FRENCH EXAM SPRING 2005

Analysis

1. NOMBRES DE BETTI ℓ^2

D. Gaboriau a défini les nombres de Betti ℓ^2, $\{\beta_n(\mathcal{R})\}$, $n \geq 0$ pour toute relation d'équivalence mesurée $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables préservant la mesure. L'essentiel de sa démarche se comprend simplement si l'on tient compte de la théorie des mesures transverses sur les groupoïdes mesurables développée dans ([14]) pour formuler le théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages mesurés. Il suffit alors d'étendre (en passant du cas des groupes à celui des groupoïdes) les idées que Cheeger et Gromov ont développées dans ([7]) pour définir les nombres de Betti dans le cas «de covolume fini».

La généralisation au cas des groupoïdes des notions d'action libre (resp. propre) d'un groupe discret sur un complexe simplicial et de la dimension de Murray-von Neumann d'espaces de chaînes L^2 ne pose aucun problème ([14]). Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence ergodique à orbites dénombrables, préservant la mesure sur un espace de probabilité (X, μ). Munissons $\mathcal{R} \subset X^2$ de sa structure naturelle de groupoïde, les deux projections étant notées r et s, ($r(x,y) := x$ et $s(x,y) := y$) et la loi de composition $(x,y) \circ (y,z) := (x,z)$. Un $\mathcal{R}$-espace discret est un foncteur mesurable Y de la petite catégorie $\mathcal{R}$ vers celle des ensembles dénombrables. La réunion $\overline{Y} := \cup_{x \in X} Y(x)$ est un espace borélien standard, la projection $\pi : \overline{Y} \to X$, $\pi(z) = x$, $\forall z \in Y(x)$ et l'action $Y(x,y) : Y(y) \to Y(x)$ sont boréliennes. On ne s'intéresse qu'aux $\mathcal{R}$-espace discrets *réguliers* obtenus par réduction $\tilde{\mathcal{R}}_B$ de la somme directe $\tilde{\mathcal{R}}$ d'une infinité dénombrable de copies du foncteur $\mathcal{R}(x) := r^{-1}(x)$ par un borélien invariant B. L'invariance de la mesure μ montre alors que la mesure $\tilde{\mu}(F)$ ne dépend ni du choix d'un domaine fondamental F tel que $\mathcal{R}F = B$ ni de l'identification de Y avec $\tilde{\mathcal{R}}_B$. C'est la *mesure transverse* $\Lambda(Y)$ ([14]). En composant Y avec le foncteur ℓ^2 qui à un ensemble dénombrable Z associe l'espace de Hilbert $\ell^2(Z)$, on obtient un foncteur mesurable (représentation) de $\mathcal{R}$ vers la catégorie des espaces de Hilbert séparables. Son commutant est une algèbre de von Neumann semi-finie $End_\Lambda(\ell^2(Y))$ qui possède une unique trace normale semi-finie Tr_Λ telle que

$$Tr_\Lambda(1_Z) = \Lambda(Z)$$

pour tout borélien $\mathcal{R}$-invariant Z. De plus $End_\Lambda(\ell^2(Y))$ agit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ intégrale directe des $\ell^2(Y(x))$ sur (X, μ). C'est l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{H}$ pour la structure évidente de $L(\mathcal{R})$-module hilbertien et la dimension de Murray-von Neumann de ce module est égale à $Tr_\Lambda(1)$ (Voir ([14]).

2

Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial est un foncteur mesurable Σ vers la catégorie des ensembles simpliciaux dénombrables et l'on ne s'intéresse qu'au cas où le $\mathcal{R}$-espace discret $\Sigma^{(0)}$ des sommets est régulier (il en va alors de même pour les $\Sigma^{(n)}$). Dans le cas des feuilletages des variétés compactes, la compacité ambiante suffisait à régler les problèmes d'uniformité, mais dans le cas général traité par Gaboriau les nombres de Betti ne sont plus nécessairement finis et il faut ajouter une étape intermédiaire (analogue à ([7])) avant de définir ces nombres.

DÉFINITION 1.1 ([28]). — *Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est uniformément localement borné ssi il existe $N < \infty$ tel que tout $x \in \Sigma^{(0)}$ soit le sommet d'au plus N simplexes et si $\Lambda(\Sigma^{(0)}) < \infty$.*

En composant Σ avec le foncteur qui associe à un complexe simplicial localement borné le complexe de ses chaînes ℓ^2,

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0^{(2)} \xleftarrow{\partial_1} C_1^{(2)} \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n^{(2)} \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1}^{(2)} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \cdots$$

on obtient un complexe de $L(\mathcal{R})$ modules.

