Fall 2007 French Exam

Invent. math. 97, 141–158 (1989)

Inventiones mathematicae

Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford

Jean-Louis Colliot-Thélène[1] et Manuel Ojanguren[2]

[1] C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France,

[2] Section de Mathématiques, Université de Lausanne-Dorigny, CH-1015 Lausanne, Suisse

On dit qu'une variété algébrique irréductible X (définie sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes) est rationnelle si elle birationnelle à l'espace affine de même dimension, et on dit qu'elle est unirationnelle si elle est dominée par une variété rationnelle, i.e. s'il existe un morphisme dominant d'un ouvert d'un espace affine vers X. Ce n'est qu'en 1972 que, de trois manières différentes, des exemples incontestables de variétés unirationnelles non rationnelles furent mis en évidence.

Si les invariants alors utilisés – le groupe de Brauer-Grothendieck chez Artin et Mumford [A/M], la jacobienne intermédiaire chez Clemens et Griffiths (et, du point de vue de Mumford, la codimension du lieu singulier du diviseur Θ de cette jacobienne intermédiaire vue comme variété de Prym), le groupe des automorphismes birationnels chez Manin et Iskovskih – ont depuis été mis à profit dans l'étude d'autres variétés algébriques, il est étonnant que l'on n'ait pas encore eu recours aux invariants cohomologiques supérieurs proposés par Grothendieck dans ses exposés sur le groupe de Brauer ([G], §9). C'est le but principal du présent article de donner un exemple de variété unirationnelle (définie sur $\mathbf{C}$) dont l'invariant d'Artin/Mumford est trivial, mais dont une variante (§1) des invariants cohomologiques supérieurs de Grothendieck permet de montrer qu'elle n'est pas rationnelle (§3).

Pour trouver un tel exemple, nous n'avons pas cherché à écrire des modèles projectifs et lisses des variétés considérées, mais nous nous sommes placés dans un cadre résolument birationnel et purement algébrique. C'est Saltman qui le premier a recueilli les fruits d'une telle approche souple de l'invariant d'Artin/Mumford. On consultera les articles [Sa1, Sa2] où il donne une réponse négative au problème d'Emmy Noether: l'article [Sa1] contient ainsi un exemple très simple de variété unirationnelle non rationnelle (Theorem 3.4). Nous avons commencé par comprendre l'exemple d'Artin et Mumford de ce point de vue, ce qui nous a amené à en donner plusieurs variantes (§2). C'est la simplicité de ces variantes, jointe à un résultat profond d'Arason ([A]) sur la cohomologie des corps de fonctions de quadriques, qui nous a permis sans peine de fabriquer un exemple d'un nouveau type (exemple 3.3, §3).

En appendice, on indique brièvement comment une autre méthode, dans son principe plus élémentaire, et qui repose sur des résultats de Pfister ([P]), permet d'établir la non-rationalité des divers exemples présentés: le groupe de Witt y remplace la cohomologie étale.

Notations

Sauf mention du contraire, la cohomologie utilisée est la cohomologie étale, et l'on omet parfois l'indice «ét» dans les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathscr{F})$, groupes qu'on note $H^i(A, \mathscr{F})$ lorsque X est le spectre d'un anneau A. On note $\operatorname{Br} X$, et on appelle groupe de Brauer de X, le groupe de cohomologie étale $H^2(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m)$.

§ 1. Groupe de Brauer et invariants cohomologiques supérieurs

Proposition 1.1. *Etant donnés un anneau de Dedekind A, de corps des fractions K, un entier $n \geqq 1$ inversible dans A et un entier relatif i, on dispose d'une longue suite exacte de groupes de cohomologie étale, à valeurs dans le faisceau des racines n-ièmes de l'unité:*

$$0 \to H^1(A, \mu_n^{\otimes i}) \to H^1(K, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^0(\kappa_{\mathfrak{p}}, \mu_n^{\otimes i-1}) \to H^2(A, \mu_n^{\otimes i}) \to \dots$$

$$\dots \to H^j(A, \mu_n^{\otimes i}) \to H^j(K, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_j} \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^{j-1}(\kappa_{\mathfrak{p}}, \mu_n^{\otimes i-1}) \to H^{j+1}(A, \mu_n^{\otimes i}) \dots,$$

où dans les sommes directes, $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de A et $\kappa_{\mathfrak{p}}$ désigne le corps résiduel en $\mathfrak{p}$.

