Spring '07

(1)

French Exam

(le vérifier pour $\dim(V)=1$, et observer que les deux membres sont additifs en V dans une suite exacte courte). Substituant (1.5.1) dans (1.5.2) et appliquant (1.5.3), on trouve

$$t\frac{d}{dt}\log Z(X_0, t)=\sum_i(-1)^i t\frac{d}{dt}\log\det(1-F^*t, H^i_c(X, \mathbf{Q}_\ell))^{-1},$$

soit

$$Z(X_0, t)=\prod_i\det(1-F^*t, H^i_c(X, \mathbf{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}. \tag{1.5.4}$$

Le membre de droite est un élément de $\mathbf{Q}_\ell(t)$. La formule affirme que son développement de Taylor en $t=0$, *a priori* une série formelle dans $\mathbf{Q}_\ell[[t]]$ de terme constant un, est dans $\mathbf{Z}[[t]]$, et est égal au membre de gauche, lui aussi considéré comme une série formelle en t. Cette formule est l'interprétation cohomologique de Grothendieck de la fonction Z.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème **(1.6)**. — *Soit* X_0 *une variété projective non singulière* (= *lisse*) *sur* $\mathbf{F}_q$. *Pour chaque i, le polynôme caractéristique* $\det(t.1-F^*, H^i(X, \mathbf{Q}_\ell))$ *est à coefficients entiers indépendants de* ℓ ($\ell\neq p$). *Les racines complexes* α *de ce polynôme* (*les conjugués complexes des valeurs propres de* F^*) *sont de valeur absolue* $|\alpha|=q^{i/2}$.

Montrons déjà que (1.6) résulte du résultat apparemment plus faible suivant.

Lemme **(1.7)**. — *Pour chaque i, et chaque* $\ell\neq p$, *les valeurs propres de l'endomorphisme* F^* *de* $H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ *sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes* α *sont de valeur absolue* $|\alpha|=q^{i/2}$.

Preuve de (1.7) $\Rightarrow$ (1.6). — Regardons $Z(X_0, t)$ comme une série formelle de terme constant 1, élément de $\mathbf{Z}[[t]]: Z(X_0, t)=\sum_n a_n t^n$. D'après (1.5.3), l'image de $Z(X_0, t)$ dans $\mathbf{Q}_\ell[[t]]$ est le développement de Taylor d'une fraction rationnelle. Ceci signifie que pour N et M assez grands ($\geq$ les degrés des numérateurs et dénominateurs) les déterminants de Hankel

$$H_k=\det((a_{i+j+k})_{0\leq i, j\leq M}) \qquad (k>N)$$

sont nuls. Cette nullité est vraie dans $\mathbf{Q}_\ell$ si et seulement si elle l'est dans $\mathbf{Q}$; $Z(X_0, t)$ est donc le développement en série de Taylor d'un élément de $\mathbf{Q}(t)$. En d'autres termes,

$$Z(X_0, t)\in\mathbf{Z}[[t]]\cap\mathbf{Q}_\ell(t)\subset\mathbf{Q}(t).$$

Écrivons $Z(X_0, t)=P/Q$, avec $P, Q\in\mathbf{Z}[t]$, premiers entre eux, et de terme constant positif. D'après un lemme de Fatou, que $Z(X_0, t)$ soit dans $\mathbf{Z}[[t]]$ et de terme constant un implique que les termes constants de P et Q sont 1. Posons

$$P_i(t)=\det(1-F^*t, H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)).$$

D'après l'hypothèse (1.7), les P_i sont premiers entre eux. Le membre de droite de (1.5.4) est donc sous forme irréductible, et

$$P(t) = \prod_{i \text{ impair}} P_i(t)$$

$$Q(t) = \prod_{i \text{ pair}} P_i(t).$$

Soit K le sous-corps d'une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$ engendré sur $\mathbf{Q}$ par les racines de $R(t) = P(t)Q(t)$. Les racines de $P_i(t)$ sont celles des racines de $R(t)$ ayant la propriété que tous leurs conjugués complexes sont de valeur absolue $q^{-i/2}$. Cet ensemble est stable sous $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Le polynôme $P_i(t)$ est donc à coefficients rationnels. D'après le lemme de Gauss (ou parce que les racines de P_i, étant racines de $R(t)$, sont des inverses d'entiers algébriques), il est même à coefficients entiers. La description ci-dessus des racines de $P_i(t)$ est indépendante de ℓ; le polynôme $P_i(t)$ lui-même est donc indépendant de ℓ.

