais est évaluée à partir d'un bilan des échanges d'énergie. En revanche, l'énergie totale peut être en général calculée à partir des autres variables d'état : elle une fonction $U = U(T, p, V, \cdots)$. Enfin, contrairement à la température ou à la pression, il est possible de définir l'énergie totale d'un système, même si celui-ci est en dehors de l'équilibre.

A présent nous pouvons commencer à récolter les fruits du travail des thermodynamiciens : sur des systèmes parfois extrêmement complexes, nous avons défini un petit nombre de grandeurs d'état (à partir du moment où les systèmes sont **à l'équilibre**) et nous pouvons faire des prédictions en utilisant des relations qui ne font intervenir que ces grandeurs ! Considérons un exemple simple : un gaz monoatomique contenu dans une enceinte fermée, à l'équilibre. Les grandeurs d'état sont V, N, p et T. L'état du système semble a priori dépendre de quatre variables. Mais ces grandeurs sont liées par une relation d'état (entre V, N, p et T). Par ailleurs U peut être calculée à partir des autres variables. Par exemple si nous avons un gaz parfait, alors l'équa-

APPLIED MATH
PDE's FROM PHYSICS
MATHEMATICAL PHYSICS.

6

Symétries dans les problèmes variationnels et applications harmoniques

Frédéric Hélein

le 12 juin 1998

1 Introduction

Certaines quantités fondamentales en physique (énergie, quantité de mouvement, charge électrique...) peuvent être identifiées comme étant les quantités conservées, c'est à dire admettant une valeur constante au cours du temps, lorsque certaines hypothèses naturelles sont vérifiées. Considérons par exemple le mouvement d'une particule ponctuelle de masse m se déplaçant dans l'espace tridimensionnel, sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Désignons par $x(t) = {}^t(x^1, x^2, x^3)(t)$ le vecteur position dans $\mathbb{R}^3$ de cette particule à l'instant t ; la loi de Newton conduit à la relation bien connue :

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = m\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}(x(t)), \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Cette équation peut prendre la forme vectorielle $m\ddot{x} = -\nabla V(x)$, où ∇V est le vecteur de composantes $\frac{\partial V}{\partial x^i}$. Une manipulation très simple de cette équation consiste à faire le produit scalaire des deux membres par le vecteur vitesse $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ et écrire

$$m\langle\ddot{x}, \dot{x}\rangle = -\langle\nabla V(x), \dot{x}\rangle = -\frac{d(V(x))}{dt}.$$

Cette équation prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + V(x)\right) = 0.$$

La quantité $\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + V(x)$ émerge ainsi simplement des équations de Newton : c'est l'*énergie totale* de la particule dans le potentiel de force V, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Un raisonnement aussi élémentaire permettrait de montrer que si par exemple le potentiel du champ de force est invariant lorsque l'on fait subir à une particule une translation dans la direction des x^1 - ce qui signifie simplement que la fonction V ne dépend pas de x^1, mais seulement de (x^2, x^3) - alors la quantité $m\dot{x}^1$ est constante au cours du temps pour toute solution des équations de Newton. Dans ce cas-là, c'est une des composantes du vecteur *impulsion* $m\dot{x}$ qui est conservée. De même, si on suppose que V ne dépend que de la distance à l'origine dans $\mathbb{R}^3$, ce qui s'écrit $V(x) = V(r)$, où $r = |x|$, on peut vérifier par un calcul direct que le moment de rotation

$$mx \times \dot{x} = m \begin{pmatrix} x^2\dot{x}^3 - x^3\dot{x}^2 \\ x^3\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3 \\ x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1 \end{pmatrix}$$

est constant au cours du temps.

Ces trois exemples illustrent un principe mathématique général, qui associe à chaque *symétrie infinitésimale* d'une équation différentielle (en l'occurence l'équation de Newton) une quantité, de façon telle que pour toute solution de cette équation, cette quantité est conservée. Ainsi, dans l'exemple de l'équation de Newton, la conservation de l'énergie totale est due à l'invariance de l'équation de Newton par translation dans le temps, ce qui exprime le principe raisonable que les lois qui gouvernent le mouvement de la particule sont identiques à chaque instant. De même, toute symétrie spatiale du problème entraîne l'existence d'autres quantités conservées au cours du temps. Cette intéraction entre symétries et quantités conservée a, semble-t-il, été remarquée pour la première fois par Sophus Lie. Une des manifestations les plus importantes de ce lien symétrie-lois de conservation concerne les équations différentielles *variationnelles* et est contenue dans le *théorème d'Emmy Noether.* Nous verrons d'ailleurs un peu plus loin que les équations de Newton sont d'origine variationnelle (il s'agit du principe de Maupertuis).