Cette suite se déduit de la suite spectrale de Leray

$$H^p(\operatorname{Spec} A, R^q j_*(\mu_{n,K}^{\otimes i})) \Rightarrow H^m(\operatorname{Spec} K, \mu_n^{\otimes i}),$$

où j désigne le morphisme $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ (voir Soulé [S], Proposition 1, et, pour une variante à coefficients $\mathbb{G}_m$, voir Grothendieck [G], Proposition 2.1). On aurait plus généralement la même suite en remplaçant $\operatorname{Spec} A$ par un schéma de Dedekind intègre quelconque. Notons que lorsque A est un anneau de valuation discrète complet, K^{nr} l'extension maximale non ramifiée de K, puis $\bar{K}$ la clôture séparable de K et $I = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K^{\mathrm{nr}})$ le groupe d'inertie, la suite exacte ci-dessus se déduit de la suite spectrale

$$H^p(\operatorname{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K), H^q(I, \mu_n^{\otimes i})) \Rightarrow H^m(K, \mu_n^{\otimes i})$$

(pour $q \geqq 2$, $H^q(I, \mu_n^{\otimes i}) = 0$, et $H^1(I, \mu_n^{\otimes i}) = \operatorname{Hom}(I, \mu_n^{\otimes i}) = \mu_n^{\otimes i-1}$ comme G-module).

De cette présentation, on déduit aisément la propriété de fonctorialité suivante.

Soient $A \subset B$ deux anneaux de valuation discrète, de corps des fractions $K \subset L$, et de corps résiduels κ_A et κ_B. Soit $e_{B/A} = v_B(\pi_A)$ la valuation dans B d'une uniformisante π_A de A. Supposons n inversible dans A. On a alors les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} H^j(L, \mu_n^{\otimes i}) & \xrightarrow{\partial_{j,B}} & H^{j-1}(\kappa_B, \mu_n^{\otimes i-1}) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{K/L}} & & \uparrow{\scriptstyle e_{B/A}\mathrm{Res}_{\kappa_A/\kappa_B}} \\ H^j(K, \mu_n^{\otimes i}) & \xrightarrow{\partial_{j,A}} & H^{j-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes i-1}), \end{array}$$

où les applications Res sont les applications de restriction évidente (lorsque $e_{B/A} \neq 0$, on a une inclusion de κ_A dans κ_B, et lorsque $e_{B/A} = 0$, la flèche verticale de droite est nulle).

Définition 1.1.1. Etant donnés un corps k, un entier n inversible dans k, un entier naturel $j \geqq 1$ et un entier relatif i, et étant donné un corps de fonctions K sur k, on définit *le groupe de cohomologie non ramifiée* $F_n^{j,i}(K/k) \subset H^j(K, \mu_n^{\otimes i})$ par la formule suivante:

$$F_n^{j,i}(K/k) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(K, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes i-1})],$$

où A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un de corps des fractions K et qui contiennent le corps k, le corps résiduel d'un tel anneau étant noté κ_A.

Exemple 1.1.2. Le groupe $F_n^{2,1}(K/k)$ n'est autre que le sous-groupe de n-torsion du groupe de Brauer-Grothendieck $\mathrm{Br}\, X$ pour X un modèle projectif et lisse sur k de K (lorsqu'il en existe un), ou encore la n-torsion du groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K/k)$ de Saltman. La coïncidence des ces divers groupes résulte des théorèmes de pureté (voir [G], §§ 6 et 7).