La suite de cet article est consacrée à la démonstration de (1.7).

(1.8) La théorie de Grothendieck fournit une interprétation cohomologique non seulement de fonctions zêta, mais encore de fonctions L. Les résultats sont les suivants.

(1.9) Soit X une variété algébrique sur un corps k. Pour la définition d'un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible sur X, je renvoie à SGA 5 VI. Qu'il suffise de dire que:

a) Si $\mathscr{F}$ est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible sur X, il existe une partition finie de X en parties localement fermées X_i telles que $\mathscr{F}|X_i$ soit constant tordu.

b) Supposons X connexe et soit $\bar{x}$ un point géométrique de X. Pour $\mathscr{F}$ constant tordu, $\pi_1(X, \bar{x})$ agit sur la fibre $\mathscr{F}_{\bar{x}}$; le foncteur fibre en $\bar{x}$ est une équivalence de catégorie

($\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux constructibles constants tordus sur X) $\mapsto$
$\mapsto$ (représentations continues de $\pi_1(X, \bar{x})$ sur un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie).

Une telle représentation ne se factorise pas, en général, à travers un quotient fini de $\pi_1(X, \bar{x})$.

c) Si $k = \mathbf{C}$, les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux constructibles sur X s'identifient aux faisceaux de $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels $\mathscr{F}$ sur X^{an}, tels qu'il existe une partition finie de X en parties Zariski-localement fermées X_i, et pour chaque i un système local de $\mathbf{Z}_\ell$-Modules libres de type fini $\mathscr{F}_i$ sur X_i, avec

$$\mathscr{F}|X_i = \mathscr{F}_i \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell.$$

Nous ne considérerons que des $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux constructibles, et les appellerons simplement $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux.

(1.10) Supposons k algébriquement clos, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau sur X. Grothendieck a défini des groupes de cohomologie ℓ-adique $H^i(X, \mathscr{F})$ et $H^i_c(X, \mathscr{F})$. Les $H^i_c(X, \mathscr{F})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{Q}_\ell$, nuls pour $i > 2\dim(X)$.

2

entre $H_n - C$ *et* $H_n + C$ *avec*

$$H_n = \beta_{n-1} h_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j.$$

2) Démonstration du théorème 3

a) Choix des t_n. — Comme on l'a déjà mentionné on peut toujours prendre $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} + C$. Si l'on tient compte de la structure géométrique de F_n on montre dans ce paragraphe que l'on peut prendre mieux, $t_n = (1/2\pi) \log \log (e \alpha_n^{-1}) + C$, si F_n n'a pas de points fixes. Considérons $F \in S(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, F sans points fixes. Il faut prouver

Proposition III.2.1. — *Il existe une constante universelle* C *telle que, si* F *est sans point fixe, on ait pour* $\operatorname{Im} z \geqq (1/2\pi) \log \log (e \alpha^{-1}) + C$,

$$|F(z) - z - \alpha| \leqq \alpha/4,$$
$$|DF(z) - 1| \leqq 1/4.$$

Remarque. — Si F a des points fixes et $h \geqq 0$ est la plus grande hauteur d'un point fixe, en appliquant la proposition à $z \mapsto F(z + ih) - ih$ on a, pour $\operatorname{Im} z \geqq (1/2\pi) \log \log (e \alpha^{-1}) + h + C$,

$$|F(z) - z - \alpha| \leqq \alpha/4,$$
$$|DF(z) - 1| \leqq 1/4.$$

Donc on peut toujours prendre $t_n = (1/2\pi) \log \log (e \alpha_n^{-1}) + h_n + C$, où h_n est la plus grande hauteur d'un point fixe de F_n.

Démonstration. — F s'écrit $F(z) = z + \alpha + \varphi(z) = z + \alpha e^{\psi(z)}$, où φ et ψ sont **Z**-périodiques et $\lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \varphi(z) = \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \psi(z) = 0$. Par compacité de $\bigcup_{\alpha \in T^1} S(\alpha)$ il existe C telle que pour $\operatorname{Im} z \geqq C$,

$$|D\varphi(z)| \leqq 1/4,$$
$$|\varphi(z)| \leqq 1/4.$$

La première inégalité nous donne la deuxième estimation de la proposition. Pour abréger on notera $t = \operatorname{Im} z$. La deuxième inégalité nous donne, pour $t \geqq C$,