Exposons brièvement le théorème de Noether dans un cas simple, celui d'un problème variationnel supposé gouverner le mouvement d'une particule ponctuelle dans l'espace de dimension 3, $\mathbb{R}^3$. A chaque trajectoire γ, vue comme application d'un intervalle de temps I vers $\mathbb{R}^3$, nous associons une *action*

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_I L(t, \gamma, \dot{\gamma})dt,$$

où L est une fonction régulière de $I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$, appelée *lagrangien* et $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$. Toute trajectoire γ rendant extrémale ou stationnaire l'action $\mathcal{A}$ est appelée *point critique* de $\mathcal{A}$. Cela signifie qu'une trajectoire $\gamma + \epsilon\beta$ qui a même point de départ et d'arrivée que γ (id est β est à support compact dans I), et qui est proche de γ (ce qui revient à supposer que ϵ est très petit) a une action $\mathcal{A}(\gamma + \epsilon\beta)$ qui diffère de $\mathcal{A}(\gamma)$ à l'ordre deux en ϵ (c'est à dire $\mathcal{A}(\gamma + \epsilon\beta) - \mathcal{A}(\gamma) = O(\epsilon^2)$).

Exemple : *Le principe de Maupertuis.*
Si on prend pour L :

$$L(t, \gamma, \dot{\gamma}) = m\frac{|\dot{\gamma}|^2}{2} - V(\gamma),$$

on peut vérifier que tout point critique de $\mathcal{A}$ satisfait l'équation de Newton.

Supposons à présent qu'il existe une famille continue de déformations de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui laisse le problème variationnel invariant et prenons le cas où cette famille est un groupe à un paramètre Φ_s, avec $\Phi_0(x) = x$. L'invariance signifie que pour toute trajectoire γ,

$$\mathcal{A}[\Phi_s \circ \gamma] = \mathcal{A}[\gamma].$$

En supposant que Φ_s dépende de façon régulière ($\mathcal{C}^1$) du paramètre s, on a nécessairement pour s très petit

$$\Phi_s(x) = x + sX(x) + o(s),$$

où X est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^3$. Réciproquement, la connaissance du champ de vecteur X suffit à caractériser Φ_s pour tout $s \in \mathbb{R}$, dés que X est lipschitzien. Ainsi les groupes à un paramètre de symétrie sont reliés aux déformations infinitésimales de l'espace. Et l'invariance de l'action par le groupe $(\Phi_s)_s$ est équivalente à l'équation sur L

$$\sum_{i=1}^{3} X^i(\gamma)\frac{\partial L}{\partial \gamma^i}(t,\gamma,\dot\gamma) + dX^i(\gamma).\dot\gamma\frac{\partial L}{\partial \dot\gamma^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = 0.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soit L un lagrangien invariant sous l'action infinitésimale de X et soit γ un point critique de $\mathcal{A}(\gamma)$, alors la quantité*

$$J = \sum_{i=1}^{3} X^i(\gamma)\frac{\partial L}{\partial \dot\gamma^i}(t,\gamma,\dot\gamma)$$

est constante au cours du temps.

Ce résultat est une forme élémentaire du théorème de Noether. On peut également énoncer et prouver une version analogue, mais avec un groupe de symétrie qui agit sur l'espace de départ du problème variationnel, c'est à dire ici un groupe de difféomorphismes de l'intervalle I. Mieux encore, il est possible de "mélanger" l'espace et le temps, c'est à dire considérer des champs de vecteurs sur l'espace-temps, voire des champs de vecteurs qui font intervenir un nombre arbitraire de dérivées (cf [Olver]). De plus, ce théorème se généralise aux problèmes variationnels à plusieurs variables, mais alors on n'obtient pas une quantité scalaire constante, mais un champ de vecteurs sur le domaine de départ à divergence nulle.

Dans ce qui suit, nous commencerons par énoncer plus précisement et démontrer quelques versions du théorème de Noether, et nous nous intéresserons ensuite à quelques applications. Notre propos est en effet d'illustrer les mérites

ANA LYSIS.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 67-87.

7

AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES D'UN DOMAINE DE REINHARDT BORNÉ D'UN ESPACE DE BANACH A BASE

par Jean-Pierre VIGUE

Dans [14], j'ai étudié les automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E, et je me suis intéressé plus spécialement au cas des domaines bornés symétriques. En particulier, j'ai montré que les domaines bornés symétriques étaient homogènes, isomorphes à des domaines cerclés bornés et que le groupe G(D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné symétrique D avait, de façon naturelle, une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie.