Remarque 1.1.3. Comme nous l'a fait observer O. Gabber, on peut grâce aux résultats de Bloch/Ogus [B/O] identifier le groupe $F_n^{j,i}(K)$ au groupe $H^0(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où X est un modèle propre et lisse de K et $\mathscr{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau sur X_{Zar} associé au préfaisceau $U \to H^j(U_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes i})$. Pour $j \geqq 3$, on ne sait pas si ce groupe des sections globales coïncide avec son sous groupe:

$$\mathrm{Im}[H^j(X_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes i}) \to H^j((\mathrm{Spec}\, K)_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes i})]$$

(lequel est l'invariant cohomologique supérieur de Grothendieck). Pour $j \leqq 2$, on dispose de théorèmes de pureté (exposés de M. Artin in [SGA 4], XVI 3.9 et XIX 3.2).

Par définition même, les groupes $F_n^{j,i}(K)$ sont des invariants k-birationnels. Ce sont en fait des invariants k-birationnels stables:

Proposition 1.2. *Si deux corps de fonctions K/k et L/k deviennent isomorphes par adjonction de variables indépendantes, alors $F_n^{j,i}(K/k)$ est isomorphe à $F_n^{j,i}(L/k)$. En particulier, si K est transcendant pur sur k, ou si une extension transcendante pure de K est transcendante pure sur k, alors $F_n^{j,i}(K/k)$ est isomorphe à $H^j(k, \mu_n^{\otimes i})$.*

Démonstration. Si K est le corps des fonctions de la droite affine $\mathbb{A}_k^1$, la flèche naturelle $H^j(k, \mu_n^{\otimes i}) \to F_n^{j,i}(K/k)$ induit un isomorphisme $H^j(k, \mu_n^{\otimes i}) \simeq F_n^{j,i}(K/k)$. Ceci résulte aisément de la suite spectrale de Leray pour la projection $\mathbb{A}_k^1 \to \operatorname{Spec} k$, qui fournit des isomorphismes $H^j(k, \mu_n^{\otimes i}) \simeq H^j(\mathbb{A}_k^1, \mu_n^{\otimes i})$ (voir [S], Proposition 3).

Pour établir la proposition dans le cas général, on peut clairement se limiter au cas où $L = K(t)$ est une extension transcendante pure de degré de transcendance 1 de k. Soit $\xi \in F_n^{j,i}(L/k)$. En n'utilisant que les valuations de L qui sont triviales sur K, et en utilisant le cas particulier précédent on voit que ξ vient d'un élément bien déterminé, que nous noterons encore ξ, de $H^j(K, \mu_n^{\otimes i})$. Soit alors A un anneau de valuation discrète de K, contenant k et de corps des fractions K. Il existe un anneau de valuation discrète B de $L = K(t)$, contenant k, et de corps des fractions L, tel que la flèche induite sur les corps résiduels induise un isomorphisme $\kappa_B = \kappa_A(t)$. Ainsi $H^{j-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes i-1})$ s'injecte dans $H^{j-1}(\kappa_B, \mu_n^{\otimes i-1})$ (cf. [S], Prop. 3), et par fonctorialité de la suite de la proposition 1.1, l'on conclut que ξ appartient à $F_n^{j,i}(K/k)$, ce qui établit la proposition. □

Corollaire 1.2.1. *Si K est une extension transcendante pure du corps des complexes $\mathbf{C}$, ou si elle le devient par adjonction de variables indépendantes, alors $F_n^{j,i}(K/\mathbf{C}) = 0$.*

Remarque 1.2.2. Il ne devrait pas être difficile d'étendre les deux énoncés précédents aux variétés «rétractes-rationnelles» ([Sa 1], [Sa 2]).

