French Language Exam – Spring 2006

Algebra

THÉORÈME 1. *Si* x, y, z *sont des entiers* $\geqslant 1$ *tels que* $x^2 + y^2 = z^2$, *il existe un entier* d *et des entiers étrangers* u, v *tels que* (*à une permutation près de* x *et* y) *on ait:*

2. $x = d(u^2 - v^2)$ $\qquad y = 2\,duv$ $\qquad z = d(u^2 + v^2)$

Un calcul facile montre que les formules (2) donnent des solutions de $x^2 + y^2 = z^2$. Réciproquement soient x, y, z des entiers $\geqslant 1$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Quitte à diviser x, y, z par leur p.g.c.d., on peut les supposer étrangers dans leur ensemble; ils sont alors étrangers deux à deux, car, si, par exemple, x et z ont un facteur premier commun p, alors p divise $y^2 = z^2 - x^2$ et donc y. En particulier deux des nombres x, y, z sont impairs, et le troisième est nécessairement pair. Les nombres x et y ne peuvent être tous deux impairs, car sinon, on aurait $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ d'où $z^2 \equiv 2 \pmod{4}$ contrairement au fait que z^2 est un carré. On a donc, après échange éventuel de x et y.

3. x impair, y pair, z impair.

Écrivons l'équation

4. $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)\,(z + x)$.

Comme le p.g.c.d. de $2x$ et de $2z$ est 2, et que $2x = (z + x) - (z - x)$ et $2z = (z + x) + (z - x)$, le p.g.c.d. de $z - x$ et $z + x$ ne peut être que 2. Posons $y = 2y'$, $z + x = 2x'$, $z - x = 2z'$, où y', x', z' sont des entiers, car y, $z + x$ et $z - x$ sont pairs par (3). On a alors $y'^2 = x'z'$. Comme x' et z' sont étrangers, la décomposition en facteurs premiers de y'^2 montre que x' et z' sont des *carrés* u^2 et v^2 : en effet tout facteur premier de y'^2 va, avec son exposant pair, soit tout entier dans x', soit tout entier dans z'. On a donc $z + x = 2u^2$, $z - x = 2v^2$, $y^2 = 2u^2 . 2v^2$, d'où $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$. Ici u et v sont étrangers, sinon x, y, z auraient un facteur premier commun. On en déduit (2) en remultipliant par le p.g.c.d.d. CQFD.

1. Voir C. L. Siegel — « Gesammelte Werke », t. III, p. 436-442.

Théorème 2. *L'équation* $x^4 + y^4 = z^2$ *n'a pas de solution en nombres entiers* $x_1 y_1 z \geqslant 1$.

Raisonnons par l'absurde. On a alors une solution (x, y, z) où z est *minimal*. Pour celle-ci, x, y et z sont étrangers deux à deux : en effet, si par exemple, x et y avaient un facteur premier commun p, alors p^4 diviserait z^2, donc p^2 diviserait z, et $\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p^2}\right)$ serait une solution contredisant la minimalité de z; les deux autres cas sont analogues et plus faciles. Comme notre équation s'écrit $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$, on peut lui appliquer le th. 1 : après permutation éventuelle de x et y, on voit qu'on a des entiers $u, v \geqslant 1$ et étrangers tels que

5. $x^2 = u^2 - v^2, \qquad y^2 = 2uv, \qquad z = u^2 + v^2.$

Comme $4 | y^2$, la relation $y^2 = 2uv$, montre que l'un des deux nombres u et v est pair; l'autre est nécessairement impair; la répartition « u pair, v impair » donne $u^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $v^2 \equiv 1 \pmod{4}$, d'où $x^2 = u^2 - v^2 \equiv -1 \pmod{4}$ ce qui est absurde; donc u est impair et $v = 2v'$. La relation $y^2 = 4uv'$ et le fait que u et v' sont étrangers montrent que u et v' sont des carrés a^2 et b^2. Appliquons encore le th. 1, cette fois à l'équation $x^2 + v^2 = u^2$ (cf. (5)); comme x et u sont impairs, v pair, et x, v, u étrangers deux à deux, on a des entiers étrangers $c, d \geqslant 1$ tels que :

