1

French Exam Fall 2008

ÉTUDE DES FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER

par Marcel BRELOT

I. — INTRODUCTION

1. Dans l'espace à $\tau \geqslant 2$ dim. et au voisinage d'un point singulier à distance finie ou à l'infini, les développements classiques d'une fonction *harmonique* u montrent aisément, comme on sait, en notant $\mathfrak{M}_f^r(O)$ la moyenne d'une fonction f sur la circonférence ou sphère Σ_O^r de centre O et rayon r, que les limitations de croissance en *moyenne* du type : $r^\lambda \mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ borné ou tendant vers o quand $r \to 0$ (cas du point singulier O à distance finie et $\lambda > \tau - 2$) ou quand $r \to \infty$ (point singulier à l'infini, O quelconque à distance finie et $\lambda > 0$) entraînent au moins les mêmes limitations *vraies* pour $|u|$ par disparition des termes du développement correspondant à une croissance plus rapide.

D'autre part, *pour u sous-harmonique*, il m'a été facile autrefois, d'obtenir quelques résultats généraux sur son allure au voisinage du point singulier, grâce au fait que $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est d'après F. Riesz fonction convexe de $h(r)$ avec

$$h(r) = \log 1/r \quad (\tau = 2) \qquad \text{ou} \qquad 1/r^{\tau-2} \quad (\tau > 2).$$

J'ai même approfondi le cas où u admet une *majorante harmonique* sur ce voisinage pointé, seul cas d'ailleurs où s'applique la représentation intégrale de F. Riesz à l'aide de la fonction de Green. On trouve alors, comme dans le cas harmonique, que des limitations de croissance en moyenne du type indiqué plus haut, sur la moyenne du u^+ entraînent les mêmes limitations vraies pour u^+ mais non plus pour $|u|$(1) ; cela pose la question pour u sans majo-

(1) Sur toute cette étude antérieure, dont on rappellera les premières notions aux

rante harmonique et le présent mémoire va y répondre en faisant presque entièrement l'extension.

On sait jusqu'ici peu de chose de plus ; cependant, en vue de perfectionner un point de la théorie des fonctions entières, M. Heins [2] a récemment établi le théorème suivant :

Soit $u(z)$ réelle sous-harmonique dans tout le plan (fini), harmonique au voisinage de l'origine O et d'ordre < 1, c'est-à-dire telle que pour un certain nombre $\rho(0 < \rho < 1)$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\max._{|z|=r} u(z)}{r^\rho} < +\infty .$$

Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ dans le plan telle que :

$$(1) \qquad u(z) = u(0) + \lim_{r \to \infty} \int_{D_0^r} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_\zeta$$

(D_0^r domaine $|z| < r$).

Il n'est pas nécessaire, comme le fait remarquer l'auteur, que u soit harmonique au voisinage de l'origine ; un passage à la limite conserve la formule si l'on a seulement $u(0)$ fini.

De plus, comme je l'ai signalé dans une analyse de l'article de Heins (voir *Zentralblatt* 29, p. 298, 1948) la démonstration même de l'auteur, basée sur la représentation intégrale de F. Riesz permet d'améliorer l'énoncé. Ainsi, comme limitation de croissance de u, il suffit de supposer que $\mathfrak{M}_{u^+}^r/r \to 0\, (r \to \infty)$; si même on suppose un peu plus, à savoir que $\mathfrak{M}_{u^+}^r/r^2$ est sommable en r au voisinage de l'infini [3], *ce qui a lieu dans le cas de Heins,* on peut remplacer dans (1) la limite de $\int_{D_0^r}$ par une vraie intégrale de Radon étendue à tout le plan ; car cette hypothèse entraîne la sommabilité en r [4] de $\mu(D_0^r)/r^2$, ce qui équivaut [5] à la sommabilité-μ de $1/|\zeta|$.

n^{os} 12 et 14, voir essentiellement un fascicule des *Actualités scientifiques et industrielles* n° 139 (1934) noté (FAS) et un mémoire, qui sera noté (AN), des *Annales de l'École Normale supérieure,* t. 61, p. 301 (1944). Voir des extensions au voisinage d'un point-frontière irrégulier dans un article des *Annales de l'Université de Grenoble, section Sciences math. et phys.*, 22 (1946) p. 205.

(2) M. Heins, *Annals of Math.*, 49, p. 200 (1948).

(3) Cela entraîne bien que $\mathfrak{M}_{u^+}^r/r \to 0$ à cause de la croissance de $\mathfrak{M}_{u^+}^r$. Voir le lemme général 1 qui suit.