$$|e^{\psi(z)} - 1| \leqq \alpha^{-1}/4.$$

D'où

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leqq C \log \alpha^{-1}.$$

Maintenant en appliquant le lemme II.2.1 ci-dessous à $\theta(w) = \psi(z)$, $w = e^{2\pi i z}$, $\theta : \mathbf{D}_R \to \mathbf{C}$, avec $R = e^{-2\pi C}$ et $r = e^{-2\pi t}$, on a, pour $t \geqq C_1$,

$$\operatorname{Rev} \psi(z) \leqq |\psi(z)| \leqq C \log(\alpha^{-1}) e^{-2\pi t}.$$

Ainsi pour $t \geqq (1/2\pi)\log\log(e\alpha^{-1})+C$, $\operatorname{Re}\psi(z)\leqq C$; donc $|\varphi(z)|\leqq C\alpha^{-1}$. Finalement en appliquant le lemme II.2.1 (lemme de Schwartz) on a, pour $t\geqq(1/2\pi)\log\log(e\alpha^{-1})+C$, $|F(z)-z-\alpha|=|\varphi(z)|\leqq\alpha/4$. □

Lemme III.2.1 (Lemme de Carathéodory). – *Soit* $\theta:\bar{\mathbf{D}}_R\to\mathbf{C}$ *continue et holomorphe sur* $\mathbf{D}_R$ *telle que* $\theta(0)=0$. *Alors pour* $|w|=r<R$,

$$|\theta(w)|\leqq\frac{2r}{R-r}\sup_{|u|=R}\operatorname{Re}\theta(u).$$

Démonstration. – Posons $m=\sup_{|u|=R}\operatorname{Re}\theta(u)$ et $\eta(w)=\theta(w)/(2m-\theta(w))$. On a $\eta(0)=0$ et pour $w\in\mathbf{D}_R$, $|\eta(w)|\leqq 1$ car l'image de θ est contenue dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}u\leqq m\}$. Le lemme de Schwarz donne, pour $|w|=r<R$,

$$\left|\frac{\theta(w)}{2m-\theta(w)}\right|\leqq\frac{r}{R}.$$

Or l'ensemble des points $u\in\mathbf{C}$ tels que $\|u(2m-u)^{-1}\|\leqq M<1$ est un disque fermé, symétrique par rapport à l'axe réel et contenu dans le disque fermé de centre 0 et rayon $2mM(1-M)^{-1}$. Le lemme en résulte. □

b) Fin de la démonstration. – Donnons-nous $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log\log q_{n+1}}{q_n}<+\infty$$

et $F\in S(\alpha)$ non linéarisable. On fait la construction de Yoccoz en prenant $t_n=(1/2\pi)\log\alpha_n^{-1}+C$, si F_n a un point fixe, et $t_n=(1/2\pi)\log\log(e\alpha_n^{-1})+C$ sinon. F est non-linéarisable donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_{n-1}t_n=+\infty$. Or

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\beta_{i-1}\log\log(e\alpha_i^{-1})-C<+\infty,$$

donc il existe une sous-suite infinie $(n_k)_{k\geqq 1}$ telle que F_{n_k} ait un point fixe, $t_{n_k}=(1/2\pi)\log\alpha_{n_k}^{-1}+C$, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_{n_k-1}\log\alpha_{n_k}^{-1}=+\infty,$$

ce qui donne (*voir* le lemme I.2.1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}}=+\infty.$$

les égalités suivantes :

$$A\,\Phi(x)+B\,\Phi^1(x)+\ldots+L\,\Phi^{n+1}(x)=0,$$
$$A\,\Phi_1(x)+B\,\Phi_1^1(x)+\ldots+L\,\Phi_1^{n+1}(x)=0.$$

Or, on aura de même, en prenant pour limites supérieures des intégrales $z=b, c, \ldots, h$,

$$A\,\Phi_2(x)+B\,\Phi_2^1(x)+\ldots+L\,\Phi_2^{n+1}(x)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A\,\Phi_n(x)+B\,\Phi_n^1(x)+\ldots+L\,\Phi_n^{n+1}(x)=0,$$

et il est aisé de voir que les coefficients A, B, ..., L pourront être supposés des polynomes entiers en x. L'intégrale

$$\int_0^1 e^{-zx} z^m (z-1)^m\,dz,$$

qui figure dans la relation précédemment considérée (p. 154),

$$e^x\,\Pi(x)-\Pi_1(x)=\frac{x^{2m+1}e^x}{1.2.3\ldots m}\int_0^1 e^{-zx} z^m (z-1)^m\,dz,$$

nous servira d'abord d'exemple.

