French Language Exam, Fall Quarter 2006

Number Theory,
Algebra

Le produit de Petersson et de Rankin p-adique

0. Soit $p \geq 5$ un nombre premier et soit $\Lambda = \mathcal{O}[[X]]$ où $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers p-adiques d'une extension finie $K/\mathbf{Q}_p$. On fixe un générateur topologique u du groupe multiplicatif $1 + p\mathbf{Z}_p$. Pour chaque couple (F, G) de formes modulaires Λ-adiques ordinaires (voir ci-dessous pour la définition), on a construit dans [H1] un produit de Rankin p-adique $\mathcal{D}_p$, qui interpole p-adiquement les valeurs spéciales du produit de Rankin $D(s, f, g)$ pour deux spécialisations f et g de F et G, et qui est le quotient d'une série de trois variables $\Phi(X, Y, Z)$ par une série d'une variable $H(X)$, avec la propriété d'interpolation pour tout triplet critique d'entiers (k, ℓ, m) :

$$\mathcal{D}_p(u^k - 1, u^\ell - 1, u^m - 1) = \frac{\Phi(u^k - 1, u^\ell - 1, u^m - 1)}{H(u^k - 1)} = * \frac{D(m, f_k, g_\ell | \omega^{-m})}{(f_k, f_k)},$$

où " $*$ " est une constante canonique (voir Théorème 2 ci-dessous), et f_k (resp. g_ℓ) est la spécialisation de F (resp. G) au poids k (resp. ℓ), et $g_\ell | \omega^{-m}$ est la torsion de g_ℓ par une puissance ω^{-m} du caractère de Teichmüller ω. L'utilité de cette série est déjà évidente d'après les travaux de Perrin-Riou et Tilouine (par exemple, [P-R] et [T]) dans lesquels l'existence de cette série joue un rôle important. D'autre part, la construction de $\mathcal{D}_p$ donnée dans [H1] n'est pas si facile à comprendre parce que l'idée simple est en fait cachée par la complexité inéluctable dans le traitement du cas général des formes modulaires $\mathcal{I}$-adiques pour toute extension finie $\mathcal{I}$ de Λ. Dans cette petite note, en se restreignant au cas des formes modulaires Λ-adiques avec *"Neben-typus"* primitif et en se concentrant sur seulement deux variables relatives à F et G, on se propose de construire $\mathcal{D}_p$ assez simplement.

2

1. On commence par une forme modulaire parabolique $g \in S_\ell(SL_2(\mathbf{Z}))$ avec son développement de Fourier :

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,g)q^n \qquad (q = \exp(2\pi i z)).$$

Considérons d'autre part la série d'Eisenstein :

$$E_\kappa(z) = \sum_{(m,n)\in(\mathbf{Z}^2-(0))/\{\pm 1\}} (mz+n)^{-\kappa} \ (\kappa > 2).$$

Si g est une forme parabolique de poids ℓ, la série gE_κ est une forme parabolique de poids $k = \kappa + \ell$. Notons que $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ a une base $B = \{f\}$ consistant en des formes propres pour tout opérateur de Hecke. On veut regarder le coefficient $c(f)$ dans la décomposition :

$$gE_\kappa = \sum_f c(f)f.$$

Sous le produit de Petersson $(f,h) = \int_{SL_2(\mathbf{Z})\backslash H} \overline{f} g y^{k-2} dx dy$, la base B est orthogonale parce que $(f|T(n),h) = (f,h|T(n))$ pour tout opérateur de Hecke. Donc, par la formule de Shimura [Sh1, §2], on a

$$c(f) = \frac{(f,gE_\kappa)}{(f,f)} = \frac{2\Gamma(k-1)D(k-1,f,g)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)},$$

où $D(k-1,f,g) = \zeta(2s+2-k-\ell)\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a(n,f)}a(n,g)n^{-s}$.