6. $x = c^2 - d^2, \qquad v = 2cd, \qquad u = c^2 + d^2.$

Or, de $v = 2v' = 2b^2$, on déduit $cd = b^2$, de sorte que c et d sont encore des carrés x'^2 et y'^2, car ils sont étrangers. Comme $u = a^2$, la dernière équation (6) s'écrit

7. $a^2 = x'^4 + y'^4$

et a la *même forme* que l'équation donnée. Mais, on a, par (5), $z = u^2 + v^2 = a^4 + 4b^4 > a^4$, d'où $z > a$, ce qui contredit le caractère minimal de z. Notre assertion est donc démontrée

> Une légère variante de notre démonstration montre que, étant donnée une solution (x, y, z) en entiers $\geqslant 1$ de $x^4 + y^4 = z^2$, on construit une suite (x_n, y_n, z_n) de telles solutions, où la suite (z_n) est strictement décroissante, ce qui est absurde. Ceci est la méthode de *descente infinie*, due à Fermat.

Corollaire. *L'équation* $x^4 + y^4 = z^4$ *n'a pas de solution en nombres entiers* $x, y, z \geqslant 1$.

En effet cette équation s'écrit $x^4 + y^4 = (z^2)^2$, et on applique le th. 2.

Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Helsinki, 1978

TOPOLOGY

FRENCH 506

Résultats Récents sur la Conjugaison Différentiable

Michael Robert Herman

1. Introduction. On pose $T^n = R^n/Z^n$ et on désigne la mesure de Haar de T^n par m.

1.1 Si M est une variété compacte connexe R-analytique, on désigne par $\mathrm{Diff}^r(M)$ (resp. $\mathrm{Diff}^r_+(M)$) le groupe des difféomorphismes de classe C^r de M (resp. qui sont C^r-isotopes à l'identité).

On munit $\mathrm{Diff}^r(M)$ de la C^r topologie et $\mathrm{Diff}^r_+(M)$ est alors la composante connexe de l'Id. Ici $r \in \{0, +\infty, \omega\} \cup \{x \in R \mid x \geq 1\}$; si $r=0$, c'est le groupe des homéomorphismes de T^n; si $r \geq 1$, $r \in R^* - N$, c'est le groupe des difféomorphismes de classe C^r vérifiant une condition d'Hölder d'exposant $r-[r]$ sur la $[r]$ème dérivée; si $r=\omega$ c'est le groupe des difféomorphismes R-analytiques de M. Si $r \in N \cup \{+\infty\}$ alors $\mathrm{Diff}^r(M)$ est un groupe topologique Polonais pour la C^r-topologie.

1.1 *Problème* 1. *Etudier la structure de groupe de* $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Par exemple. Quand f et g sont-ils C^r-conjugués (i.e. il existe $h \in \mathrm{Diff}^r_+(M)$, tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$)?

Quelle structure peuvent avoir les C^r-centralisateurs

$$\text{(i.e. } \mathrm{Cent}^r(f) = \{g \in \mathrm{Diff}^r(M) \mid g \circ f \circ g^{-1} = f\})?$$

1.2 Remarque. Si f et $g \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$, il y a une infinité de problèmes: à quelles conditions f et g sont-ils $C^0, C^1, \ldots$ etc conjugués?

1.3. Exemple. Soient $T^2 = R^2/Z^2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha, x_2 + \varphi(x_1))$ mod Z^2, avec $\alpha \in T^1 - Q/Z$ et $\varphi \in C^\infty(T^1)$ vérifiant $\int_{T^1} \varphi(\theta)\, d\theta = 0$. On montre (voir [H]) que f est C^r-conjugué à $R_{(\alpha,0)}:(x_1, x_2)\to(x_1+\alpha, x_2)$ dans $\mathrm{Diff}_+^r(T^2)$ si et seulement s'il existe $\psi\in C^r(T^1)$ vérifiant $\psi-\psi\circ R_\alpha=\varphi$ (considérer $(x_1, x_2)\to(x_1, x_2+\psi(x_1))$).