Proposition 1.3. *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel κ, soit $\alpha \in H^j(A, \mu_n^{\otimes i})$ et soit α_0 son image dans $H^j(\kappa, \mu_n^{\otimes i})$ par l'application de réduction. Soient b un élément de K^*, $m = v_A(b) \in \mathbf{Z}$ sa valuation et β la classe de b dans $H^1(K, \mu_n) = K^*/K^{*n}$. Soit $\alpha \cup \beta \in H^{j+1}(K, \mu_n^{\otimes i+1})$ le cup-produit de α et β. Alors*

$$\partial_{j+1}(\alpha \cup \beta) = m\, \alpha_0 \in H^j(\kappa, \mu_n^{\otimes i}).$$

Démonstration (esquisse). Tout d'abord la classe de m dans $\mathbf{Z}/n = H^0(\kappa, \mu_n^{\otimes 0})$ n'est autre que la classe de $\partial_1(\beta)$, et $m\alpha_0$ s'identifie au cup-produit $\alpha_0 \cup \partial_1(\beta)$. On peut supposer A complet. Les flèches de bord ∂ s'identifient aux flèches provenant de la suite spectrale

$$H^p(\mathrm{Gal}(K^{nr}/K), H^q(I, \mu_n^{\otimes i})) \Rightarrow H^m(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mu_n^{\otimes i})$$
$$H^p(G, H^q(I, \mu_n^{\otimes i})) \Rightarrow H^m(\mathrm{g}, \mu_n^{\otimes i})$$

(voir la proposition 1.1). L'énoncé résulte alors de la compatibilité des suites spectrales aux cup-produits: la multiplication par l'élément $a \in H^r(G, \mu_n^{\otimes j})$ fait passer de la suite spectrale ci-dessus à la suite

$$H^p(G, H^{q+r}(I, \mu_n^{\otimes i+j})) \Rightarrow H^{m+r}(\mathrm{g}, \mu_n^{\otimes i+j}),$$

Théorème 1.2 *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de rang réel supérieur ou égal à 2 et Γ un réseau irréductible de G. Soit ϕ un homomorphisme de Γ vers le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^1 respectant l'orientation. Alors, ou bien ϕ a une image finie cyclique ou bien ϕ est semi-conjugué à un revêtement fini d'un homomorphisme obtenu en faisant suivre :*

i) le plongement de Γ dans G,

ii) une surjection de G sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$,

iii) l'action projective de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ *sur le cercle (identifié à la droite projective réelle).*

De plus, si ϕ prend ses valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^2, il s'agit en fait d'une conjugaison topologique. Si ϕ prend ses valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ (resp. C^ω)*, il s'agit d'une C^∞* (resp. C^ω)*-conjugaison.*

Un énoncé analogue au théorème 1.1 a été obtenu indépendamment et simultanément par M. Burger et N. Monod dans le cadre de leur étude de la cohomologie bornée des réseaux [4].

L'étude des actions de groupes tels que les réseaux sur les variétés compactes a été proposée en particulier par R. Zimmer dans [31]. L'une des conjectures centrales dans ce programme est la suivante : si un réseau Γ d'un groupe de Lie connexe simple G de rang réel r agit fidèlement sur une variété compacte M, a-t-on nécessairement $r \leq \dim M$? Cet article répond donc positivement à cette question dans le cas où M est le cercle (tout au moins si l'action est différentiable).

Un certain nombre de résultats allant dans cette direction sont déjà connus.

Dans [29], D. Witte montre le théorème suivant. Soit G un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique simple, dont le $\mathbf{Q}$-rang est supérieur ou égal à 2 et soit Γ un réseau *arithmétique* de G. Alors toute action de Γ par *homéomorphismes* transite à travers un groupe fini. Il est intéressant de comparer ce théorème avec notre théorème 1.1. L'hypothèse relative au $\mathbf{Q}$-rang est extrêmement forte et le théorème de Witte ne s'applique donc qu'à une classe restreinte de réseaux (ceux qui sont les "moins co-compacts"), contrairement à notre résultat qui considère un réseau quelconque. Par contre, le théorème de Witte considère des actions par homéomorphismes, alors que les actions que nous considérons sont par difféomorphismes. Il est naturel de conjecturer que notre théorème 1.1 est également valable pour des actions par homéomorphismes mais les techniques que nous allons développer dans cet article ne permettent pas d'aborder cette question intéressante.