Pour étudier le nombre $c(f)$, on peut changer le produit scalaire (,) en gardant la propriété $(f|T(n),h) = (f,h|T(n))$. Donc on veut définir un nouveau produit bilinéaire (algébrique) sur l'espace des formes modulaires. On va faire une telle construction un peu plus généralement en incluant le cas de *Neben-Typus* non-trivial. Soit N un entier premier à p et soit ψ un caractère de Dirichlet modulo Np. On suppose que le conducteur de ψ est divisible par N. On note $M_k(\Gamma_0(Np),\psi)$ l'espace des formes modulaires holomorphes avec caractères ψ. Alors, pour chaque sous-anneau A de $\mathbf{C}$ contenant les valeurs de ψ, on définit $M(A) = M_k(\Gamma_0(Np),\psi;A)$ comme le sous-espace des formes modulaires f avec coefficients $a(n,f)$ dans A. On note $S(A) = S_k(\Gamma_0(Np),\psi;A)$ le sous-espace

N2

des formes paraboliques dans $M_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$. L'effet de l'opérateur de Hecke $T(n)$ sur $M_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$ est donné sur les coefficients de Fourier par

$$a(m, f|T(n)) = \sum_{0<d|(m,n)} d^{k-1}\psi(d)a(\frac{mn}{d^2}, f).$$

Ici on a suivi la convention que $\psi(m) = 0$ si m a un diviseur commun non trivial avec Np. On écrit $h(A) = h_k(Np, \psi; A)$ l'algèbre engendrée par $T(n)$ sur A dans $\mathrm{End}_A(S(A))$. Alors il est connu que $h_k(Np, \psi; A)$ est commutative avec l'identité $T(1)$ et $S_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$ est le A-dual de $h_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$ pour l'accouplement (e.g. [H1, II, Prop. 1.2]) :

$$< h, f >= a(1, f|h).$$

Ici, on va démontrer ce fait dans le cas où A est un corps K. On voit par la formule de $T(n)$ que $< T(n), f >= a(n, f)$. Alors si $< h(K), f >= 0$, $a(n, f) =< T(n), f >= 0$ pour tout n et donc $f = 0$. Si $< h, S(K) >= 0$, alors

$$a(n, f|h) =< T(n), f|h >= a(1, f|T(n)h) =< h, f|T(n) >= 0.$$

Donc $f|h = 0$ pour tout $f \in S(K)$. Donc l'accouplement est non dégénéré des deux côtés, et on a le résultat parce que $S(K)$ est de dimension finie.

N3

④

Analysis

Sur une formule classique

Dans un mémoire célèbre ([2]), Hecke a établi que les séries de Dirichlet satisfaisant à un certain type d'équation fonctionnelle correspondent au moyen de la transformation de Mellin à certains types de formes modulaires; divers travaux, et tout particulièrement ceux de H. Maass, ont considérablement étendu la portée de cette méthode. D'autre part, on sait maintenant (cf. [4]) que, même sans quitter le cadre des formes modulaires usuelles, la méthode de Hecke peut être appliquée à des problèmes plus généraux que ceux qu'il avait envisagés lui-même, et tout indique qu'on peut encore aller beaucoup plus loin dans les voies ainsi tracées.

Du point de vue de Hecke, il s'agissait avant tout de ramener la recherche de séries de Dirichlet satisfaisant à des équations fonctionnelles à celle des formes modulaires correspondantes, considérées comme mieux connues. Mais la théorie a maintenant fait assez de progrès pour qu'on puisse aussi appliquer utilement les mêmes résultats en sens inverse, et mettre au service de la théorie des fonctions automorphes nos connaissances sur les séries de Dirichlet. Mon propos ici est seulement d'illustrer ce principe au moyen d'un exemple particulièrement simple, et que sans doute Hecke a dû connaître, bien que je n'en aie pas rencontré de mention explicite chez lui ni chez ses successeurs.