Si α est un nombre de Liouville (i.e. α est irrationnel et pour tout entier $i\geq 1$, il existe $p_i/q_i\in Q, (p_i, q_i)=1$, $q_i\geq 2$ vérifiant $|\alpha-(p_i/q_i)|<q_i^{-i}$) et si $r\in N$ est donné, on peut choisir φ tel que ψ soit de classe C^r mais non $C^{r+\varepsilon}$. Dans ce cas on peut montrer que $\mathrm{Cent}^\infty(f)$ contient un sous-groupe fermé pour la C^∞-topologie, qui est monothétique, non localement compact et totalement discontinu.

1.4 Pour le problème de la simplicité des groupes $\mathrm{Diff}_+^r(M)$, voir **[Ma$_1$]**, **[H$_1$]**, **[H$_2$]**, **[Th]**; pour les applications aux feuilletages voir **[Ma$_2$]**, **[Law]**.

1.5 Une question importante est la suivante:

Problème 2. Soit $f\in\mathrm{Diff}^\infty(M)$, *à quelles conditions sur* M *et* f *existe-t-il un* C^∞*-voisinage ouvert de* l'Id O, *tel que l'ensemble* $O_{f,V}^\infty=\{g^{-1}\circ f\circ g\,|\,g\in V\subset\mathrm{Diff}_+^\infty(M)\}$ *soit localement fermé et de codimension finie au voisinage de* f *(le tout pour la* C^∞*-topologie)?*

On posera dans la suite: $O_f^\infty=\{g^{-1}\circ f\circ g\,|\,g\in\mathrm{Diff}_+^\infty(M)\}$.

2. Cas de T^n. Nous allons rapidement décrire les exemples connus sur $T^n=R^n/Z^n$; on considère les translations $R_\alpha: x\to x+\alpha$, $\alpha\in T^n$.

2.1 Définition. La translation R_α de T^n satisfait à une condition diophantienne, s'il existe $\beta>0$, $C>0$, tel que pour tout $(k_1, \ldots, k_n)\in Z^n-\{0\}$ on ait

$$\left\|\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i\right\|\geqq C(\sup|k_i|)^{-\beta}$$

avec $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et si $x\in T^1$, $\|x\|$ est la distance à l'entier le plus proche d'un relevé de x à R.

2.2. Théorème (Kolmogorov **[Ko$_1$]**, Arnold **[A$_1$]**, Moser **[Mo$_1$]**.). *Soit* R_α *une translation de* T^n *satisfaisant à une condition diophantienne. Il existe un voisinage* V_{R_α} *de* R_α *dans* $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$ *tel que si* $f\in V_{R_\alpha}$, *il existe* $\lambda\in T^n$ *et* $g\in\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n, 0)=\{f\in\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)\,|\,f(0)=0\}$ *vérifiant*

$$f=R_\lambda\circ g^{-1}\circ R_\alpha\circ g.$$

De plus (voir [Mo$_2$]*) cette décomposition est localement unique.*

2.3. Pour démontrer le Théorème 2.2 Kolmogorov **[Ko$_1$]**, **[Ko$_2$]** a proposé d'utiliser la démonstration des fonctions implicites en remplaçant la méthode d'itération de Picard par la méthode de Newton et en utilisant des opérateurs de lissage (pour pouvoir continuer l'itération); ou, ce qui revient au même en R-analytique, en diminuant les domaines de convergence des complexifiés. Nash **[N]** a utilisé une idée semblable pour résoudre le problème du plongement isométrique en C^∞ (les principales) réferences pour ce problème sont dans **[GR]**). Dans **[Mo$_2$]**, Moser à la suite de J. T. Schwartz **[Sch$_1$]**, **[Sch$_2$]** a donné une forme

(5)
FRENCH 501

abstraite à la version de Nash. Ceci a suscité de nombreux travaux, par exemple Sergereart [Se], Hamilton [Ha], Hörmander [$\mathbf{Hor}_1$] et [$\mathbf{Hor}_2$]. Plus proche des travaux d'Arnold [A_1], [A_2], [A_3], [AA] et de Moser [$\mathbf{Mo}_1$], [$\mathbf{Mo}_3$] sur les tores invariants (voir aussi [J]), on trouvera une très belle simplification due à Rüssmann [R_1]. L'idée de Rüssmann [R_1] a été reprise dans Zehnder [Z_1], [Z_2] et [R_2]. On trouvera une démonstration de 2.2 en suivant [R_1] dans [H, annexe].