(4) En effet de (1), ou seulement de la représentation potentielle de toute fonction sous-harmonique, finie en O, dans $D_0^R (R > r)$ résulte :

$$\mathfrak{M}_u^r - u(0) = \int_{D_0^r} \log \left| \frac{r}{\zeta} \right| d\mu_\zeta \geqslant \log 2 - \mu(D_0^{r/2})$$

(voir aussi le lemne 4' C qui suit).

(5) Par une intégration par parties (voir le lemne 2' C qui suit).

2

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES ($\mathcal{F}$) ET ($\mathcal{LF}$)

par Jean DIEUDONNÉ et Laurent SCHWARTZ (Nancy).

---

1. **Introduction**[1]. — Etant donné un espace vectoriel topologique E on sait qu'on est amené à définir sur son *dual* E′ (espace des formes linéaires continues dans E) plusieurs topologies distinctes (en général), correspondant à la convergence uniforme des formes linéaires sur E dans des familles de parties de E plus ou moins vastes ; les deux plus importantes sont la topologie *faible* (topologie de la convergence simple) et la topologie *forte* (topologie de la convergence uniforme dans tout ensemble *borné* de E). Les propriétés de la topologie faible ont un caractère élémentaire et quasi algébrique [5] : mais en dehors du cas où E est un espace *normé* (cf. [2] et [5]), l'étude des relations entre la topologie forte et la topologie faible sur E′ est encore très peu développée. Nous nous proposons, dans ce travail, de faire cette étude pour les espaces ($\mathcal{F}$) et une catégorie d'espaces plus généraux, que nous appelons espaces ($\mathcal{LF}$), et qui peuvent être considérés comme « limites inductives » de suites d'espaces ($\mathcal{F}$), en un certain sens ; ces espaces jouent un grand rôle dans la théorie des *distributions*, développée récemment par l'un de nous [13], où la théorie de la dualité est un outil essentiel. Il est remarquable qu'un grand nombre de propriétés classiques de la théorie des espaces normés s'étendent aux espaces ($\mathcal{F}$) et aux espaces ($\mathcal{LF}$) bien que (notamment pour ces derniers) la méthode qui sert à démontrer ces propriétés pour les espaces normés se révèle inapplicable telle quelle (en particulier en raison du fait que le théorème de Baire ne s'applique plus dans ces espaces).

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

2. **Préliminaires.** — Nous suivons la terminologie et les notations générales des *Éléments* de N. Bourbaki ([3] et [4]). Pour la définition et les propriétés élémentaires des espaces localement convexes, nous renvoyons à [5](2). Ajoutons seulement quelques compléments relatifs à la notion d'ensemble *borné*, qui joue un rôle très important dans tout ce qui suit. Rappelons que, dans un espace vectoriel topologique E, un ensemble A est dit *borné* si pour tout voisinage U de O, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda U$. Tout homothétique d'un ensemble borné est borné; si B_1 et B_2 sont bornés, il en est de même de $B_1 \cup B_2$ et de $B_1 + B_2$; l'adhérence d'un ensemble borné est bornée: l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble borné A (plus petit ensemble convexe fermé contenant A) est bornée. L'image d'un ensemble borné par une application linéaire continue est bornée. Tout ensemble *précompact* est borné. Enfin, si (x_n) est une *suite de Cauchy* dans E, l'ensemble des x_n est *borné*; en effet, pour tout voisinage convexe symétrique V de O, il existe un entier m tel que $x_m - x_n \in V$ pour tout $n \geqslant m$; comme l'ensemble des x_p d'indice $p < m$ est fini, donc borné, il existe $\lambda > 0$ tel que cet ensemble soit contenu dans λV, donc l'ensemble des x_n est contenu dans $(\lambda + 1)V$.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à considérer des espaces localement convexes sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, la théorie se déroulant de façon tout à fait analogue pour les espaces localement convexes sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Si E et F sont deux espaces localement convexes séparés, nous désignerons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F; c'est un espace vectoriel (sur $\mathbf{C}$). Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E; pour que la topologie de la *convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$ soit *compatible* avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ (c'est-à-dire pour que $u + v$ et λu soient continues), on constate aisément qu'il faut et qu'il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $u(A)$ soit *borné* dans F. Cette condition est toujours remplie si les ensembles de la famille $\mathfrak{S}$ sont *bornés* dans E; nous supposerons toujours désormais qu'il en est ainsi. On peut toujours supposer en outre que toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, que toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, et enfin que tout homothétique d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$; dans ces conditions, un système fondamental de voisinages de O dans

(2) Signalons que nous entendons par espace *localement convexe* un espace vectoriel topologique, *séparé ou non*, tel qu'il existe un système fondamental de voisinages de O formé d'ensembles convexes.