Considérons les fonctions

$$\varphi(s)=\zeta(s)\zeta(s+1), \qquad \Phi(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s).$$

L'équation fonctionnelle de la fonction zêta, jointe aux propriétés classiques de la fonction gamma, donne aussitôt pour Φ l'"équation fonctionnelle":

$$\Phi(s)=\Phi(-s).$$

Il est immédiat que Φ a un pôle double en $s=0$, des pôles simples en $s=\pm 1$, est holomorphe partout ailleurs, et est bornée pour $\sigma \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq \sigma'$, $\mathrm{Im}(s) \geqq \varepsilon$, quels que soient σ, σ' et $\varepsilon>0$. Il est clair aussi que Φ a le résidu $\zeta(2)/2\pi = \pi/12$ en $s=1$, le résidu $-\pi/12$ en $s=-1$, et que $\Phi(s)+1/2s^2$ est holomorphe en $s=0$.

La fonction φ est évidemment donnée, pour $\mathrm{Re}(s)>1$, par la série de

A 1

Dirichlet

$$\varphi(s)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{m^{-1}}{(mn)^s}.$$

La série de puissances en $q=e^{2\pi i\tau}$ qui a les mêmes coefficients est donc:

$$F(\tau)=\sum_{m,n=1}^{\infty}m^{-1}q^{mn}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}(q^n)^m\Big)=-\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q^n).$$

On reconnaît là, à un terme près, le logarithme de la fonction de Dedekind, $\eta(\tau)=q^{1/24}\prod(1-q^n)$. Plus précisément, on a:

$$F(\tau)=\frac{\pi i\tau}{12}-\log\eta(\tau).$$

On voit en même temps que F est la transformée de Mellin de Φ, c'est-à-dire qu'on a:

$$\Phi(s)=\int_0^{\infty}F(it)t^{s-1}dt,\qquad F(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi(s)(\tau/i)^{-s}ds,$$

la première formule étant valable pour $\mathrm{Re}(s)>1$, et la seconde pour $\sigma>1$, $\mathrm{Im}(\tau)>0$; dans celle-ci, on doit entendre que l'intégrale est prise le long de la droite $\mathrm{Re}(s)=\sigma$. La méthode de Hecke consiste à déplacer cette dernière droite parallèlement à elle-même de manière à l'amener sur la droite $\mathrm{Re}(s)=-\sigma$; en ce faisant, on doit tenir compte des résidus de l'intégrande aux points $s=0,\ \pm1$; le comportement de Φ à l'infini dans la bande $-\sigma\leqq\mathrm{Re}(s)\leqq\sigma$ garantit la légitimité de l'opération, qui donne:

$$F(\tau)=\frac{\pi i}{12\tau}-\frac{\pi\tau}{12i}+\frac{1}{2}\log(\tau/i)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\Phi(s)(\tau/i)^{-s}ds.$$

En raison de l'équation fonctionnelle obtenue pour Φ, le dernier terme est égal à $F(-1/\tau)$, d'où en définitive:

$$\log\eta(-1/\tau)=\log\eta(\tau)+\frac{1}{2}\log(\tau/i).$$

On reconnaît là le résultat classique de Dedekind ([1]). Bien entendu, on peut eu donner une démonstration plus directe (v. p. ex. [3]). Mais c'est sur le principe appliqué ci-dessus que j'ai surtout voulu attirer l'attention. On aurait pu traiter exactement de même la fonction $\varphi(s)=\zeta(s)\zeta(s-1)$ (c'est la fonction zêta de l'algèbre simple $M_2(Q)$ sur le corps Q des rationnels); pour ce choix de φ, la fonction Φ définie par la même formule que plus haut satisfait cette fois à l'équation fonctionnelle $\Phi(s)=-\Phi(2-s)$, d'où on déduit le comportement de la transformée de Mellin de Φ, qui est la fonction $F(\tau)=\frac{1}{24}-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau)$. On notera que, dans ces exemples, l'équation fonctionnelle de Φ ne comporte pas de facteur exponentiel; c'est ce qui permet de les traiter au moyen du seul théorème de Hecke. Lorsqu'il en est autrement, il devient nécessaire de mettre en oeuvre les moyens supplémentaires que fournit ma note [4].