DÉFINITION 1.2 ([28]). — (i) *L'homologie L^2 d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial uniformément borné Σ est le $L(\mathcal{R})$-module*

$$H_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) := Ker\partial_n / \overline{Im\partial_{n+1}}$$

(ii) *L'homologie L^2 d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est la limite inductive des homologies L^2 de ses sous-complexes uniformément bornés.*

Ces deux définitions sont compatibles entre elles. La deuxième ne donne pas nécessairement un $L(\mathcal{R})$-module hilbertien mais W. Luck ([37]) a montré comment prolonger la dimension de Murray-von Neumann : Dim_M au cas des modules généraux sur un facteur fini M. Cela permet de définir les nombres de Betti d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ comme la dimension généralisée,

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}) := \mathrm{Dim}_{L(\mathcal{R})}(H_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)).$$

Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est dit n-connexe ssi $\Sigma(x)$ est n-connexe pour tout $x \in X$. Le résultat essentiel de D. Gaboriau s'énonce alors ainsi,

THÉORÈME 1.3 ([28]). — *Tous les $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux n-connexes ont le même nombre de Betti $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R})$.*

On définit alors $\beta_n(\mathcal{R})$ comme la valeur commune des $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R})$ pour Σ un $\mathcal{R}$-complexe simplicial n-connexe. L'existence d'un tel complexe s'obtient en composant le foncteur $\tilde{\mathcal{R}}$ ci-dessus avec celui qui associe à tout ensemble dénombrable Z le complexe simplicial universel EZ tel que $EZ^{(0)} = Z$.

COROLLAIRE 1.4 ([28]). — (i) *Soit Γ un groupe discret agissant librement sur un espace de probabilité (X, μ) alors $\beta_n(R_\Gamma) = \beta_n(\Gamma)$.*

(ii) *Deux groupes discrets orbitalement équivalents ont les mêmes nombres de Betti ℓ^2.*

(On dit que deux groupes discrets Γ_j sont orbitalement équivalents s'ils possèdent une action ergodique libre sur un espace de probabilité engendrant la même relation d'équivalence.)

Pour obtenir les corollaires 1 et 2, nous prouvons des résultats plus précis faisant intervenir une nouvelle cohomologie introduite par Lichtenbaum [44] (corollaire 3.8).

COROLLAIRE 3 (cor. 2.5). – *La conjecture de Beilinson–Soulé est vraie en poids n pour K pourvu que $n \leqslant 2$ ou que $d \leqslant 2$.*

À ma connaissance, ce sont les premiers exemples non triviaux (au-delà de la dimension 1) où cette conjecture est explicitement démontrée. Toutefois, pour $d = 2$ ou pour $n = 2$, $d = 3$, les résultats de [57] suffiraient (voir [57, th. 4 iii)] et la démonstration du corollaire 2.5).

COROLLAIRE 4 (th. 4.6). – *Si $d = 2$, on a des isomorphismes canoniques pour tout $n \geqslant 0$*

$$\Big(K_n^M(K) \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n-1} H^{2i-n-1}(K, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i))\Big) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} K_n(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

où

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i) = \varinjlim_{(m, \operatorname{car} k)=1} \mu_m^{\otimes i}.$$

Les facteurs $\otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ proviennent du fait que nous utilisons la conjecture de Milnor prouvée par Voevodsky [64] (noter que l'homomorphisme lui-même n'est pas défini avant cette tensorisation); on pourrait les supprimer si la conjecture de Bloch–Kato était entièrement démontrée. Si l'on fait "tendre k vers l'infini" dans le théorème 4, on obtient une confirmation partielle d'une conjecture de Suslin [60, conj. 4.1 et note] : si un corps F contient un corps algébriquement clos F_0, $K_*(F)$ est engendré multiplicativement par $K_1(F)$ et $K_*(F_0)$ (corollaire 4.7 et remarque 4.8). Ce résultat est faux en caractéristique zéro d'après de Jeu [27].

COROLLAIRE 5 (cor. 2.6). – *Supposons $d = 2$, et soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions E et de corps résiduel K. Alors la conjecture de Gersten est vraie pour la K-théorie algébrique de A : pour tout $n \geqslant 0$, la suite*

$$0 \to K_{n+1}(A) \to K_{n+1}(E) \to K_n(K) \to 0$$

est exacte.

