S08 French Exam

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 137 à 154.

LA THÉORIE DES CLASSES DE CHERN

[Appendice au Mémoire de A. Borel et J.-P. Serre]

PAR

ALEXANDER GROTHENDIECK.

Introduction. — Dans cet appendice, nous développons une théorie axiomatique des classes de Chern, qui permet en particulier de définir les classes de Chern d'un fibré vectoriel algébrique E sur une variété algébrique non singulière quasi projective X comme des éléments de l'anneau de Chow $A(X)$ de X, i. e. comme des classes de cycles pour l'équivalence rationnelle. Cet exposé est inspiré du livre de HIRZEBRUCH d'une part (où les *propriétés formelles* essentielles caractérisant une théorie des classes de Chern étaient bien mises en évidence), et d'une idée de CHERN [2], qui consiste à utiliser la structure multiplicative de l'anneau des classes de cycles sur le fibré en espaces projectifs $P(E)$ associé à E, pour parvenir à une *construction* effective des classes de Chern. On notera que l'exposé donné ici vaut dans d'autres cadres que celui de la Géométrie algébrique et redonne par exemple une théorie entièrement élémentaire des classes de Chern pour les fibrés vectoriels complexes sur des variétés topologiques (et partant, sur tous les espaces pour lesquels le théorème de classification des fibrés principaux à groupe structural à l'aide d'un « espace classifiant » est valable). De même, on obtiendrait, pour un fibré vectoriel analytique complexe E sur une variété analytique complexe (non singulière) X des classes de Chern

$$c_p(E) \in \mathrm{H}^p(X, \, \mathbf{\Omega}_X^p),$$

où $\mathbf{\Omega}_X^p$ est le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p sur X. [Et il est certainement facile de montrer que cette définition coïncide avec celle donnée récemment par ATIYAH [1], et qu'elle est reliée à la définition topologique des classes de Chern à l'aide de la suite spectrale qui relie les $H^p(X, \mathbf{\Omega}_X^q)$ et $H^*(X, \mathbf{C})$.] De même, la théorie des classes de

Stiefel-Whitney en cohomologie mod 2 rentre dans le schéma qui sera donné ici.

Il semble qu'une théorie satisfaisante des classes de Chern en Géométrie algébrique ait été exposée pour la première fois par W. L. Chow (non publié), qui utilise la grassmanienne. Le souci principal de la présente rédaction a été d'éliminer la grassmannienne de la théorie. J'ai montré ailleurs [4] comment la théorie des classes de Chern permet de *retrouver* la structure de $A(X)$ quand X est une grassmanienne.

1. Notations. — Pour ne pas nous exposer à des complications provenant de la théorie des intersections, nous nous limitons dans ce qui suit à la considération d'espaces algébriques *non singuliers*. Le corps de base k sera fixé une fois pour toutes, et pour fixer les idées le lecteur pourra le supposer algébriquement clos. Tous les espaces fibrés, sous-variétés, morphismes, etc. envisagés par la suite seront définis sur k.

Si X est un espace algébrique, E un fibré vectoriel sur X, on désigne par $P(E)$ le fibré projectif associé. La fibre $P(E)_x$ de $P(E)$ au point $x \in X$ est donc l'espace projectif associé à l'espace vectoriel E_x, donc un point de $P(E)_x$ au-dessus d'un point $x \in X$ n'est autre chose qu'une droite homogène dans E_x. Soit $f\colon P(E) \to X$ la projection d'espace fibré; considérons sur $P(E)$ le fibré vectoriel $f^{-1}(E)$ image inverse de E par f. Il y a un sous-fibré canonique de rang 1 de $f^{-1}(E)$, dont la fibre en un point d de $P(E)$ (au-dessus du point x de X) est la droite d dans $E_x = f^{-1}(E)_d$. Le fibré dual de ce sous-fibré de $f^{-1}(E)$ est noté L_E, on a donc l'inclusion

$$\check{L}_E \subset f^{-1}(E).$$

Soit p le rang de E (supposé constant, ce qui est toujours le cas si X est connexe). Alors $E^{(1)} = f^{-1}(E)/\check{L}_E$ est un fibré vectoriel de rang $p-1$ sur $X^{(1)} = P(E)$, on peut donc construire $P(E^{(1)}) = X^{(2)}$ et le fibré analogue $E^{(2)} = (E^{(1)})^{(1)}$ de rang $p-2$ sur $X^{(2)}$. On construit ainsi par récurrence des variétés $X^{(i)}$ et des fibrés vectoriels $E^{(i)}$ de rang $p-i$ sur $X^{(i)}$ $(1 \leq i \leq p)$, $X^{(i)}$ étant le fibré $P(E^{(i-1)})$ sur $X^{(i-1)}$. Appelons *drapeau de longueur* i dans un espace vectoriel V une suite croissante $(V_j)_{0 \leq j \leq i}$ de sous-espaces vectoriels V_j, avec $\dim V_j = j$. Alors $X^{(i)}$ peut aussi s'interpréter comme le *fibré sur* X *des drapeaux de longueur* i dans E, et si $f^{(i)}$ est la projection de $X^{(i)}$ sur X, on définit directement, comme pour la définition de L_E, une suite croissante de sous-fibrés $(V_j)_{0 \leq j \leq i}$ de $E_i = (f^{(i)})^{(-1)}(E)$, rang $(V_j) = j$, le quotient de E_i par V_i n'étant autre que le fibré vectoriel $E^{(i)}$. En particulier, $X^{(p)}$ est *la variété des drapeaux* (de longueur maximum p) $D(E)$ de E, qui apparaît donc comme « extension multiple » de X par des fibrations en espaces projectifs associées à des fibrés vectoriels; l'image inverse E_p de E dans $X^{(p)} = D(E)$ étant de plus *complètement scindée*. Par là on entend que ce fibré vectoriel de rang p est muni d'une suite $(V_i)_{0 \leq i \leq p}$ de sous-fibrés vectoriels, avec rang $(V_i) = i$. Alors les V_i/V_{i-1} $(1 \leq i \leq p)$ sont des fibrés vectoriels de rang 1, appelés les *facteurs* du scindage donné.