Séminaire BOURBAKI
37ème année, 1984-85, n° 646

Geometry

Juin 1985

DÉCOMPOSITION DES POLYÈDRES : LE POINT SUR LE TROISIÈME PROBLÈME DE HILBERT

par Pierre CARTIER

Introduction

En 1900, se tient l'Exposition Universelle, à Paris. A cette occasion, le Second Congrès International des Mathématiciens rassemble la fine fleur de l'époque, sous la présidence de Poincaré. L'exposé de Hilbert est l'un des plus attendus. Il le donne le mercredi matin, 8 août 1900, par une grande chaleur, et y présente sa fameuse liste de 23 problèmes. D'ailleurs, pressé par le temps, il suit le conseil de Hurwitz et de Minkowski, et n'expose qu'une sélection de 10 problèmes. Le texte de son exposé paraîtra en 1902, en allemand -c'est le texte reproduit dans ses oeuvres complètes- et en anglais -traduction dans le Bulletin de la Société Mathématique Américaine, reprise dans le symposium de 1974.

Voici le troisième problème, tel que je le traduis de l'allemand :

"3. *L'égalité du volume de deux tétraèdres ayant des bases et des hauteurs égales.*

Gauss exprime, dans deux lettres à Gerling, son regret que certains théorèmes de la géométrie des solides dépendent de la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire, pour employer la locution moderne, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier le théorème d'Euclide (livre XII, prop. 5), selon lequel deux pyramides à base triangulaire sont dans le même rapport que leurs bases. Mais le problème analogue pour les aires planes a été complètement résolu ; Gerling a aussi réussi à démontrer l'égalité des volumes de deux polyèdres symétriques au moyen d'une subdivision en parties superposables (par déplacement). Cependant, il me semble impossible de prouver en général de cette manière le théorème d'Euclide cité plus haut, et il s'agirait de donner une démonstration rigoureuse de cette impossibilité. Une telle démonstration serait obtenue, si nous réussissions à *trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui aussi ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible.*"

L'histoire de ce problème est curieuse. Avant la publication de Hilbert, Dehn ([11] et [12]) a donné une solution sous la forme réclamée par Hilbert ; ce qui est plus important, il a défini l'invariant qui porte son nom, et sur lequel nous reviendrons plus loin. D'ailleurs, lors de la présentation orale, Hilbert n'avait pas gardé le 3ème problème dans sa liste restreinte. Considéré comme résolu -et comme faisant partie de la géométrie élémentaire- il ne continue à occuper que quelques géomètres suisses, danois ou russes. En 1974, un colloque à De Kalb (U.S.A.) fait le point sur les problèmes de Hilbert. Il y a bien un exposé oral sur le 3ème problème, mais aucun texte dans les deux volumes publiés [2].

Pourtant, depuis 1975, divers problèmes de topologie et de géométrie différentielle amènent à considérer la cohomologie des groupes de Lie rendus discrets, et des algèbres de Lie réelles vues comme algèbres sur le corps des nombres rationnels. Les mêmes groupes se retrouvent en K-théorie algébrique. L'analogie de méthode avec les problèmes contemporains liés aux champs de jauge est troublante ; elle laisse supposer des liens inattendus entre arithmétique, topologie et physique mathématique, exprimés par l'homologie cyclique. D'une certaine manière, cet exposé n'est donc que la suite de mon exposé précédent (n° 621).

Je remercie bien chaleureusement J.-L. Cathelineau, K. Chemla, D. Husemoller et J. Milnor pour la documentation qu'ils m'ont fournie, et aussi C. Kassel, J.-L. Loday et C.H. Sah pour m'avoir permis d'utiliser leurs notes non publiées pour la préparation de cet exposé.