Dans [6,7] B. Farb et P. Shalen introduisent une condition technique sur les réseaux des groupes de Lie semi-simples de rangs réels supérieurs ou égaux à 2, vérifiée pour de nombreux exemples mais cependant assez restrictive. Ils montrent ensuite qu'une action d'un réseau vérifiant cette condition, par difféomorphismes *analytiques* du cercle, transite à travers un groupe fini.

Quant à la question générale de l'existence d'actions fidèles de réseaux de groupes de Lie simples de rang r sur des variétés compactes M dont la dimension vérifie $r > \dim M > 1$, elle reste ouverte sans hypothèse additionnelle sur la géométrie ou la dynamique de l'action. Signalons cependant le résultat de [10] : un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{Z})$ n'agit pas fidèlement et analytiquement sur une surface compacte de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle dès que $r > 2$. On trouvera également dans [6, 7] des informations intéressantes sur les actions analytiques de certains réseaux en petite dimension.

Nous terminons cette introduction par quelles remarques et questions concernant les actions des réseaux de rangs réels 1. Soit G un groupe de Lie simple de rang réel 1 par exemple le groupe $\mathrm{S0}_0(n, 1)$ des isométries directes de l'espace hyperbolique de dimension n et soit Γ un réseau de G. Pour de nombreux exemples, il existe une surjection de Γ sur $\mathbf{Z}$ et il est donc facile de construire des actions de Γ sur le cercle qui transitent à travers $\mathbf{Z}$, donc non fidèles. Il est plus difficile de construire des actions fidèles de Γ et nous ne connaissons que quelques exemples. Pour $n = 2$, c'est-à-dire pour les groupes fuchsiens agissant sur le disque de Poincaré, le groupe Γ agit naturellement sur le bord de ce disque mais on peut également faire agir Γ via un autre plongement de Γ dans $\mathrm{S0}_0(2, 1) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, par exemple à image dense. Pour $n = 3$, c'est-à-dire pour les groupes kleinéens, W. Thurston donne dans [27] de nombreuses constructions d'actions fidèles de réseaux Γ par *homéomorphismes* du cercle. Il est probable que ces actions ne peuvent être lissées : on trouvera dans [21] un résultat intéressant allant dans ce sens. L'étude des actions fidèles de réseaux de groupes de rangs réels 1 semble prometteuse ; il est peut-être possible de les décrire avec précision lorsqu'elles sont analytiques (ou même seulement différentiables).

Les démonstrations proposées dans cet article sont élémentaires mais risquent d'être obscurcies par le vocabulaire de la théorie des groupes algébriques. Nous avons donc choisi de proposer au lecteur une lecture à plusieurs niveaux. Il se trouve que la démonstration du théorème 1.1-1.2 repose sur l'étude préalable d'un certain nombre de groupes de rangs 2 tels que $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$, $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$, $\mathrm{SO}_0(2, q)$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, $\mathrm{SU}(2, q)$, qui illustrent l'essentiel des difficultés rencontrées dans le cas général. Nous présenterons ensuite la preuve du cas général. Un lecteur pressé pourrait se contenter d'étudier par exemple les cas particuliers de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ et $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$ qui donnent facilement les cas de $\mathrm{SL}(r+1, \mathbf{R})$ et $\mathrm{Sp}(2r, \mathbf{R})$; il ne perdrait pas les idées principales.

2 Généralités

Ce paragraphe est consacré à quelques rappels de propriétés classiques des actions de groupes sur le cercle.