La démonstration du théorème 1 utilise trois ingrédients de manière essentielle : le fait que la conjecture de semi-simplicité est vraie pour la cohomologie l-adique de X, la semi-simplicité de la catégorie des motifs modulo l'équivalence numérique due à Jannsen [26] et un raffinement d'un résultat de Kimura [39, prop. 7.5] dû à André et à l'auteur [2, prop. 9.1.14]. La technique de démonstration, quant à elle, remonte à Soulé [57] via Geisser [16].

Le corollaire 1 se déduit du théorème 1 de manière relativement classique [48,49] ; toutefois, l'introduction de la cohomologie de Lichtenbaum mentionnée ci-dessus simplifie bien les choses. Il faut un peu d'effort pour déduire la version "globale" des conjectures de Lichtenbaum de leur version localisée en chaque nombre premier : à cet égard, le lemme 3.9 est fort utile.

Le corollaire 3, quant à lui, se déduit assez facilement du résultat de Geisser selon lequel la conjugaison des conjectures de Tate et de Beilinson implique la conjecture de Parshin (*cf.* corollaire 2.2).

La méthode de démonstration du théorème 1 et du corollaire 1 conduit à de nouvelles formulations des trois conjectures dont nous avons démontré l'équivalence dans [35, th. 3.4] : voir théorème 5.2.

Cet article est construit comme suit. Au §1, nous démontrons le théorème 1. Dans les paragraphes suivants, nous "tirons les marrons du feu" : cette opération demande à l'occasion

④

le port de gants ignifuges. Comme indiqué ci-dessus, les conséquences que nous donnons sont toutes des cas particuliers de conséquences des trois conjectures équivalentes de [35, th. 3.4], dont beaucoup ont été déjà dégagées dans [33] : nous nous sommes efforcé de rédiger les démonstrations de telle manière qu'elles puissent être reproduites telles quelles quand ces conjectures seront démontrées.

Au §2 nous donnons les conséquences les plus immédiates du théorème 1, dont les corollaires 3 et 5. Au §3, nous introduisons la cohomologie de Lichtenbaum (à coefficients dans les complexes de cycles de Bloch), étendons les classes de cycles motiviques l-adiques de [35] ($l \neq p = \operatorname{car} k$) en des classes émanant de la cohomologie de Lichtenbaum motivique et construisons une classe de cycle p-adique correspondante ; nous démontrons ensuite leur bijectivité pour $X \in B_{\mathrm{tate}}(k)$. Nous en déduisons le corollaire 1 et des propriétés de finitude pour la cohomologie motivique de Lichtenbaum, meilleures que pour la cohomologie motivique étale (et conjecturées par Lichtenbaum dans [44, introduction] pour toute variété projective lisse). Nous en déduisons aussi une formule pour le conoyau de l'application "classe de cycle l-adique entière" $CH^n(X)\otimes \mathbf{Z}_l \to H^{2n}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n))$ (corollaire 3.12). Enfin, dans le §5, nous investigons la mesure dans laquelle les méthodes de cet article pourraient rapprocher l'échéance de la démonstration des conjectures indiquées.

5

Applied

Nous présentons ici la paramétrisation du problème anisotrope, qui nous a permis de contourner les difficultés numériques rencontrées par une méthode de volumes finis. La méthode que nous décrivons s'applique aussi bien à d'autres schémas numériques, sous réserves de certaines conditions de linéarité que nous énoncerons plus loin. Nous renvoyons à [6] pour une des premières applications des idées que nous utilisons ici.

Soit $\overline{\mathcal{T}}$ un maillage (cartésien par exemple) de $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ la partie du maillage ne contenant pas les points du bord. Nous notons $f_{\mathcal{T}} = (f_i)_{i \in \mathcal{T}}$ le vecteur des valeurs en chacun des noeuds de $\mathcal{T}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, $W_{\mathcal{T}}$ désigne le vecteur $(W_i)_{i \in \mathcal{T}}$ destiné à approximer $W(x, y)$ la solution de (1), (2), et $\sigma_{\mathcal{T}}$ est le vecteur des matrices de conductivité sur les noeuds de $\mathcal{T}$. Soit à résoudre le système linéaire discrétisant (1), (2) :

$$AW_{\mathcal{T}} = b_{\mathcal{T}} - d_{\mathcal{T}}, \tag{3}$$

où A est la matrice du système linéaire obtenu grâce à un schéma volumes finis (par exemple), $W_{\mathcal{T}}$ est la solution recherchée, $b_{\mathcal{T}}$ est la prise en compte du second membre de (1) et $-d_{\mathcal{T}}$ est la prise en compte des conditions de Dirichlet. Les tests que nous avons menés avec un schéma volumes finis relativement simple [3,7] montrent que la discrétisation (3) n'est pas adaptée lorsque le rapport d'anisotropie $\bar{\gamma}$ devient grand [7], et la Fig. 1 donne un exemple de résultats non satisfaisants pour $\bar{\gamma} = 10^6$. Nous constatons dans [7] que la vitesse de convergence de la solution approchée – lorsque le pas du maillage tend vers zéro – est d'autant plus faible que γ est grand. Pour $\bar{\gamma} = 10^6$, l'erreur ne décroît quasiment pas et la solution du problème est donc hors d'atteinte.