Si X est un espace algébrique, nous désignons par $\mathbf{P}(X)$ le groupe des classes (à isomorphisme près) de fibrés vectoriels de rang 1 sur X (la loi de composition du groupe étant donnée par la multiplication tensorielle des fibrés). Si L est un tel fibré vectoriel de rang 1, on désigne par $cl_X(L)$ l'élément de $\mathbf{P}(X)$ qu'il définit. On a donc

$$cl_X(L \otimes L') = cl_X(L) + cl_X(L'), \qquad cl_X(\check{L}) = -cl_X(L).$$

Si $f: X \to Y$ est un morphisme, alors la formule

$$f^*(cl_X(L)) = cl_X(f^{-1}(L))$$

définit un homomorphisme f^* de $\mathbf{P}(Y)$ dans $\mathbf{P}(X)$. Ainsi, $\mathbf{P}(X)$ peut être considéré comme un *foncteur contravariant* en X.

Soit toujours $f: X \to Y$ un morphisme, et soit F un fibré vectoriel de rang p sur Y, posons $E = f^{-1}(F)$. C'est un fibré vectoriel de rang p sur X, et l'on a un isomorphisme canonique $P(E) = f^{-1}(P(F))$, d'où un morphisme naturel

$$\bar{f}: \quad P(E) \to P(F) \qquad [E = f^{-1}(F)].$$

Ceci dit, on vérifie aussitôt que L_E *est canoniquement isomorphe à l'image inverse* $\bar{f}^{-1}(L_F)$. On a par suite la formule

$$cl(L_E) = \bar{f}^*(cl(L_F)).$$

Soient E un fibré vectoriel de rang p sur X, s une section régulière de E. C'est donc un morphisme de X dans E, qui est même un isomorphisme de X sur un sous-espace fermé de E de codimension p. En particulier, l'image de X par la section nulle est un sous-espace fermé non singulier X' de E de codimension p. Évidemment, l'image réciproque $s^{-1}(X')$ n'est autre que l'ensemble des zéros de s. Pour que le *cycle* $s^{-1}(X')$ soit défini, il faut et il suffit que l'ensemble des zéros de s soit partout vide ou de codimension p dans X. Dans ce cas, on peut donc parler du *cycle des zéros* de la section s. Rappelons par ailleurs que le morphisme s est dit *transversal* à la sous-variété X' de X, si en tout point de l'image inverse de X' par s, l'application tangente à s est surjective mod l'espace tangent à X' Dans ce cas, $s^{-1}(X')$ est un sous-espace algébrique non singulier de X partout de codimension p, et toutes ses composantes sont de multiplicité 1 dans le cycle des zéros de s. On dira pour abréger que la section s est *transversale à la section nulle*. Pour exprimer cette propriété par le calcul, comme elle est locale sur X, on peut supposer que E est le fibré trivial $X \times k^p$, donc que s est défini par la donnée de p fonctions régulières $(f_1, \ldots, f_p)$ sur X. Pour que s soit transversale à la section nulle, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ fassent partie d'un système régulier de paramètres de $\mathbf{O}_x$.

2. **Le foncteur** $A(X)$. — On suppose donnée par la suite une catégorie $\mathbf{V}$ d'espaces algébriques non singuliers (les morphismes dans cette catégorie étant les morphismes d'espace algébrique). La seule condition imposée à $\mathbf{V}$ étant

($\mathbf{V}$ 1). *Si* $X \in \mathbf{V}$, *et si* E *est un fibré vectoriel sur* X, *alors* $P(E) \in \mathbf{V}$.

On suppose qu'on a de plus les données suivantes :

a. Un foncteur contravariant $X \to A(X)$ de $\mathbf{V}$ dans la catégorie des anneaux gradués avec unité anticommutatifs;

b. Un homomorphisme fonctoriel $p_X : \mathbf{P}(X) \to A^2(X)$ $(X \in \mathbf{V})$;

c. Pour tout $X \in \mathbf{V}$, et tout sous-espace algébrique fermé Y de X, $Y \in \mathbf{V}$, de codimension constante p dans X, un homomorphisme de groupes

$$i_* : \ A(Y) \to A(X) \qquad (i \text{ désignant l'injection } Y \to X)$$

augmentant les degrés de $2p$ unités.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathbf{V}$, l'homomorphisme correspondant de $A(Y)$ dans $A(X)$ est noté f^*. L'élément unité de $A(X)$ sera noté 1_X, et si X, $Y \in \mathbf{V}$, et si Y est un sous-espace fermé de X de codimension constante p, on pose $p_X(Y) = i_*(1_Y)$, où i est le morphisme d'injection de Y dans X.

Ceci posé, nous supposons les conditions suivantes satisfaites :

A 1. Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, $P(E)$ le fibré projectif associé, ξ_E l'élément de $A(P(E))$ défini par

$$\xi_E = p(cl(L_E)).$$

Considérons $A(P(E))$ comme un module à gauche sur $A(X)$ grâce à l'homomorphisme $f^* : A(X) \to A(P(E))$ associé à la projection $f : P(E) \to X$. Alors les éléments

$$(\xi_E)^i \qquad (0 \leqq i \leqq p-1)$$

forment une base de $A(P(E))$ sur $A(X)$.

A 2. Soient $X \in \mathbf{V}$, L un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathbf{V}$, s une section régulière de L transversale à la section nulle et telle que l'espace Y des zéros de s appartienne à $\mathbf{V}$. Alors on a

$$p_X(Y) = p_X(cl_X(L)).$$

A 3. Soient X, Y, $Z \in \mathbf{V}$, avec $Z \subset Y \subset X$, soient i et j les morphismes d'injection $Z \to Y$ et $Y \to X$, alors on a $(ji)_* = j_* i_*$.

A 4. Soient X, $Y \in \mathbf{V}$, avec $Y \subset X$, soit i le morphisme d'injection de Y

LE PROBLÈME DES NOMBRES CONGRUENTS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Ce texte est une introduction à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, à travers le problème des nombres congruents (à quelle condition un entier donné est-il l'aire d'un triangle rectangle à côtés rationnels ?) qui est probablement le plus vieux problème non résolu à ce jour. C'est une version commentée d'un exposé donné, en mai 2005, au séminaire des élèves de l'École Polytechnique.