On note toujours $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation. Rappelons qu'un homéomorphisme

GÉRARD BEN AROUS
MICHEL LEDOUX

Grandes déviations de Freidlin-Wentzell en norme höldérienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 293-299.
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__293_0>

GRANDES DÉVIATIONS DE FREIDLIN-WENTZELL EN NORME HÖLDERIENNE

G. Ben Arous et M. Ledoux

RÉSUMÉ. — *Nous démontrons que le principe de grandes déviations de M. Freidlin et A. Wentzell sur les petites perturbations de systèmes dynamiques peut être étendu à la topologie hölderienne d'indice α pour tout* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Freidlin-Wentzell large deviations in Hölder norm

ABSTRACT. — *We prove that the Freidlin-Wentzell large deviation principle for small perturbations of dynamical systems can be extended to the Hölder topology of index α for all* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Soient, sur $\mathbb{R}^d$, un champ σ de matrices $d \times p$ et un champ b de vecteurs uniformément lipschitziens et uniformément bornés; soient en outre des champs de vecteurs b_ε, $\varepsilon > 0$, convergeant uniformément vers b. On désigne par X_ε^x, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, la solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$X_\varepsilon^x(t) = x + \varepsilon \int_0^t \sigma\big(X_\varepsilon^x(s)\big)\, dW(s) + \int_0^t b_\varepsilon\big(X_\varepsilon^x(s)\big)\, ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

où W est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Dans leur article fondamental, M. Freidlin et A. Wentzell [F-W1] (*voir* aussi [F-W2]) établissent des estimations asymptotiques des probabilités $\mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\}$ lorsque ε tend vers 0. Ils démontrent le principe de grandes déviations suivant: soit $C_x([0,1];\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et issues de x muni de la topologie de la norme uniforme $\|\cdot\|$; alors, pour tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout partie borélienne A de $C_x([0,1];\mathbb{R}^d)$,

$$-\Lambda(\mathring{A}) \le \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} \le \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} \le -\Lambda(\bar{A})$$

où $\mathring{A}$ et $\bar{A}$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de A (pour la topologie uniforme) et où Λ est la fonctionnelle de grandes déviations définie par : si $A \subset C_x([0,1];\mathbb{R}^d)$,

$$\Lambda(A) = \inf\{\tfrac{1}{2}|h|^2 ; h \in H, \Phi^x(h) \in A\}$$

où H est l'espace de Cameron-Martin de W et, pour $h \in H$, $\Phi^x(h)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\Phi^x(h)(t) = x + \int_0^t \sigma\big(\Phi^x(h)(s)\big)\dot{h}(s)\, ds + \int_0^t b\big(\Phi^x(h)(s)\big)\, ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Divers travaux récents ont étudié le rôle de la topologie sur l'espace de Wiener, notamment pour les grandes déviations du mouvement brownien [B-BA-K], [BA-L] et le théorème du support pour les diffusions [A-K-S], [BA-G-L], [M-S]. En particulier, ces propriétés ont été étendues à la topologie höldérienne d'indice α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, plus forte que la topologie uniforme habituelle. Dans cette note, nous nous proposons d'effectuer le même travail pour les grandes déviations de Freidlin et Wentzell. La clef en sera une version simplifiée du lemme crucial de l'article [BA-G-L] sur la probabilité que le mouvement brownien ait une grande norme höldérienne sachant, ou plus simplement étant donné, que sa norme uniforme est petite.

Pour toute fonction $w : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, on définit la norme höldérienne d'indice $0 < \alpha < 1$ par

$$\|w\|_\alpha = \sup_{0 \le s < t \le 1} \frac{|w(t) - w(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

(où nous considérons $\mathbb{R}^d$ muni par exemple de sa norme euclidienne $|\cdot|$). Nous ferons usage de l'équivalent de Z. Ciesielski [C] : pour toute fonction continue $w : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ telle que $w(0) = 0$, soient, pour $m = 2^n + k - 1$, $n \ge 0$, $k = 1, \ldots, 2^n$,

$$\xi_m(w) = \xi_{2^n+k}(w) = 2^{n/2}\left[2w\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - w\left(\frac{k}{2^n}\right) - w\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]$$

et $\xi_0(w) = w(1)$ les évaluations de w dans la base de Schauder sur $C_0([0,1];\mathbb{R}^d)$; alors, pour tout $0 < \alpha < 1$, $\|w\|_\alpha$ est équivalent à

$$\|w\|'_\alpha = \sup_{m \ge 0} m^{\alpha - \frac{1}{2}} |\xi_m(w)|.$$

Théorème. — *Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; pour tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout borélien A de $C_x([0,1];\mathbb{R}^d)$,*

$$-\Lambda(\mathring{A}) \le \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} \le \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} \le -\Lambda(\bar{A})$$

où $\mathring{A}$ et $\bar{A}$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de A pour la topologie höldérienne d'indice α.