Pour être plus explicite, la méthode consiste à résoudre N systèmes linéaires donnés par la Proposition 3.1 et de construire la série $\sum_{k=0}^{N} W_{k,\mathcal{T}}(h_0)(h - h_0)^k$. Remarquons que la résolution du système d'inconnue $W_{k,\mathcal{T}}$ est nécessaire pour calculer le second membre du système d'inconnue $W_{k+1,\mathcal{T}}$, aussi nous résolvons les systèmes successivement. Notons de plus que tous les systèmes linéaires ont la même matrice $A(\sigma(h_0))$. Aussi, puisque nous utilisons une méthode directe, le coût du calcul de cinquante termes ou plus de la série n'est pas beaucoup plus élevé que la résolution du premier système, qui nécessite la factorisation de la matrice.

Nous montrerons dans [5] que la série converge au moins pour $|h - h_0| < |h_0|$. Ainsi, comme nous l'avons indiqué plus haut en introduisant la paramétrisation, choisir $h = 1$ et $h_0 = \bar{\gamma}$ permet d'extrapoler la solution du problème anisotrope en résolvant une suite de problèmes isotropes. Remarquons que $h = 1$ est situé à l'intérieur du domaine de convergence car on cherche à résoudre le cas $\bar{\gamma}$ grand et donc $h_0 = \bar{\gamma} > 1$.

Notons ici que nous avons fait l'hypothèse que le rapport d'anisotropie est constant dans tout le domaine, ainsi il suffit de paramétrer une seule des deux valeurs propres de la matrice de mobilité pour obtenir un problème partout isotrope. Dans un travail ultérieur, nous présenterons l'extension de notre méthode au cas où le rapport d'anisotropie varie, et pour cela il faudra paramétrer les deux valeurs propres de sorte à contrôler leur quotient. Par ailleurs, le problème physique à l'origine de cette étude [4] mène à des matrices de mobilité symétriques, et ainsi à une base orthogonale de vecteurs propres, mais nous ne voyons pas d'obstacle à appliquer la méthode que nous présentons dans cette Note à des cas où les directions propres ne sont pas orthogonales. Il faudra toutefois vérifier le bon comportement de la méthode numérique si les directions propres sont proches.

4. Solution asymptotique et test de la méthode

Pour tester la méthode de paramétrisation, nous avons besoin d'une solution de référence. Pour cela, nous menons une analyse asymptotique du problème (1), (2) pour $\bar{\gamma} \to +\infty$. Le problème que nous examinons est à rapprocher de [9], et pour les références bibliographiques et le traitement de cas plus généraux, nous renvoyons à [1].

Afin de limiter le champ de l'étude, nous choisissons une configuration du champ $B(x, y)$ cohérente avec un sujet d'étude issu de la physique des plasmas [4], dont les lignes de champ sont représentées dans la Fig. (1). Avec cette configuration, on peut définir un nouveau système de coordonnées (α, β), α étant la variable orthogonale au champ B et β la variable le long de ce champ. Les lignes de champ étant les lignes $\alpha = k \in \mathbb{R}$, on note $C(\alpha)$ la portion de courbe $\overline{\Omega} \cap \{(\alpha, \beta), \beta \in \mathbb{R}\}$. Alors on note α_c la valeur de α telle que $C(\alpha_c) = \partial\Omega_c$, et α_a est telle que $\alpha \leqslant \alpha_a \Rightarrow C(\alpha) \cap \partial\Omega_a \neq \varnothing$. Enfin, les extrémités de $C(\alpha)$ sont notées $(\alpha, \beta_0(\alpha))$ et $(\alpha, \beta_1(\alpha))$.

Nous examinons la limite où $\frac{1}{\varepsilon} = \bar{\gamma}$ tend vers l'infini. En introduisant le développement de Hilbert $W(\alpha, \beta) = W_0(\alpha, \beta) + \varepsilon W_1(\alpha, \beta) + \cdots$ dans le problème ainsi traduit, par des techniques classiques d'analyse asymptotique [8] nous obtenons la proposition suivante :