Introduction

DÉFINITION 1. — *Un entier D, sans facteur carré* (divisible par le carré d'aucun nombre premier), *est congruent, s'il existe un triangle rectangle de cotés rationnels dont l'aire est D ; autrement dit, si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbf{Q}$ avec $a^2 + b^2 = c^2$ et $D = \frac{ab}{2}$.*

Pour étudier les nombres congruents, on peut commencer par étudier l'ensemble des triangles rectangles à côtés rationnels, c'est-à-dire résoudre l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ en nombres rationnels. On pose $u = \frac{a}{c}$ et $v = \frac{b}{c}$, et on est ramené à trouver les points rationnels sur le cercle $u^2 + v^2 = 1$ avec $u > 0$ et $v > 0$. Pour cela, on note t la pente de la droite joignant (u, v) à $(-1, 0)$, dont l'équation est donc $v = t(u + 1)$; on a $t \in \mathbf{Q}$ et $(u, v) = (\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1})$. En conclusion, $a, b, c \in \mathbf{Q}$ sont les côtés d'un triangle rectangle si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{Q}$, $0 < t < 1$, tel que $a = \frac{1-t^2}{t^2+1}c$ et $b = \frac{2t}{t^2+1}c$. En posant $x = -t$ et $y = \frac{t^2+1}{c}$, ce qui précède permet presque[1] de démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 2. — *Si D est un entier positif sans facteur carré, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *D est congruent*
(ii) *L'équation $Dy^2 = x^3 - x$ a une solution dans $\mathbf{Q}^2$ avec $y \neq 0$.*

Déterminer si un entier est congruent ou pas, est un problème très ancien et très difficile. On a par exemple le résultat suivant « conjecturé » par FIBONACCI (1175-1240).

THÉORÈME 3 (FERMAT (1601-1665)). — *1 n'est pas un nombre congruent.*

C'est une des nombreuses utilisations que FERMAT a trouvées pour sa méthode[2] de « la descente infinie ». Remarquons que si a, b, c sont des entiers non nuls vérifiant $a^4 - b^4 = c^4$, et si $x = \frac{a^2}{b^2}$, $y = \frac{ac^2}{b^3}$, alors $y = x^3 - x$. Le fait que 1 n'est pas congruent implique donc le théorème de Fermat[3] pour l'exposant 4.

Exemple 4 (ZAGIER). — L'entier 157 est congruent, mais le triangle (a, b, c) le plus simple d'aire 157 est

$$a = \frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203}, \qquad b = \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610},$$
$$c = \frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}.$$

Cet exemple montre que la chasse aux triangles rectangles à côtés rationnels d'aire D risque d'être un peu acrobatique... Le résultat suivant de TUNNELL (1983) n'en est que plus remarquable.

THÉORÈME 5. — *Soit D un entier impair sans facteur carré. Si D est congruent, alors*

$$|\{x, y, z \in \mathbf{Z},\ 2x^2 + y^2 + 8z^2 = D\}| = 2 \cdot |\{x, y, z \in \mathbf{Z},\ 2x^2 + y^2 + 32z^2 = D\}|. \qquad (*)$$

Réciproquement, si D vérifie $(*)$, et si (une forme faible de) *la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vraie, alors D est congruent.*

Il y a un résultat similaire pour D pair. Comme il est très facile de décider si D vérifie ou non $(*)$, cela fournit un critère effectif permettant de décider qu'un nombre donné est non congruent, ou (sous Birch et Swinnerton-Dyer) congruent, et ce, sans exhiber de triangle rectangle d'aire D. Un entier congru à 5 ou 7 modulo 8 vérifie $(*)$ car les deux ensembles sont vides, mais on ne sait pas montrer que cela implique que D est congruent...

Comme le lecteur le constatera, la démonstration de ce théorème emprunte des chemins très détournés (ce qui en fait le charme) ; on peut légitimement se demander si une preuve plus directe ne serait pas possible, maintenant qu'on connaît la réponse.

1. Arithmétique des courbes elliptiques

Si C est une conique, on peut étudier l'ensemble $C(\mathbf{Q})$ des points à coordonnées rationnelles de C comme on l'a fait pour le cercle. On trouve un point $P \in C(\mathbf{Q})$ sur la conique et on paramètre les points de la conique par la pente d'une droite variable passant par P. Cette stratégie ne marche plus pour une courbe C donnée par une équation de degré 3 (comme la courbe C_D d'équation $Dy^2 = x^3 - x$) car, si on coupe par une droite passant par un point de $C(\mathbf{Q})$, et qu'on élimine y entre les deux équations, on obtient une équation de degré 3 en x dont on sait seulement qu'une des solutions est rationnelle ; les deux autres vivent donc, en général, dans une extension quadratique de $\mathbf{Q}$, mais pas dans $\mathbf{Q}$. Par contre, si on prend une droite passant par deux points rationnels de C ou tangente à un point rationnel de C, alors on obtient une équation dont deux des solutions (ou une solution double) sont rationnelles ; comme la somme des racines est aussi rationnelle, cela montre que cette droite recoupe C en un point rationnel.

Une *courbe elliptique* E sur un corps K est une courbe d'équation $y^2 = P(x)$, avec $P \in K[X]$, de degré 3, sans racine double[4]. On note $E(K)$ l'ensemble des solutions dans K^2 de $y^2 = P(x)$, et $\overline{E}(K) = E(K) \cup \{\infty\}$, avec la convention qu'une droite passe par ∞ si et seulement si elle est verticale[5]. On munit $\overline{E}(K)$ d'une loi de composition $+$ qui en fait un groupe commutatif[6] avec ∞ comme élément neutre et $P + Q + R = \infty$ si et seulement si (P, Q, R) sont alignés (avec les conventions évidentes si deux ou trois des points sont confondus ; en particulier, P est d'ordre 2 si et seulement si ∞ appartient à la tangente à E en P, c'est-à-dire si et seulement si $y = 0$; de même, P est d'ordre 3 si et seulement si la tangente en P à E a un contact d'ordre 3).