Il est bien connu que les solutions X_ε^x sont effectivement höldériennes sous les hypothèses considérées. Le schéma de preuve initié par R. Azencott [A] montre qu'il suffit, afin d'établir le théorème, de démontrer la condition de continuité exponentielle suivante. Nous suivons la présentation (et les améliorations) de P. Priouret [P], mais toute autre approche "classique" permettrait sans doute d'établir de même le résultat. Dans ce qui suit, α est fixé dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$.

Proposition. — *Soit $h \in H$; pour tout $R > 0$ et tout $\rho > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ε suffisamment petit,*

$$\mathbb{P}\left\{\left\|X_\varepsilon^x - \Phi^x(h)\right\|_\alpha \ge \rho, \|\varepsilon W - h\| \le \delta\right\} \le \exp(-R/\varepsilon^2).$$

Rappelons en quelques mots comment le théorème de grandes déviations se déduit de la proposition. Le raisonnement est identique au raisonnement habituel en norme uniforme. Soit A fermé pour la topologie höldérienne et soit $0 < r < \Lambda(A)$. Si $h \in H$ est tel que $\frac{1}{2}|h|^2 \leq r$, alors $\Phi^x(h) \notin A$ par définition de $\Lambda(A)$. Comme le complémentaire A^c de A est ouvert, il existe $\rho_h > 0$ tel que la boule höldérienne ouverte $B_\alpha(\Phi^x(h), \rho_h)$ soit contenue dans A^c. D'après la proposition, il existe $\delta_h > 0$ et $\varepsilon_h > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_h$,

$$\mathbb{P}\big\{\big\|X_\varepsilon^x - \Phi^x(h)\big\|_\alpha \geq \rho_h, \|\varepsilon W - h\| \leq \delta_h\big\} \leq \exp\big(-r/\varepsilon^2\big).$$

Par compacité, il existe enfin une famille finie $h_1, \ldots, h_N$ dans H avec $\frac{1}{2}|h_i|^2 \leq r$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ telle que

$$\big\{h; \tfrac{1}{2}|h|^2 \leq r\big\} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(h_i, \delta_{h_i})$$

où les boules $B(h_i, \delta_{h_i})$ sont ouvertes en topologie uniforme. Soit alors U l'ouvert $\bigcup_{i=1}^{N} B(h_i, \delta_{h_i})$; comme, pour tout $i = 1, \ldots, N$, $A \subset B_\alpha(\Phi^x(h_i), \rho_{h_i})^c$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} &\leq \mathbb{P}\{\varepsilon W \notin U\} + \mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A, \varepsilon W \in U\} \\
&\leq \mathbb{P}\{\varepsilon W \notin U\} + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\big\{\big\|X_\varepsilon^x - \Phi^x(h_i)\big\|_\alpha \geq \rho_{h_i}, \|\varepsilon W - h_i\| \leq \delta_{h_i}\big\} \\
&\leq \mathbb{P}\{\varepsilon W \notin U\} + N \exp\big(-r/\varepsilon^2\big)
\end{aligned}$$

dès que $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_{h_i}, i = 1, \ldots, N)$. D'après les grandes déviations browniennes (en topologie usuelle), il s'ensuit que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} \leq \max\big(-r, -\inf_{h \notin U} \tfrac{1}{2}|h|^2\big) \leq -r$$

et donc la conclusion puisque r est arbitraire plus petit que $\Lambda(A)$.