1. PRÉLUDE : AIRES ET VOLUMES AVANT 1900

1.1. Euclide et les aires planes

Dans les Éléments, la fin du Livre I et le Livre VI sont consacrés aux aires planes. Le début du Livre I est consacré aux cas d'égalité des triangles ; on devrait plutôt dire "congruence des triangles" si l'on nomme congruentes deux figures A et B pour lesquelles il existe un déplacement direct amenant A en coïncidence avec B. A partir de la proposition I.34, on s'intéresse à diverses situations où l'on peut affirmer que des triangles ou des parallélogrammes ont la même aire (voir Table I). En particulier, on a la proposition I.41, que l'on pourrait paraphraser par l'énoncé classique : l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur. Mais rien ne serait plus contraire à l'esprit d'Euclide ; il ne définit nulle part la notion d'aire, et il n'est pas question d'attribuer une valeur numérique à une aire.

Si l'on analyse les démonstrations d'Euclide et que l'on se réfère aux *notions communes* (ou NC, axiomes généraux qui suivent au début des Éléments la liste des postulats géométriques), on se rend compte qu'il considère dans l'ensemble des polygones[1] une relation d'équivalence que l'on interprétera comme signifiant que

[1] Euclide ne donne pas vraiment de définition générale d'un polygone, mais considère surtout des triangles et des quadrilatères (définitions 19 à 22).

A et B ont même aire. Cette relation d'équivalence[1] satisfait aux règles suivantes :

a) des figures congruentes sont équivalentes (NC 4) ;

b) si la figure A est composée de deux morceaux A' et A" , et de même B est composée de B' et B" , de l'équivalence de A' avec B' et de A" avec B" , on conclut à l'équivalence de A avec B (NC 2) ;

c) sous les hypothèses de b), si A est équivalente à B , et A' à B' , alors A" est équivalente à B" (NC 3) ;

d) si la figure A est composée de n parties équivalentes à A' , et B de n parties équivalentes à B' , de l'équivalence de A et B on infère celle de A' et B' .

Le couronnement du Livre I est le *théorème de Pythagore* : dans un triangle rectangle ABC de côtés a,b,c , où l'angle en A est droit, on a $a^2 = b^2 + c^2$. Cette égalité s'interprète de la manière littérale suivante[2] : le carré construit sur le côté a est équivalent à une figure composée de deux carrés égaux à ceux construits sur les côtés b et c . Dans la Table II, on a reproduit diverses configurations qui établissent ce théorème par des manipulations d'aires.

Au Livre VI, Euclide utilise les résultats acquis sur les proportions au Livre V ; il va pouvoir étudier les similitudes, et démontrer les deux résultats fondamentaux suivants :

a) Si la figure A' est semblable dans le rapport t à la figure A , le rapport des aires de A' et A est t^2 .

b) Si, dans un parallélogramme, on multiplie deux côtés parallèles dans le rapport t et les deux autres dans le rapport t' , alors l'aire est multipliée par tt' .

Au passage, on établit le théorème de Thalès par la méthode des équivalences d'aires.

(9)

Math. Education
and Computer Science,
Applied Math.

L'informatique et la mathématique. L'informatique est partout. L'informatique influe sur toutes les sciences. Les ordinateurs sont utilisés dans toutes les disciplines. Directement, au plan du laboratoire et du travail scientifique. Indirectement, quand il s'agit de communiquer, de produire ou de consommer l'information. Les effets indirects sont déjà de grande portée: l'informatique a permis aux bases de données bibliographiques d'absorber la croissance exponentielle de la production scientifique (qui double tous les dix ans, si on la mesure en nombre d'articles publiés); elle permettra, sans doute, de faire face aux nouveaux besoins de publication et de communication rapide. Ces possibilités techniques produisent de nouvelles exigences intellectuelles. Pour prendre un exemple, les *Mathematical Reviews* sont devenues un outil de travail indispensable, mais elles ne jouent plus le rôle de guide et de critique qu'elles avaient il y a 30 ans. Pour se retrouver dans la littérature scientifique contemporaine, il faut des synthèses, des mises au points, des exposés historiques et critiques: on voit cette sorte d'articles scientifiques, qualifiés autrefois de "secondaires" prendre une place de premier plan. Le fait est général: *ni la puissance de calcul, ni la capacité de mémoire, ni les logiciels les plus élaborés, ni les systèmes experts n'éliminent l'activité intellectuelle; l'informatique déplace cette activité vers des champs nouveaux, et la stimule.*