THÉORÈME 6. — *Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, le groupe $\overline{E}(\mathbf{Q})$ est engendré par un nombre fini d'éléments ; il est donc isomorphe à $\overline{E}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} \oplus \mathbf{Z}^{r(E)}$, où $\overline{E}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$, sous-groupe des points d'ordre fini[7], est un groupe fini, et $r(E) \in \mathbf{N}$.*

Ce résultat, conjecturé par POINCARÉ vers 1900, a été démontré par MORDELL en 1922 en adaptant[8] la méthode de la descente infinie de FERMAT ; c'est un cas particulier du célèbre théorème de Mordell-Weil. Le groupe $\overline{E}(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}$ se calcule très facilement ; par contre la détermination du rang $r(E)$ et des générateurs de $\mathbf{Z}^{r(E)}$ est très délicate. À ce jour, il n'y a pas d'algorithme[9] dont on peut prouver qu'il va permettre de les déterminer, ce qui ne nous arrange pas en ce qui concerne le problème des nombres congruents, mais la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, dont il sera question plus loin, fournirait un tel algorithme si elle était démontrée.

Exemple 7. — On note C_D la courbe elliptique d'équation $Dy^2 = x^3 - x$. Alors $Q_1 = (-1, 0)$, $Q_2 = (0, 0)$ et $Q_3 = (1, 0)$ sont d'ordre 2, et $\overline{C}_D(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} = \{\infty, Q_1, Q_2, Q_3\}$. En conséquence, D est congruent si et seulement si $r(C_D) \geqslant 1$.

2. L'heuristique de BIRCH et SWINNERTON-DYER

Si p est un nombre premier, $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps. Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ et p ne divise pas b, on peut voir r comme un élément de $\mathbf{F}_p$ en réduisant a et b modulo p (i.e. en prenant le quotient des images de a et b dans $\mathbf{F}_p$, ce qui ne dépend pas des choix de a et b). En particulier, si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ d'équation $y^2 = P(x)$, on peut aussi considérer E comme une courbe elliptique sur $\mathbf{F}_p$ pour tous les *bons* nombres premiers (ceux ne divisant ni les dénominateurs des coefficients de P, ni le numérateur de son discriminant (note 4)).

Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{F}_p$, on a trivialement, $|\overline{E}(\mathbf{F}_p)| \leqslant 2p + 1$, mais on dispose du résultat plus précis suivant.

THÉORÈME 8 (HASSE). — *Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{F}_p$, et si $a_p = p + 1 - |\overline{E}(\mathbf{F}_p)|$, alors $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$*

L'idée de BIRCH et SWINNERTON-DYER (1960-1965), est que, si $r(E) \geqslant 1$, alors il devrait y avoir en moyenne plus de points dans $E(\mathbf{F}_p)$ que si $r(E) = 0$, à cause de la réduction modulo p des éléments de $E(\mathbf{Q})$. Comme ce nombre de points est a peu près p d'après le théorème de Hasse, le produit $\prod_p \frac{p}{|\overline{E}(\mathbf{F}_p)|}$ devrait avoir des chance de diverger (d'être nul), si $r(E) \geqslant 1$, et de converger, si $r(E) = 0$. Pour donner un sens à tout ceci, nous allons avoir besoin de passer par les fonctions holomorphes.

3. Fonctions holomorphes

DÉFINITION 9. — *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, on dit que $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est holomorphe sur Ω, si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)(z-z_0)^n$ si $z \in \Omega$ et $|z - z_0| < r$.*

Les fonctions holomorphes ont des propriétés miraculeuses et représentent un petit paradis (bien caché des taupins et des polytechniciens ; on se demande bien pourquoi...). En particulier, elles vérifient les propriétés suivantes :

(H0) Si f atteint son maximum en un point de Ω, alors f est constante. (*Principe du maximum*).

(H1) Si f_n est une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact, alors la limite est holomorphe sur Ω.

(H2) Si $f(x, s) : X \times \Omega \to \mathbf{C}$ est sommable en x, holomorphe en s, et s'il existe g avec $\int_X |g(x)|dx < +\infty$ et $|f(x,s)| \leqslant |g(x)|$ quels que soient x et s, alors $F(s) = \int_X f(x,s)dx$ est holomorphe sur Ω.

(H3) Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ sur lequel $f - g$ a une infinité de zéros, alors $f = g$ sur Ω tout entier.

Si $\Omega \subset \Omega'$ sont connexes et si f est holomorphe sur Ω, il est en général impossible de prolonger f en une fonction holomorphe sur Ω'. Quand c'est possible, un tel prolongement est unique d'après la propriété (H3), et est appelé *prolongement analytique* de f à Ω'.

Exemple 10. — La fonction gamma d'Euler. Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, l'intégrale $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ converge. La fonction Γ est holomorphe et ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, et y vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. On la prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ en posant $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$, où $n \in \mathbf{N}$ est choisi de telle sorte que $\mathrm{Re}(s) + n > 0$. La fonction $\frac{1}{\Gamma(s)}$ est alors holomorphe sur $\mathbf{C}$ avec des zéros simples aux entiers négatifs.

Exemple 11. — La fonction thêta. On note $\mathscr{H} = \{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On pose $q = e^{2i\pi z}$, et on définit $\Theta : \mathscr{H} \to \mathbf{C}$ par

$$\Theta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2}.$$

On a $\Theta(z+1) = \Theta(z)$ et $\sqrt{\frac{z}{2i}}\Theta(\frac{z}{2}) = \Theta(\frac{-1}{2z})$ d'après la formule de Poisson[10].

Exemple 12. — La fonction zêta de Riemann. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

converge sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, et y définit une fonction holomorphe d'après la propriété (H1). On montre[11] que cette fonction admet un prolongement analytique à $\mathbf{C} - \{1\}$, ce qui permet d'écrire les formules suivantes qui font la joie des théoriciens des nombres et des physiciens théoriciens.

$$\begin{aligned}
&1+1+1+1+1+\cdots=\zeta(0)=-1/2,\\
&1+2+3+4+5+\cdots=\zeta(-1)=-1/12,\\
&1+4+9+16+25+\cdots=\zeta(-2)=0,\\
&1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots=\exp(-\zeta'(0))=\sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

4. Fonction L d'une courbe elliptique

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$. Si p est un bon nombre premier, soit a_p l'entier défini par $a_p = 1 + p - |\overline{E}(\mathbf{F}_p)|$. On définit la[12] fonction $L(E,s)$, et des entier a_n, pour $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ par

$$L(E,s) = \prod_{p \text{ bon}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}.$$

Il est facile de voir que le produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > 2$, et même $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ si on utilise la majoration $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$ de Hasse, et définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan.