D'autre part, Braun, Kaup et Upmeier [1] ont étudié les automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe E. Ils ont montré, en particulier, qu'il existe un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E tel que $D \cap F$ soit un domaine borné symétrique de F et que $D \cap F$ soit exactement l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe G(D).

Dans cet article, j'étudierai les automorphismes d'un domaine de Reinhardt borné D d'un espace de Banach complexe à base E. Je montrerai en particulier que, si le sous-espace vectoriel F introduit dans [1] est de codimension finie, le groupe G(D) a une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie, ce qui généralise un résultat de [14]. Le résultat essentiel de cet article est un théorème de classification des domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base. Plus précisément, si D est un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach à base E, alors E est isomorphe au sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0 à l'infini d'un produit $\prod_{n\in\mathbf{N}} E_n$ d'espace de Hilbert E_n, muni de la norme

$$\|(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\|,$$

et D est isomorphe à la boule-unité ouverte de l'image de E dans ce produit.

Enfin, je retrouverai par ces mêmes méthodes le résultat suivant : les automorphismes de la boule-unité ouverte B de $\ell^p(\mathbf{N})$ ($p \neq 2$ et $+\infty$) laissent l'origine fixe, et, d'après un théorème de H. Cartan, sont linéaires. Ce résultat est déjà connu par [1], [10] et [13], mais ma démonstration est très simple. Elle s'inspire de méthodes de Braun, Kaup et Upmeier [1] et utilise en particulier un résultat de Thullen [12] sur les automorphismes des domaines de Reinhardt bornés de $\mathbf{C}^2$.

Pour terminer cet article, je donnerai, à titre d'exemple, une classification des domaines de Reinhardt bornés d'un espace de Banach à base E tels que $\operatorname{codim}_E F = 1$.

Je remercie M. Dineen des remarques qu'il m'a faites.

1. Premières définitions et rappels.

Rappelons d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — *Un domaine* D *d'un espace de Banach complexe* E *est dit cerclé si l'origine* 0 *appartient à* D *et si* D *est stable par le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de* E

$$(\theta, x) \to e^{i\theta} x \quad (\theta \in \mathbf{R}).$$

Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E. D'après [1], il existe un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe G(D) des automorphismes analytiques de D soit exactement $D \cap F$. On sait d'autre part, d'après un résultat de H. Cartan [3], que le groupe d'isotropie de l'origine $G_0(D)$ est un sous-groupe du groupe linéaire.

VARIATIES
ALGEBRAIC GEOMETRY

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1984), 39-64

(8)

PROPRIÉTÉS DE DESCENTE DES VARIÉTÉS À FIBRE COTANGENT AMPLE

par Mireille MARTIN-DESCHAMPS

Introduction.

Manin ([10]), puis Grauert ([5]), ont démontré pour les corps de fonctions l'analogue de la conjecture de Mordell pour les corps de nombres : "Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, L un corps de fonctions algébriques sur k, C une courbe propre, lisse et géométriquement intègre, de genre $g \geqslant 2$ sur L, dont l'ensemble des points L-rationnels est infini ; alors C se redescend sur k, c'est-à-dire est L-isomorphe à une courbe C_0 définie sur k ; de plus, $C(L) - C_0(k)$ est fini".

Ces résultats ont été complétés par Samuel ([12], [13]) dans le cas d'un corps de caractéristique non nulle.

Dans cet article, nous nous proposons de démontrer un résultat analogue pour des variétés de dimension quelconque. La propriété pour une courbe d'être de genre supérieur ou égal à 2 sera remplacée par la propriété pour une variété de dimension quelconque d'avoir un fibré cotangent ample – propriété qui coïncide bien avec la précédente dans le cas d'une courbe –. La notion d'amplitude pour des fibrés de rang quelconque sur une variété a été introduite par Hartshorne en 1966 ([6]), et dans les années 70 quelques articles ont été consacrés à l'étude de ces fibrés. Récemment, de nouveaux chercheurs se sont intéressés aux variétés à fibré cotangent ample (Miyaoka, Bogomolov, Noguchi, Sunada...).