L'informatique est entrée dans l'enseignement. L'usage des microordinateurs s'est largement répandu en Europe, aux Etats-Unis, au Japon [**I3**, pp. 14–16, 22–23, 39, 43–45]. L'Open University du Royaume Uni a introduit des graphiques animés produits par ordinateurs dans un cours de mathématiques de base dès 1971 [**I3**, p. 24]. En Union Soviétique, des cours de programmation pour étudiants en mathématiques existent depuis 1959, et en 1986 un cours sur les bases de l'informatique ("science de l'informatique et techniques de calcul") est introduit dans les écoles secondaires [**I3**, p. 8]. Avec des réticences diverses (notamment au Japon) les calculettes font une entrée en force dans les enseignements élémentaire et secondaire. Depuis 1978, elles sont autorisées pour tous les examens du "General Certificate of Education" en Ecosse [**ICR**]. A partir de 1986, elles figurent explicitement dans les programmes français de mathématiques au début des études secondaires (11-12 ans).

L'informatique est partout, mais inégalement distribuée. Les investissements et les frais de maintenance interdisent aux pays pauvres la diffusion massive des microordinateurs [**I-I**]. Par contre, une distribution massive de calculettes comme fournitures scolaires est envisageable—au même titre qu'une distribution massive de livres d'enseignement. C'est une raison, parmi d'autres, pour s'intéresser particulièrement au renouvellement possible de l'enseignement mathématique par l'usage des calculettes. En retour, les besoins de l'enseignement peuvent amener à de nouvelles spécifications pour les calculettes destinées aux fournitures scolaires.

Enfin l'informatique est doublement liée aux mathématiques. *Comme moyen nouveau de calcul et d'écriture, elle a, et elle aura de plus en plus, un impact sur les pratiques, les valeurs, et les concepts même des mathématiques. Comme outil à base mathématique, son histoire est liée à celle de la logique, et on doit s'attendre á un va et vient constant entre l'informatique (c'est-à-dire les ordinateurs et leurs usages), la logique, l'algèbre, et d'autres branches des mathématiques.*

★ ★ ★

Dans l'étude de la C.I.E.M., il était bon de commencer par là: l'influence de l'informatique sur la mathématique comme science. En particulier, sur une série d'exemples, on voit que les ordinateurs et l'informatique ont suscité de nouvelles recherches, remis à l'ordre du jour des questions étudiées il y a longtemps, et rendu possible l'étude de questions nouvelles. Ils ont multiplié brusquement nos possibilités d'observation et d'expérimentation en mathématiques. Ils ont valorisé tout ce qui peut se traduire en algorithmes. Au delà du calcul numérique, ils ont développé des possibilités de visualisation, et maintenant de calcul symbolique, qui sont de grande conséquence pour la recherche mathématique.

Cette influence est incontestable. Elle est déjà beaucoup plus profonde au niveau de la recherche que de l'enseignement. Pour certains, elle apparaît comme une menace. D'abord, une menace sur l'esprit même de la mathématique—comme science de l'ordre et des concepts unificateurs; la preuve du théorème des quatre couleurs au moyen de l'ordinateur peut être correcte, elle n'est pas "belle." Ensuite, une menace sur l'avenir du métier de mathématicien, concurrencé par l'appel des métiers de l'informatique, et par conséquent une menace sur l'héritage mathématique.

Au niveau de l'enseignement, on peut aussi énumérer les vues pessimistes:

- les élèves vont devenir paresseux
- ils ne vont plus savoir calculer à la main
- ils ne s'intéresseront plus qu'à l'informatique
- les enseignants ne pourront jamais s'adapter aux nouveaux outils
- ceux qui s'adapteront deviendront informaticiens
- si en plus on touche au contenu de l'enseignement, on court au même désastre qu'avec les "mathématiques modernes."