Pour la minoration, si A est ouvert, soit h tel que $\Phi^x(h) \in A$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que la boule höldérienne ouverte $B_\alpha(\Phi^x(h), \rho)$ soit contenue dans A. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_\varepsilon^x \in A\} &\geq \mathbb{P}\big\{\|X_\varepsilon^x - \Phi^x(h)\| < \rho\big\} \\
&\geq \mathbb{P}\big\{\|\varepsilon W - h\| \leq \delta\big\} - \mathbb{P}\big\{\big\|X_\varepsilon^x - \Phi^x(h)\big\|_\alpha \geq \rho, \|\varepsilon W - h\| \leq \delta\big\}.
\end{aligned}$$

En vertu des grandes déviations du mouvement brownien,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}\big\{\|\varepsilon W - h\| \leq \delta\big\} \geq -\tfrac{1}{2}|h|^2.$$

Les inégalités précédentes jointes à la proposition fournissent alors immédiatement le résultat puisque h est arbitraire.

Nous démontrons à présent la proposition.

Démonstration de la proposition. Nous traitons d'abord le cas $h = 0$. Le pas important de la démonstration réside alors dans la propriété suivante : pour tout $R > 0$ et tout $\rho > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ε suffisamment petit,

$$\text{(1)} \qquad \mathbb{P}\left\{\left\|\varepsilon\int_0^{\cdot}\sigma\big(X_\varepsilon^\varepsilon(s)\big)\,dW(s)\right\|_\alpha \geq \rho, \|\varepsilon W\| \leq \delta\right\} \leq \exp\left(-R/\varepsilon^2\right).$$

À cet effet, nous faisons usage des deux lemmes suivants sur les normes höldériennes. Le premier est donc une version simplifiée du lemme crucial de [BA-G-L] dans l'étude du support en norme höldérienne des diffusions. Le résultat de [BA-G-L] évalue en effet des probabilités conditionnelles alors que nous nous contentons ici d'une estimation de la probabilité que le mouvement brownien ait de grandes oscillations quand celui-ci est contrôlé en norme uniforme. À noter également que ce lemme est utilisé pour des grandes valeurs des paramètres (alors qu'il l'était pour des petites dans le cadre du théorème du support).

Lemme 1. — *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de p et α telle que pour tout $u > 0$ et tout $v > 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{\|W\|_\alpha \geq u, \|W\| \leq v\right\} \leq C\max\left(1, \left(\frac{u}{v}\right)^{1/\alpha}\right)\exp\left(-\frac{1}{C}\cdot\frac{u^{1/\alpha}}{v^{(1/\alpha)-2}}\right).$$

Lemme 2. — *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de p et α telle que pour tout $u > 0$ et tout processus continu K sur $[0,1]$,*

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\int_0^{\cdot} K(s)\,dW(s)\right\|_\alpha \geq u, \|K\| \leq 1\right\} \leq C\exp\left(-u^2/C\right).$$

Pour le premier lemme, on utilise la norme équivalente $\|\cdot\|'_\alpha$ pour écrire que, si $u, v > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\|W\|'_\alpha \geq u, \|W\| \leq v\right\} &\leq \sum_{m\geq 0}\mathbb{P}\left\{|\xi_m(W)| \geq u m^{\frac{1}{2}-\alpha}, \|W\| \leq v\right\}\\ &\leq \sum_{m\geq m_0}\mathbb{P}\left\{|\xi_m(W)| \geq u m^{\frac{1}{2}-\alpha}\right\}\end{aligned}$$

où $m_0 = \max(1, (u/4v)^{1/\alpha})$ puisque, sur $\{\|W\| \leq v\}$, $|\xi_m(W)| \leq 4v\sqrt{m}$. Comme les $\xi_m(W)$ forment une suite de variables aléatoires suivant la loi gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^p$, le lemme 1 se déduit d'un calcul élémentaire. Pour le second, on note de la même façon que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{\left\|\int_0^{\cdot} K(s)\,dW(s)\right\|'_\alpha \geq u, \|K\| \leq 1\right\}\\ &\qquad\qquad \leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{P}\left\{\left|\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} K(s)\,dW(s)\right| \geq u2^{-\alpha n-1}, \|K\| \leq 1\right\},\end{aligned}$$