THÉORÈME 13. — *La fonction $L(E,s)$ admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tout entier.*

Ce résultat a été conjecturé par HASSE vers 1935 ; c'est un cas particulier de la conjecture de Hasse-Weil. Le premier résultat dans sa direction est celui, dû à WEIL, de la famille[13] des courbes C_D. SHIMURA (1958), inspiré par des travaux d'EICHLER (1954), a démontré de nombreux cas de cette conjecture en utilisant la théorie des formes modulaires dont il sera question plus loin. Le pas le plus important a été accompli par WILES en 1994, dans sa quête de la démonstration du théorème de Fermat, qui a démontré cette conjecture dans le cas où E est d'équation $y^2 = P(x)$ et P a toutes ses racines dans $\mathbf{Q}$. Le cas général a finalement été résolu par BREUIL, CONRAD, DIAMOND et TAYLOR en 1999.

La quantité $\prod_{p \text{ bon}} \frac{p}{|\overline{E}(\mathbf{F}_p)|}$ apparaissant dans l'heuristique de BIRCH et SWINNERTON-DYER est, au moins formellement, égale à $L(E,1)$, et leur heuristique devient :

CONJECTURE 14 (Birch et Swinnerton-Dyer (forme faible)). — *« $r(E) \geqslant 1$ » si et seulement si « $L(E,1) = 0$ ».*

On peut préciser cet énoncé[14]. Notons $r_\infty(E)$ l'ordre du zéro en $s = 1$ de $L(E,s)$. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer prend alors la forme suivante.

CONJECTURE 15 (Birch et Swinnerton-Dyer). — *On a l'égalité $r(E) = r_\infty(E)$.*

C'est sous cette forme que le problème vaut un million de dollar. Il y a en fait une forme plus précise[15] de cette conjecture (donnant une formule pour $\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r(E)}L(E,s)$), et plus générale ($\mathbf{Q}$ peut être remplacé par une extension finie, ou même par des corps de caractéristique p, extensions finies du corps $\mathbf{F}_p(T)$).

Les résultats sont peu nombreux ; ce sont les suivants.

• COATES et WILES (1977) ont démontré que, si $E = C_D$, ou plus généralement si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ à multiplication complexe[16], alors « $L(E,1) \neq 0$ » $\Rightarrow$ « $r(E) = 0$ ».

• Gross et Zagier (1983) ont donné une formule explicite[17] pour $L'(E,1)$ en termes de certains points rationnels sur E, dits « de Heegner », et qui sont construits de manière purement analytique (ce sont ces points qui permettent d'amuser la galerie en exhibant des triangles rectangles à côtés rationnels avec un nombre astronomique de chiffres). Comme conséquence, ils obtiennent l'implication : « $r_\infty(E)=1$ » $\Rightarrow$ « $r(E)\geqslant 1$ ».

• Kolyvagin (1989) a démontré, en utilisant ces points de Heegner, l'implication suivante « $r_\infty(E)\leqslant 1$ » $\Rightarrow$ « $r(E)=r_\infty(E)$ ».

C'est tout ! On est dans la situation paradoxale où plus il est censé y avoir de points rationnels ($r_\infty(E)\geqslant 2$), moins on sait en construire... Mentionnons quand-même, qu'en général, le rang $r(E)$ est égal à 0 ou 1, mais qu'on connaît des courbes avec $r(E)\geqslant 24$, et il y a tout lieu de croire que $r(E)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

5. La stratégie de Tunnell

La théorème de Coates-Wiles mentionné ci-dessus fournit un critère pour que D ne soit pas congruent : il suffit que $L(C_D,1)\neq 0$. Réciproquement, si la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vraie (même sous sa forme faible), alors la nullité de $L(C_D,1)$ implique que D est congruent. C'est le point de départ de la démonstration du théorème de Tunnell. Le problème est donc de calculer $L(C_D,1)$ et de décider si ce nombre est nul ou pas. Il y a deux problèmes sérieux qui se posent : le produit définissant $L(C_D,1)$ converge beaucoup trop lentement (s'il converge..., cf. note 14) pour qu'on puisse l'utiliser pour le calcul de $L(C_D,1)$, et de toute façon, il est impossible de prouver qu'un nombre réel est nul en le calculant de manière approchée, sauf si on sait par ailleurs qu'il s'agit d'un entier. La solution que Tunnell apporte à ces deux problèmes est particulièrement élégante.

Théorème 16 (Tunnell). — *Soit* $\Omega=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}$, *et soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_nq^n$ *le développement de*

$$\Theta(z)\cdot\Theta(2z)\cdot(2\Theta(32z)-\Theta(8z)),$$

alors, si D est impair (il y a une formule similaire pour les entiers pairs) *sans facteur carré,*

$$L(C_D,1)=\frac{\Omega}{16\sqrt{D}}\cdot b_D^2.$$

Comme b_D est la différence des deux termes apparaissant dans la condition $(*)$ du th. 5, cela explique comment ledit théorème peut se déduire du théorème de Coates-Wiles. La démonstration du théorème 16 repose sur la théorie des formes modulaires dont il est question au § suivant.

6. Formes modulaires

Si f est holomorphe sur $\mathscr{H}$ et vérifie $f(z+1)=f(z)$, alors f a un développement de Fourier (q-développement)

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_nq^n,\quad \text{avec } q=e^{2i\pi z}.$$

On dit que f est à croissance lente à l'infini si $a_n=0$ pour tout $n<0$ et s'il existe $C\in\mathbf{R}$ tel que $a_n=O(n^C)$.

Si N est un entier, on note $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec c divisible par N. On note $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

DÉFINITION 17. — *Si $k \in \frac{1}{2}\mathbf{N}$ et $j : \Gamma_0(N) \to \{$racines de l'unité$\}$ vérifie $j(T) = 1$, l'espace $M_k(\Gamma_0(N), j)$ des formes modulaires de poids k et type j pour $\Gamma_0(N)$ est l'espace des fonctions f, holomorphes sur $\mathscr{H}$, vérifiant*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = j\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(cz+d)^k f(z), \quad \text{quels que soient } z \in \mathscr{H} \text{ et } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N),$$

et qui sont à croissance lente à l'infini.

Remarque 18. — (i) Il n'est pas du tout clair que de telles formes existent ; et de fait, il faut choisir correctement la fonction j pour $M_k(\Gamma_0(N), j)$ soit non nul.