La difficulté de la démonstration est la suivante: Soit l'application

$$\Phi_{R_\alpha}\colon (\lambda, g)\in T^n\times \mathrm{Diff}_+^\infty(T^n) \to R_\lambda\circ g^{-1}\circ R_\alpha\circ g\in \mathrm{Diff}_+^\infty(T^n),$$

la «dérivée» de Φ_{R_α} pour $\lambda=0$ et $g=\mathrm{Id}$ est l'application linéaire

$$(\lambda, \varphi)\in R^n\times C^\infty(T^n, R^n) \to \lambda+\varphi-\varphi\circ R_\alpha\in C^\infty(T^n, R^n).$$

Si on donne

$$\eta(x) = \sum_{k\in Z^n} \hat\eta(k)e^{2\pi i\langle k, x\rangle}\in C^\infty(T^n, R^n),$$

on peut résoudre l'équation

$$\varphi-\varphi\circ R_\alpha+\lambda = \eta$$

formellement par

$$\lambda = \hat\eta(0) \quad \text{et}$$

$$\varphi(x) \sim \sum_{k\neq 0} \hat\eta(k)(1-e^{2\pi i\langle k,\alpha\rangle})^{-1}e^{2\pi i\langle k, x\rangle},$$

(R_α est une translation ergodique de $T^n \Leftrightarrow \forall k\neq 0,\ 1-e^{2\pi i\langle k,\alpha\rangle}\neq 0$). On montre que si R_α satisfait à une condition diophantienne, alors $\varphi\in C^\infty(T^n, R^n)$ et si $\eta\in C^r(T^n, R^n)$, $r>\beta$, alors φ est «en général» seulement $C^{r-\beta-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon>0$.

Si R_α est une translation ergodique de T^n ne satisfaisant pas à une condition diophantienne «en général», (pour la catégorie de Baire) pour $\eta\in C^\infty(T^n, R^n)$ il n'existe pas de φ dans $L^1(m)$ ni même m-mesurable (voir [H_5]). La perte de dérivabilité en C^r (r fini) est une des sources principales des difficultés de 2.2. Il est aussi indispensable pour un Théorème des Fonctions implicites dans les Fréchet que les applications satisfassent des conditions restrictives (cf. [LZ]) mais dans le cas considéré, l'action venant du groupe des difféomorphismes, une suite d'inégalités se trouve automatiquement vérifiée pour Φ_{R_α} (voir [Se], [Z_2]).

2.4 *Problème* 2 (suite). *Si* $O^\infty_{f,V}$ *est localement fermé et de codimension finie pour un* C^∞*-ouvert* V, *est-ce-que* M *est difféomorphe à* T^n? *Une question analogue se pose pour l'équation linéarisée de la conjugaison.*

APPLIED MATH
French 506

INTRODUCTION

Dans de nombreux modèles de la Physique, on considère une fonction d'onde $\psi(t, x) = (\psi_i(t, x), \ldots, \psi_N(t, x))$ solution d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, $\mathscr{L}\psi = 0$, dont l'énergie $|\psi(t, .)|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$ reste bornée. Un problème fondamental est de déterminer comment se propage l'énergie de ψ au cours du temps. En particulier, on peut s'intéresser à la façon dont se répartit l'énergie entre les diverses composantes $\psi_1, \ldots, \psi_N$ et étudier le comportement asymptotique de cette répartition quand t tend vers l'infini. Par exemple, le champ électrique et le champ magnétique tendent à transporter chacun la moitié de l'énergie totale du champ électromagnétique solution des équations de Maxwell dans le vide [*10*] ; de même, l'énergie de la solution de l'équation des ondes $\square u = 0$, est asymptotiquement distribuée à parts égales entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle [*8*].