(3

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 333-344.

LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS LES ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS

par Gustave CHOQUET (Paris).

Dans un travail antérieur (1), nous avons démontré le théorème suivant :

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel séparé localement convexe, $\mathcal{B}$ une partie convexe compacte de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$. Alors si $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ de $\mathcal{B}$, et tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon positive portée par $\mathcal{E}$.

Récemment (2) Errett Bishop et Karel de Leeuw, en utilisant une idée nouvelle fort intéressante, ont pu simplifier notre démonstration et étendre le théorème, sous une forme atténuée, au cas où $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable :

Tout point de $\mathcal{B}$ est alors barycentre d'une mesure de Radon positive sur $\mathcal{B}$, pseudo-portée par $\mathcal{E}$ en ce sens qu'elle ne charge aucun compact de Baire [1] disjoint de $\mathcal{E}$; et il existe des cas où l'expression « pseudo-portée » ne peut être remplacée par « portée ».

L'utilisation fréquente, en analyse, du théorème de représentation intégrale, en rend souhaitable pour l'enseignement une démonstration simple. Nous allons ici reprendre la méthode de Bishop et de Leeuw; nous la simplifierons, notamment en supposant dès le départ que $\mathcal{B}$ est métrisable; d'autre part nous n'utiliserons pas comme eux l'inégalité de Schwartz;

[1] Un compact de Baire dans $\mathcal{B}$ est un compact de $\mathcal{B}$ qui a, dans $\mathcal{B}$, une base dénombrable de voisinages, autrement dit qui est un G_δ.

pour cela nous remplacerons leurs fonctions f^2 (où f est linéaire) par des fonctions convexes quelconques, plus maniables.

Dans une seconde et dans une troisième partie, nous reviendrons sur quelques points de leur travail pour en préciser la portée; cet examen nous amènera à poser quelques problèmes.

I. — LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Les outils que nous utiliseront sont :

1) Lemme de Zorn sur les ensembles ordonnés inductifs.

2) Théorème élémentaire des sections [2] : Soit E topologique séparé et réunion dénombrable de compacts métrisables, et soit f une application continue de E sur F topologique séparé ; alors il existe une application g de 1re classe [3] de F dans E telle que $f \circ g =$ identité.

3) Intégration des mesures : Soient A et B deux espaces compacts, et φ une application faiblement continue de A dans l'espace $\mathcal{M}^+(B)$ des mesures de Radon positives sur B. Nous supposons connue la définition et les propriétés élémentaires de $\int \varphi d\mu$, où μ est une mesure de Radon positive sur A.

Notations. — $\mathcal{V}$, espace vectoriel topologique (sur R), séparé et localement convexe.

$\mathcal{B}$, partie convexe compacte de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{E}$, ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{M}^+$ (resp. $\mathcal{M}^1$), l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\mathcal{B}$ (resp. positives et de norme 1).

$\mathcal{A}$, ensemble des fonctions affines continues sur $\mathcal{V}$ (linéaires + C^{te}).

(2) En vue de l'enseignement, en voici une démonstration simple.

L'ensemble triadique de Cantor A est homéomorphe à $\{0,1\}^{\aleph_0}$, donc aussi à $(\{0,1\}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$; donc A est homéomorphe à $A^{\aleph_0}$. Comme $[0,1]$ est image continue de A, il en est alors de même de $[0,1]^{\aleph_0}$. Comme tout espace compact métrisable est plongeable dans $[0,1]^{\aleph_0}$ un tel espace est image continue d'une partie fermée de A.

Il en résulte aussitôt que l'espace E de l'énoncé est image continue d'un fermé de R^+ : $E = \varphi(B)$ avec φ continue et B fermé $\subset R^+$.

Posons $h = f \circ \varphi$ et, pour tout $x \in F$, posons $k(x) = \inf. \left((h^{-1}(x)\right)$; l'application k de F dans R^+ est semi-continue inférieurement, donc de 1re classe. L'application $g = \varphi \circ k$ de F dans E est la section cherchée.

(3) C'est-à-dire que $g^{-1}(\omega)$ est un F_σ pour tout ouvert ω de E.