(ii) $M_k(\Gamma_0(N), j)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant 1 + \frac{Nk}{12}\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})$.

(iii) Les formes modulaires ont un don d'ubiquité assez remarquable. On les rencontre en théorie des nombres[18], en combinatoire ou en physique théorique, bien que ce soient des objets définis de manière purement analytique.

Exemple 19. — La fonction Θ est une forme modulaire de poids $\frac{1}{2}$ pour $\Gamma_0(4)$ et un j un peu compliqué (cela suit facilement des deux équations fonctionnelles déjà mentionnées). Plus généralement, si P est un polynôme homogène de degré d en $n_1, \dots, n_r$, et si Q est une forme quadratique définie positive à coefficients entiers, alors la fonction thêta $\Theta_{Q,P}(z) = \sum_{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbf{Z}^r} P(n_1,\dots,n_r) q^{Q(n_1,\dots,n_r)}$ est une forme modulaire de poids $d + \frac{r}{2}$.

Si $t \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, soit $\sigma_t(n) = \sum_{d|n,\, d\geqslant 1} d^t$.

Exemple 20. — (i) Si k entier pair $\geqslant 3$, la série d'Eisenstein[19] $G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2\cdot(2i\pi)^k}\sum'_{m,n}\frac{1}{(mz+n)^k}$ appartient à $M_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}), 1)$. Son q-développement est $G_k = \frac{(k-1)!\zeta(k)}{(2i\pi)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$.

(ii) Pour $k = 2$, la série ci-dessus ne converge plus, mais on peut définir une série d'Eisenstein $G_2^*(z) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\cdot(2i\pi)^2}\sum'_{m,n}\frac{1}{(mz+n)^k}\cdot\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$, qui vérifie la loi de transformation pour appartenir à $M_2(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}), 1)$, mais n'est pas holomorphe (elle n'en est pas très loin). Son développement de Fourier est donné par $G_2^*(z) = \frac{1}{8\pi y} + \frac{\zeta(2)}{(2i\pi)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)q^n$.

Comme échauffement pour le théorème de Tunnell, mentionnons l'identité de JACOBI (1829) :

$$4G_2^*(4z) - G_2^*(z) = \frac{3\zeta(2)}{(2i\pi)^2}\Theta^4,$$

qui se démontre en constatant que les deux membres appartiennent à $M_2(\Gamma_0(4), 1)$ qui est de dimension 2, et que la différence est divisible par q^2. On en tire, en comparant les q-développements, une forme effective du théorème des 4 carrés de LAGRANGE (1770).

$$|\{(a,b,c,d) \in \mathbf{Z}^4,\ a^2+b^2+c^2+d^2 = n\}| = 8\sum_{d|n,\, 4\nmid d} d.$$

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 20, 1987, p. 599 à 615.

CONSTRUCTION DE LAPLACIENS DONT UNE PARTIE FINIE DU SPECTRE EST DONNÉE

PAR YVES COLIN DE VERDIÈRE

L'article de M. Kac « *Can one hear the shape of a drum?* » [KC] a été l'origine de nombreuses contributions au problème spectral inverse : déterminer certains invariants géométriques ou topologiques d'une variété riemannienne compacte à partir du spectre du laplacien. Moins d'attention a été portée au problème de savoir quelles sont les suites de valeurs propres possibles pour le laplacien d'une métrique riemannienne arbitraire sur une variété compacte donnée. D'autres problèmes du même type se posent avec la recherche d'ouverts bornés de $\mathbf{R}^d$ tels que le laplacien euclidien avec conditions de Dirichlet ou de Neumann admette un spectre donné; ou encore avec l'opérateur de Schrödinger avec champ électrique et (ou magnétique) sur une variété riemannienne compacte donnée. Ces problèmes semblent d'accès très difficile comme le montrent les contraintes imposées par l'existence de différents développements asymptotiques (formule de Minakshisundaram-Pleijel, formule de Poisson). Nous nous restreindrons ici à l'étude du problème plus élémentaire de réaliser une suite finie $s_N = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_N\}$ comme suite des N premières valeurs propres avec multiplicité d'un opérateur à choisir dans une famille donnée d'opérateurs.

Indiquons quelques résultats typiques :

• Si X est une variété compacte de dimension $\geqq 3$ et s_N une suite arbitraire comme précédemment, il existe sur X des métriques riemanniennes telles que le laplacien admette cette suite comme suite des N premières valeurs propres avec multiplicité. En particulier, il n'y a aucune restriction sur les multiplicités des valeurs propres.

• Si X est une surface compacte, la situation est moins simple, car on sait ([CG], [BN]) que la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien est majorée en fonction de la topologie de X. Les résultats obtenus montrent que cela semble être la seule contrainte; par exemple, toute suite $\{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N\}$ est la suite des N premières valeurs propres du laplacien pour une métrique bien choisie sur n'importe quelle surface.

• Pour ce qui est des laplaciens euclidiens dans les ouverts de $\mathbf{R}^d$, la situation est différente suivant le type de conditions aux limites :

– Pour le problème de Dirichlet, les inégalités de Payne, Polya et Weinberger ([P-P-W] et aussi [PR]) imposent des restrictions d'un autre type que la multiplicité : par exemple, pour tout ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, les valeurs propres du problème de Dirichlet vérifient, pour tout n, $\lambda_{n+1} \leqq 3\lambda_n$.

– Pour le problème de Neumann, les seules restrictions sont de multiplicités : par exemple, pour toute suite $\{\lambda_1=0<\lambda_2<\ldots<\lambda_N\}$, il existe un ouvert lisse simplement connexe de $\mathbf{R}^2$ ayant cette suite comme suite des N premières valeurs propres du problème de Neumann.

Quelques indications sur les méthodes utilisées : comme les familles d'opérateurs étudiées ne sont pas normalisées (i. e. sont invariantes par homothétie), il suffit de trouver un opérateur ayant la suite $\varepsilon s_N=\{0=\lambda_1<\varepsilon\lambda_2\leqq\ldots\leqq\varepsilon\lambda_N\}$ comme suite des N premières valeurs propres. On cherche à évaluer les petites valeurs propres d'un laplacien par *effet tunnel purement géométrique* (i. e. sans barrière de potentiel); cette évaluation met en jeu une *matrice dite d'interaction* qui peut s'interpréter géométriquement comme un *laplacien combinatoire* (avec poids) sur un graphe qui est le graphe d'adjacence d'un découpage de la variété en régions séparées par des passages étroits (tunnels!). La matrice d'interaction est utilisée depuis longtemps en chimie pour l'étude de l'opérateur de Schrödinger gouvernant les électrons dans une molécule (méthode L.C.A.O.) et une étude mathématique très complète a été proposée récemment par Helffer-Sjöstrand ([HS]).