Plus précisément, on considère le système :

$$\mathscr{L}\psi = \partial_t\psi - \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i}\psi \tag{1}$$

où les A_i sont des matrices $N \times N$ à coefficients constants. Pour $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on note :

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i .$$

7

APPLIED MATH
French 506

On fait sur $\mathscr{L}$ l'hypothèse d'hyperbolicité suivante :

(H) Pour tout ξ les valeurs propres de $A(\xi)$ sont réelles et $A(\xi)$ est diagonalisable. De plus, il existe une constante $M_0 > 0$ telle que pour tout ξ et tout projecteur propre $P_j(\xi)$ de $A(\xi)$, on ait :

$$|P_j(\xi)| \leqslant M_0 .$$

L'hypothèse (H) est vérifiée en particulier dans deux cas importants : si les matrices A_i sont hermitiennes, ou si les valeurs propres de $A(\xi)$ sont de multiplicité constante pour $\xi \neq 0$.

Une solution libre d'énergie finie ψ vérifie :

$$\mathscr{L}\psi = 0, \quad \psi(0, .) = \psi_0(.) \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$$

et (H) entraîne l'inégalité d'énergie :

$$|\psi(t)|_{L^2} \leqslant N \cdot M_0 |\psi_0|_{L^2} .$$

Considérons une forme sesquilinéaire f sur $\mathbb{C}^N$; on pose :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx .$$

On dira que le système $\mathscr{L}$ admet une équipartition de l'énergie relativement à f, si, pour toute solution libre d'énergie finie ψ, $I(t)$ tend vers 0 quand $|t|$ tend vers l'infini. Le problème fondamental est de déterminer toutes les formes possibles d'équipartition de l'énergie. Revenons à l'exemple de l'équation des ondes ; soit u vérifiant $\Box u = 0$, $u(0, x) = 0$, $u_t(0, x) = g(x)$; l'égalité de Parseval donne :

$$\int |u_t(t, x)|^2 dx = C \cdot \int \cos^2 (t|\xi|) |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi ,$$

$$\int |\nabla_x u(t, x)|^2 dx = C \cdot \int \sin^2 (t|\xi|) |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi .$$

On en déduit que :

$$I(t) = \int (|u_t(t, x)|^2 - |\nabla_x u(t, x)|^2) dx = C \cdot \int \cos (2t|\xi|) |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi$$

et on applique le théorème de Riemann-Lebesgue. Notons la propriété que possède la forme $f(\nabla_{t,x}u, \nabla_{t,x}u) = |u_t|^2 - |\nabla_x u|^2$ de faire disparaître les termes en $\cos^2 t|\xi|$ et $\sin^2 t|\xi|$ en les transformant en terme oscillant $\cos 2t|\xi|$.

C'est cet aspect que nous allons développer dans ce travail en montrant qu'à l'origine de tous les résultats d'équipartition, se trouve une propriété algébrique commune : la notion de compatibilité de la forme f avec le

8

APPLIED MATH
French 506

système hyperbolique $\mathrm{I}\partial_t - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \partial_{x_i}$, notion introduite par B. Hanouzet et J. L. Joly [29 à 33].

DÉFINITION. — *Une forme sesquilinéaire f sur $\mathbb{C}^N$ sera dite (presque partout) compatible avec le système $\mathscr{L}$ si, pour (presque) tout ξ non nul de $\mathbb{R}^n$, les vecteurs propres de $\mathrm{A}(\xi)$ sont isotropes pour f.*

De nombreux exemples sont donnés dans la deuxième partie. Une forme compatible est presque partout compatible mais la réciproque est fausse en général. Par exemple si $\mathrm{A}(\xi) = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{C}}_1 \cdot \vec{\xi} & 0 \\ 0 & \vec{\mathrm{C}}_2 \cdot \vec{\xi} \end{bmatrix}$ où $\{ \vec{\mathrm{C}}_1, \vec{\mathrm{C}}_2 \}$ est un système libre de $\mathbb{R}^2$ il n'existe pas de forme compatible, par contre, les matrices $\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ définissent des formes presque partout compatibles. Une telle situation se présente pour le système de la cinétique des gaz étudié par Hamdache [28] où les opérateurs de collision sont des formes presque partout compatibles et non compatibles avec le système. Si la multiplicité des valeurs propres de $\mathrm{A}(\xi)$ est constante pour $\xi \neq 0$, une forme presque partout compatible est compatible, et même régulièrement compatible au sens de Hanouzet et Joly. Dans ce cas, une caractérisation importante des formes compatibles est établie dans [32 et 33] mettant en évidence un phénomène de compensation : f est compatible si et seulement si pour toute solution ψ de (1) avec $\hat{\psi}(0, \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on a