VIII. Dans ce cas facile, où l'on a simplement

$$f(z)=z(z-1),$$

je partirai, en supposant

$$\Theta(z)=x f^{m+1}(z)+(m+1) f^m(z) f'(z),$$

de l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d[e^{-zx}\Theta(z)]}{dz} &= e^{-zx}[\Theta'(z)-x\Theta(z)]\\ &= e^{-zx}[-x^2 f^{m+1}(z)+(m+1)f^m(z)f''(z)\\ &\qquad + m(m+1)f^{m-1}f'^2(z)],\end{aligned}$$

et j'observerai que

$$f'^2(z)=4z^2-4z+1=4f(z)+1, \qquad f''(z)=2,$$

ce qui permet de l'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d[e^{-zx}\Theta(z)]}{dx} &= e^{-zx}[-x^2 f^{m+1}(z)\\ &\quad +(2m+1)(2m+2)f^m(z)+m(m+1)f^{m-1}(z)].\end{aligned}$$

Nous aurons donc, en intégrant,

$$e^{-zx}\Theta(z) = -x^2\int e^{-zx}f^{m+1}(z)\,dz + (2m+1)(2m+2)\int e^{-zx}f^m(z)\,dz$$
$$+ m(m+1)\int e^{-zx}f^{m-1}(z)\,dz,$$

et ensuite, si nous prenons pour limites $z=0$ et $z=1$,

$$x^2\int_0^1 e^{-zx}f^{m+1}(z)\,dz = (2m+1)(2m+2)\int_0^1 e^{-zx}f^m(z)\,dz$$
$$+ m(m+1)\int_0^1 e^{-zx}f^{m-1}(z)\,dz.$$

Soit maintenant

$$\varepsilon_m = \frac{x^{2m+1}e^x}{1.2\ldots m}\int_0^1 e^{-zx}z^m(z-1)^m\,dz,$$

et cette relation deviendra

$$\varepsilon_{m+1} = (4m+2)\varepsilon_m + x^2\varepsilon_{m-1}.$$

C'est le résultat auquel nous voulions parvenir; en y supposant successivement $m=1, 2, 3, \ldots$, les équations qu'on en tire

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= 6\varepsilon_1 + x^2\varepsilon_0,\\
\varepsilon_3 &= 10\varepsilon_2 + x^2\varepsilon_1,\\
\varepsilon_4 &= 14\varepsilon_3 + x^2\varepsilon_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

donnent aisément la fraction continue

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = -\cfrac{x^2}{6+\cfrac{x^2}{10+\cfrac{x^2}{14+\ldots}}},$$

et il suffit d'employer les valeurs

$$\varepsilon_0 = xe^x\int_0^1 e^{-zx}\,dz = e^x - 1,$$

$$\varepsilon_1 = x^3e^x\int_0^1 e^{-zx}z(z-1)\,dz = e^x(2-x) - 2 - x,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 2 - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} x,$$

pour retrouver, sauf le changement de x en $\frac{x}{2}$, le résultat de Lambert [1]

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{x}{2 + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \dots}}}}$$

En abordant maintenant le cas général et me proposant d'obtenir, à l'égard des intégrales définies

$$\int_0^a e^{-z} f^m(z)\, dz, \quad \int_0^b e^{-z} f^m(z)\, dz, \quad \dots, \quad \int_0^h e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

un algorithme qui permette de les calculer de proche en proche, pour toutes les valeurs du nombre entier m, j'introduirai, afin de rendre les calculs plus symétriques, les modifications suivantes dans les notations précédemment admises. Je ferai

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_n),$$

au lieu de

$$f(z) = z(z - a)(z - b)\dots(z - h),$$

de manière à considérer le polynome le plus général de degré $n + 1$; désignant ensuite par Z l'une quelconque des quantités $z_1, z_2, \dots, z_n$, je raisonnerai sur l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

qui donnera évidemment toutes celles que nous avons en vue, en faisant $z_0 = 0$. Cela étant, voici la remarque qui m'a ouvert la voie et conduit à la méthode que je vais exposer.

(1) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, année 1761, p. 265). *Voir* aussi la Note IV des *Éléments de Géométrie*, de Legendre, p. 288.