Cette évaluation par perturbation d'un laplacien combinatoire ne permettrait pas *a priori* de réaliser exactement le spectre voulu : en effet, dans le cas d'une valeur propre multiple, par exemple, la perturbation entraîne une dispersion du paquet de valeurs propres, c'est ici qu'intervient une idée fondamentale : utiliser la transversalité et travailler uniformément avec les hamiltoniens dépendant d'un paramètre variant dans une boule de $\mathbf{R}^\nu$: V. Arnold a montré ([AD]) que dans une famille de matrices symétriques à coefficients réels l'apparition de valeurs propres multiples peut être stable. Pour mettre en œuvre cette idée, on utilise une notion de *stabilité* (hypothèses SAH et WAH de [CV 3]) d'une famille finie de valeurs propres pour un hamiltonien d'une famille à paramètres. Tous les spectres construits auront cette propriété, en particulier les exemples trouvés pourront avoir un caractère générique (pas d'isométries, etc.) et on pourra lisser les exemples non lisses.

Cet article est complémentaire aux articles [C-C], [CV 2] et [CV 3] : la plupart des résultats ont déjà été présentés dans [CV 1].

Les techniques de [C-C] (lemme des petites valeurs propres, condensateurs) seront utilisées ici, mais nous considérons des *condensateurs euclidiens* (§ 6). La technique du paragraphe 7 est reprise de [CV 2] avec une adaptation pour déjouer l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet en dimension 2.

L'autre outil développé ici est *l'adjonction d'anses* dans l'esprit de [C-F] et [AE]. Conjugué avec l'utilisation de propriétés de transversalité, il permet de montrer des résultats sur les surfaces (propriété C_N) et de construire des métriques où la seconde valeur propre du lapalcien est de multiplicité maximale (5) sur la bouteille de Klein. Les hypothèses de transversalité SAH et WAH introduites dans [CV 3] sont utilisées sans nouvelles précisions.

1. Énoncés des résultats

Pour énoncer les résultats, il sera pratique d'introduire quelques notations : soit $\mathscr{F}$ une famille (ensemble) d'opérateurs autoadjoints $\geqq 0$, à résolvante compacte et ayant 0 comme valeur propre simple. Nous introduisons les propriétés suivantes de $\mathscr{F}$:

DÉFINITIONS 1.1. — (i) *On dira que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (A_N) *si, pour toute suite* $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_N$, *il existe* H *dans* $\mathscr{F}$ *ayant cette suite comme suite des* N *premières valeurs propres.*

(ii) *On dira que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (B_N) *si on a le même énoncé pour toute suite* $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \ldots < \lambda_N$.

(iii) *On dira que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (C_N) *si pour toute suite* $\mu_1 = 0 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_N$, *il existe* H *dans* $\mathscr{F}$ *et* $b \geqq 0$ *tels que* $\mu_1 + b \leqq \mu_2 + b \leqq \ldots \leqq \mu_N + b$ *soit un intervalle du spectre de* H.

Il est clair que la propriété (A_N) implique (B_N) et (C_N). Si X est une variété compacte, nous noterons $\mathscr{F}_X$ la famille des laplaciens associés à une métrique riemannienne C^∞ sur X. $\mathscr{S}_X$ sera la famille des opérateurs de Schrödinger $H = \Delta + V$ sur X, dont 0 est la plus petite valeur propre. Pour $d \geqq 2$, nous noterons $\mathscr{G}_d$ la famille des laplaciens avec conditions de Neumann sur un ouvert borné, C^1 par morceaux de $\mathbf{R}^d$.

Nous avons alors les :

THÉORÈME 1.2. — *Si* X *est de dimension* $\geqq 3$, $\mathscr{F}_X$ *vérifie* (A_N) *pour tout* N.

En général posons $N(X) = \sup\{N \mid \mathscr{F}_X \text{ vérifie } (A_N)\}$.

THÉORÈME 1.3. — *Si* X *est de dimension* 2, $\mathscr{F}_X$ *vérifie* (B_N) *et* (C_N) *pour tout* N.

Si X_γ *est la surface orientable de genre* γ, $(\gamma \geqq 3)$:

$$E(3/2 + \sqrt{2\gamma + 1/4}) \leqq N(X_\gamma) \leqq 4\gamma + 4.$$

Remarque. — Dans le cas des surfaces de genre $\leqq 2$, on ne connaît pas de minorations significatives de $N(X)$.

THÉORÈME 1.4. — $\mathscr{G}_d$ *vérifie* (A_N) *pour tout* N *si* $d \geqq 3$. $\mathscr{G}_2$ *vérifie* (A_N) *si et seulement si* $N \leqq 4$. $\mathscr{G}_2$ *vérifie* (B_N) *pour tout* N.

Remarque. — Soit, pour une variété compacte X (avec ou sans bord), $C(X)$ le *nombre chromatique* de X défini comme le plus grand entier N tel qu'il existe un plongement du graphe complet à N sommets dans X.

On définit aussi pour toute variété riemannienne compacte (avec ou sans bord) (X, g), $m(X, g)$ comme la multiplicité de la première valeur propre >0 du laplacien (condition de Neumann) sur (X, g). Puis $m(X) = \sup m(X, g)$, où le sup porte sur l'ensemble des métriques riemanniennes sur X.

On a posé dans [CV 2] la :

CONJECTURE ★. — *Pour toute variété compacte* $m(X) = C(X) - 1$.