Nous démontrons ici le Théorème suivant : *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique* 0, L *un corps de fonctions algébriques sur* k, X *une variété propre* *et lisse, géométriquement intègre sur* L, *à fibré cotangent* $\Omega^1_{X/L}$ *ample. Si l'ensemble des points* L*-rationnels de* X *est Zariski-dense dans* X, *il existe une variété* X_0 *sur* k, *et un* L*-isomorphisme* $X_0 \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, L \xrightarrow{\sim} X$. *De plus,* $X(L) - X_0(k)$ *est fini.*

Notre résultat contient en particulier le Théorème de Noguchi et Sunada ([11]): "Si X est une variété propre et lisse sur k, à fibré cotangent ample, et R une courbe algébrique, l'ensemble des applications rationnelles séparables non constantes de R dans X est fini".

Le paragraphe 1 est consacré à l'étude des suites exactes de fibrés de la forme: $0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$ sur un schéma S de type fini sur un corps k, où F est ample, suites exactes qui apparaîtront à maintes reprises dans la suite. Nous montrons en particulier que si E n'est pas ample, il existe un schéma Z de dimension strictement positive, un morphisme $Z \longrightarrow S$ fini, birationnel sur son image, tels que l'image réciproque de la suite soit scindée sur Z.

Le paragraphe 2 rappelle un critère d'amplitude dû à Gieseker ([4]), pour un fibré engendré par ses sections globales, et en donne une démonstration plus simple que la démontration originale.

Le paragraphe 3 est consacré à des remarques concernant les variétés à fibré cotangent ample, et essentiellement à la construction explicite d'un exemple.

Au paragraphe 4, nous démontrons le Théorème. L'idée de la démonstration est analogue à celle de Grauert et utilise la remarque suivante: soit L un corps de fonctions d'une variable sur k, $-$ corps algébriquement clos de caractéristique $0 - X$ une variété sur L, $\pi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, L$ sur le morphisme structural. On a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ $-$ modules:

$$0 \longrightarrow \pi^*\Omega_{L/k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/L} \longrightarrow 0 .$$

Alors, si X provient d'une k-variété X_0, la suite est scindée, ce qui définit un champ de vecteurs tangent aux points rationnels de X provenant de points fermés de X_0.

En tenant compte du fait que $\Omega_{X/L}$ est ample et que $X(L)$

est Zariski-dense dans X, nous construisons un scindage de la suite exacte, ce qui prouve que la fibration $\pi : X \longrightarrow L$ est isotriviale. En utilisant un plongement m-canonique de X, on montre ensuite que X se redescend.

Dans le cas général, la démonstration se fait par récurrence sur le degré de transcendance de L sur k.

Notation. – Si E est un faisceau sur un schéma S, on note $E^\vee$ le fibré dual, $\mathbf{V}(E)$ le fibré vectoriel associé à E, $\mathbf{P}(E)$ le fibré projectif associé à E, et $\mathcal{O}_P(1)$ le faisceau inversible canonique sur $\mathbf{P}(E)$. Dans le cas où $E \doteq \mathcal{O}_S^{m+1}$, on note $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}_{n,S}$ et $\mathbf{V}(E) = \mathbf{A}_{n+1,S}$.

Enfin, on conviendra avec Hartshorne ([6]) que le fibré E est ample sur S si et seulement si le faisceau $\mathcal{O}_P(1)$ est ample sur $\mathbf{P}(E)$.

1. Extensions du faisceau structural par un fibré ample.

Soit S un schéma de type fini sur un corps k et :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{s} E \xrightarrow{q} F \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels sur S.

PROPOSITION 1. – *Le sous-schéma fermé* $\mathbf{P}(F)$ *est un diviseur dans* $\mathbf{P}(E)$. *Le sous-schéma ouvert* $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)$ *est un torseur sous* $\mathbf{V}(F)$, *qui représente le foncteur "des rétractions de* s".

Démonstration. – Par adjonction, s définit une section globale s' sur $\mathbf{P}(E)$ du faisceau $\mathcal{O}_P(1)$, dont le diviseur est le fermé $\mathbf{P}(F)$, c'est-à-dire qu'on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \xrightarrow{s'} \mathcal{O}_P(1) \longrightarrow \mathcal{O}_D(1) \longrightarrow 0 .$$

Sur la catégorie des S-schémas, $\mathbf{P}(E)$ (resp. $\mathbf{P}(F)$) représente le foncteur (resp. le sous-foncteur fermé) des quotients inversibles de E (resp. de F) modulo isomorphisme. Soit $u : T \longrightarrow S$ un S-schéma.

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)) = \{u \mid u \in \mathrm{Hom}_S(T, \mathbf{P}(E)),\quad u^{-1}(\mathbf{P}(F)) = \emptyset\} .$$