Ces dangers existent. Mais il faut également apprécier les chances nouvelles. Il y a de belles mathématiques à faire pour dominer l'usage des ordinateurs, et on peut attendre, dans l'avenir, un stimulant venant de l'informatique aussi important que le stimulant—classique—venant de la physique; aujourd'hui déjà, les "mathématiques discrètes" se trouvent ainsi stimulées et valorisées. D'autre part—et c'est là une raison essentielle d'être optimiste—les ordinateurs et même les calculettes ressuscitent de très belles mathématiques qui étaient oubliées ou négligées. J'illustrerai cela par quelques exemples tout à l'heure. Cette possibilité de réanimer des sujets dormants—parfois pendant des siècles—est un trait particulier des mathématiques dans l'ensemble des sciences, et c'est ce qui en fait un héritage extrêmement précieux. C'est une justification, pour le présent et pour l'avenir, d'une formation en grand nombre de jeunes mathématiciens.

On peut déjà dire qu'en face des ordinateurs, les élèves sont souvent actifs, intéressés et agiles—ils acquièrent l'usage des outils plus vite que leurs professeurs. Ils adoptent facilement l'attitude expérimentale. Mais ils ne peuvent pas découvrir seuls les bonnes voies où s'engager. L'expérience mathématique des enseignants est irremplaçable. Face à l'ordinateur, l'enseignant devient un conseiller. Plus encore que par le passé, l'essentiel est sa qualification comme mathématicien.

Après ces vues très générales, je vais évoquer des choses très anciennes sur lesquelles l'informatique, les ordinateurs et les calculettes font porter un regard neuf: les nombres, les figures, les symboles, les algorithmes.

Les nombres. Avec les cailloux (l'origine du "calcul") on a une conception claire de nombres entiers petits. Pour les nombres entiers plus grands, la vision qu'on en a dépend du mode de notation. Chez les Grecs de l'Antiquité, le système usuel permettait d'écrire 3 ou 700 avec une seule lettre, mais ne permettait pas d'écrire 2.100 (d'où la question de Socrate au savant Hippias: "toi qui es si savant, si on te demandait combien fait 3 fois 700, tu saurais répondre avec célérité et exactitude?"). Aujourd'hui, ne fût-ce que par la radio et la télévision, tous les enfants sont familiarisés avec des nombres entiers très grands; à chaque élection par exemple, on voit défiler des grands nombres, et des rapports exprimés en

E 3

pourcentages. On change constamment d'échelle—le budget de la famille, le budget de la cité, les dépenses militaires dans le monde; l'âge de l'humanité, de la terre, de l'univers; les dimensions de l'atome, du système solaire, etc. Ce qui permet d'appréhender ces nombres et ces changements d'échelle, c'est l'écriture décimale et les puissances de 10. Ce qu'affiche une calculette, c'est justement une écriture décimale, et éventuellement (en virgule flottante) une puissance de 10.

L'enfant qui dispose d'une calculette se trouve immédiatement devant de grands nombres entiers, et aussi devant des développements décimaux assez longs. Des développements décimaux assez longs permettent d'imaginer naturellement des développements décimaux illimités. Ainsi la définition d'un nombre réel par un développement décimal illimité—esquissée par Simon Stevin il y a tout juste quatre siècles [B]—mérite d'être bien connue des enseignants. En France, un livre vient de paraître, sur les fondements de la géométrie, dont le premier chapitre est la théorie des réels à partir des développements décimaux illimités; c'est une présentation simple et complète, à l'intention des enseignants du secondaire, qui me paraît venir à son heure [F].

Cela ne supprime pas, mais au contraire valorise, la représentation du nombre réel positif comme rapport de deux longueurs. L'algorithme d'Euclide pour trouver une partie aliquote commune à deux longueurs, nous allons le retrouver comme algorithme des fractions continues.