Cette conjecture est vraie pour les variétés de dimension 1, de dimension plus grande que 3 (où $m(X) = C(X) - 1 = +\infty$ [CV 2]), pour les surfaces de genre 0 et 1 ([CG], [BN] et paragraphe 5 de cet article pour B) :

$$C(S^2) = 4, \qquad C(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2) = 7, \qquad C(P^2(\mathbf{R})) = 6, \qquad C(B) = 6.$$

Pour les surfaces de genre $\gamma \geqq 3$, le théorème 1.3 donne :

$$E[1/2 + \sqrt{2\gamma + 1/4}] \leqq m(X) \leqq 4\gamma + 3,$$

alors que, d'après [RL],

$$C(X_\gamma)=E[7/2+\sqrt{12\gamma+1/4}].$$

Un pas important serait donc une majoration de $m(X)$ en $O(\sqrt{\gamma})$. Signalons en outre que dans le paragraphe 7 on prouve le :

THÉORÈME 1.5. — *Pour toute surface compacte* X, *la propriété* A_N *est vraie pour* S_X *avec* $N=C(X)$.

En particulier, il existe sur X un opérateur de Schrödinger dont la seconde valeur propre est de multiplicité $C(X)-1$.

Ce type de résultats sera essentiel dans [CV 5].

Remarque. — Les majorations de [CG] et [BN] sur la multiplicité de la seconde valeur propre du laplacien s'étendent sans difficultés au cas de l'opérateur de Schrödinger.

2. Cas des surfaces : propriétés A_N et B_N

2*a*. PROPRIÉTÉ A_N. — La preuve de A_N pour les surfaces de genre $\gamma \geqq 3$ et $N \leqq E(3/2+\sqrt{2\gamma+1/4})$ résulte d'une modification immédiate de [C-C] : au lieu de partir du graphe complet K_N avec N sommets, avec un laplacien discret sur ce graphe de spectre (0, 1, 1, . . . , 1), on munit ce graphe d'un laplacien discret ayant le spectre voulu (ainsi qu'il est montré dans [CV 3], § 4). On remarque que les métriques trouvées peuvent être à courbure constante.

2*b*. PROPRIÉTÉ B_N. — La preuve résulte des techniques de [C-C] et du résultat de [CV 3] sur la propriété B_N pour le graphe en étoile : il suffit de construire une métrique sur X telle que le graphe associé comme dans [C-C], § 2, soit un graphe E_N en étoile à N branches.

$X=\bigcup_{i=0}^{N}\hat{X}_i \bigcup_{i=1}^{N} Z_i$ où les Z_i sont des cylindres hyperboliques recollant $\hat{X}_0$ aux $\hat{X}_i$. Si on veut que X soit homéomorphe à S^2, il suffit de prendre pour $\hat{X}_0$ (resp $\hat{X}_i$, $i \geqq 1$) la sphère S^2 privée de N disques de même rayon et ne se rencontrant pas (resp. privée d'un disque). Il suffit alors de recoller les Z_i le long des bords de ces disques en suivant le schéma imposé par le graphe en étoile.

3. Adjonction d'anses à une surface

Chavel et Feldmann [C-F] ont montré que l'adjonction de *petites* anses à une surface ne modifie pas beaucoup les valeurs propres du laplacien. Nous donnons une construction assez explicite permettant de contrôler les espaces propres de ce type de métriques en deux étapes :

— Métriques C^1 par morceaux obtenue par recollement direct des bords de deux petits disques.

– Régularisation de cette métrique.

La première étape n'est pas fondamentalement différente du cas où on enlève des petits disques : seule la condition aux limites est nouvelle, ce n'est ni celle de Neumann, ni celle de Dirichlet, mais une condition de recollement du type condition de périodicité. La même construction permettra dans le paragraphe 4 de traiter le cas de la bouteille de Klein par éclatement en un point de $P^2(\mathbf{R})$.

Après avoir montré un résultat général, nous l'appliquons à la propriété B_N pour les surfaces.

Introduisons d'abord quelques notations :

X est une surface compacte munie d'une métrique riemannienne g_0; x_0 est un point de X; $\varepsilon>0$; $X_\varepsilon = X\setminus B(x_0, \varepsilon)$, où $B(x_0, \varepsilon)$ est la boule de centre x_0 et de rayon ε; l'injection $j : H^1(X_\varepsilon) \subsetneq H^1(X)$ définie par

$$j(f)=\begin{cases} f & \text{sur } X_\varepsilon, \\ P_\varepsilon(f) & \text{sur } B(x_0, \varepsilon), \end{cases}$$

où $P_\varepsilon(f)$ est le prolongement harmonique de f à $B(x_0, \varepsilon)$; Δ_ε est l'extension de Friedrich de la forme $q_\varepsilon(f)=\int_{X_\varepsilon} |df|^2$, avec un domaine D_ε vérifiant les inclusions :

$$H_0^1(X_\varepsilon)\subset D_\varepsilon \subset H^1(X_\varepsilon);$$
$$0=\lambda_1<\lambda_2\leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq C < C+1 \leqq \lambda_{n+1} \leqq \ldots,$$

le spectre du laplacien sur X; $E_n \subset H^1(X)$ la somme des espaces propres associés aux n premières valeurs propres et de même pour $\Delta_\varepsilon : \lambda_n(\varepsilon)$, $E_n(\varepsilon)$, on a alors avec les notations de [CV 3] le :

THÉORÈME 3.1. — *Lorsque* $\varepsilon \to 0$, $\lambda_n(\varepsilon) \to \lambda_n$ *et*

$$[j(q_\varepsilon)]_{j(E_n(\varepsilon))\,|\,E_n} \to q_{E_n},$$

ces convergences étant uniformes lorsque g reste dans un voisinage de g_0.

En particulier, on a le :

COROLLAIRE 3.2. — *Si* λ_0 *valeur propre de* Δ_{g_0} *vérifie WAH (notation de* [CV 3]), *relativement à une famille* $(g_a)_{a\in K}$, *il existe* $a_0 \in K$, *proche de* 0 *tel que* $\Delta_{\varepsilon, a_0}$ *admet* λ_0 *comme valeur propre avec la même multiplicité et vérifiant WAH relativement à la même famille de métriques.*

Preuve. – La convergence des spectres résulte de [R-T] et [C-F], qui traitent les cas extrêmes (Neumann et Dirichlet), par application du minimax.

La convergence des espaces propres est alors claire par densité et le minimax : un espace de dimension n où $q_\varepsilon(f)\leqq(\lambda_n+\varepsilon)|f|^2$ est proche de la somme des espaces propres (*voir* [CV 2] pour un énoncé précis). La proximité des formes quadratiques provient de