$$| f(\psi(t), \psi(t)) |_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_x)} = \mathrm{O}(| t |^{-n}) ;$$

la décroissance est donc plus rapide que celle d'un produit qui est de l'ordre de $| t |^{-n+1}$. Le résultat principal que nous établissons ici est que f est presque partout compatible avec le système $\mathscr{L}$ si, et seulement si, $\mathscr{L}$ admet une équipartition de l'énergie relativement à f. De plus, si la dimension d'espace est impaire, et si le système est fortement hyperbolique, l'équipartition a lieu en temps fini pour les données initiales à support compact.

Ces résultats sont établis dans la première partie où l'on étudie également le système hermitien non homogène :

$$\mathscr{L}\psi = \mathrm{I}\partial_t\psi - \mathrm{A}(d)\psi + i\mathrm{B}\psi . \tag{2}$$

Dans la deuxième partie on donne de nombreuses applications : équation des ondes, équations du second ordre du type :

$$\partial_{tt}^2\psi - \mathrm{A}^2(d)\psi = 0$$

et

$$\partial_{tt}^2\psi - \mathrm{A}^2(d)\psi + \mathrm{B}^2\psi = 0 ,$$

équation des ondes élastiques en milieu anisotrope, équation des ondes

(9)

APPLIED MATH
French 506

magnétoélastiques dans un milieu conducteur, équations de Maxwell, système de Dirac massif ou non, équation de Klein-Gordon, équation des neutrinos. Beaucoup de ces résultats sont connus mais il nous semble intéressant de montrer qu'ils découlent tous directement de théorèmes généraux de démonstration simple ; chaque fois il suffit de vérifier la condition algébrique de compatibilité.

Dans l'appendice on montre que si $A(\xi)$ est à multiplicité constante pour $\xi \neq 0$, une forme presque partout compatible est compatible. Nous achevons cette introduction en donnant quelques références bibliographiques. Sur la notion de forme compatible on se reportera à [*3*] [*4*] [*29* à *33*]. L'équipartition de l'énergie pour les équations d'évolution abstraites dans un espace de Hilbert a été étudiée dans [7] [*23*] [*24*] [*25*] [*34*] [*35*]. L'équipartition de l'énergie pour l'équation des ondes a été établie par Lax et Phillips dans leur ouvrage « Scattering Theory » en utilisant la transformée de Radon et par Brodsky [*8*] par l'analyse de Fourier. Parmi les auteurs qui ont utilisé la transformée de Radon pour obtenir des résultats sur le comportement asymptotique des solutions et en déduire des théorèmes d'équipartition on peut citer : Avila et Costa [*1*] [*2*], Bardos et Costa [*6*], Costa [*9*], Costa et Strauss [*10*]. La transformée de Fourier a été employée par Dassios [*11* à *14*], Dassios et Galanis [*15*], Dassios et Grillakis [*16*], Duffin [*20*], Strichartz [*36*], Wilcox [*37*]. Des résultats d'équipartition ont été obtenus par Dassios et Grillakis [*18*] pour l'équation des ondes en domaine extérieur et pour l'équation des ondes thermoélastiques [*17*]. L'étude de l'équipartition de l'énergie pour les systèmes non linéaires a été abordée par Glassey [*21*], et Glassey et Strauss [*22*]. Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans [*5*].

1. RÉSULTATS FONDAMENTAUX

THÉORÈME 1. — *On considère un système hyperbolique $\mathscr{L}$ vérifiant (1) et (H).*

Soient f une forme sesquilinéaire presque partout compatible avec le système $\mathscr{L}$ et ψ une solution libre d'énergie finie. On pose

$$I(t) = \int f(\psi(t,x), \psi(t,x))dx .$$

Alors $I(t)$ tend vers 0 quand $|t|$ tend vers l'infini.

Réciproquement, si $I(t)$ tend vers 0 quand $|t|$ tend vers l'infini, pour toute solution d'énergie finie de $\mathscr{L}$ alors f est presque partout compatible avec $\mathscr{L}$.

Dans le cas où $\mathscr{L}$ est fortement hyperbolique on peut préciser la rapidité de la décroissance de $I(t)$.