

French Exam Spring 2009

§ 1. — Espaces analytiques.

1. Sous-ensembles analytiques de l'espace affine.

Soit n un entier ≥ 0 , et soit \mathbb{C}^n l'espace numérique complexe de dimension n , muni de la topologie usuelle. Si U est un sous-ensemble de \mathbb{C}^n , on dit que U est *analytique* si, pour tout $x \in U$, il existe des fonctions f_1, \dots, f_k , holomorphes dans un voisinage W de x , et telles que $U \cap W$ soit identique à l'ensemble des points $z \in W$ vérifiant les équations $f_i(z) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Le sous-ensemble U est alors localement fermé dans \mathbb{C}^n (c'est-à-dire intersection d'un ouvert et d'un fermé), donc localement compact lorsqu'on le munit de la topologie induite par celle de \mathbb{C}^n .

Nous allons maintenant munir l'espace topologique U d'un faisceau. Si X est un espace quelconque, nous noterons $\mathcal{C}(X)$ le faisceau des germes de fonctions sur X , à valeurs dans \mathbb{C} (cf. [18], n° 3). Si \mathcal{H} désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n , le faisceau \mathcal{H} est un sous-faisceau de $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$. Soit alors x un point de U ; on a un homomorphisme de restriction

$$\varepsilon_x: \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)_x \rightarrow \mathcal{C}(U)_x.$$

L'image de \mathcal{H}_x par ε_x est un sous-anneau $\mathcal{H}_{x,U}$ de $\mathcal{C}(U)_x$; les $\mathcal{H}_{x,U}$ forment un sous-faisceau \mathcal{H}_U de $\mathcal{C}(U)$, que nous appellerons le *faisceau des germes de fonctions holomorphes sur U* ; c'est un faisceau d'anneaux. Nous noterons $\mathcal{A}_x(U)$ le noyau de $\varepsilon_x: \mathcal{H}_x \rightarrow \mathcal{H}_{x,U}$; vu la définition de $\mathcal{H}_{x,U}$, c'est l'ensemble des $f \in \mathcal{H}_x$ dont la restriction à U est nulle dans un voisinage de x ; nous identifierons fréquemment $\mathcal{H}_{x,U}$ à l'anneau quotient $\mathcal{H}_x / \mathcal{A}_x(U)$.

Puisque nous avons une topologie et un faisceau de fonctions sur U , nous pouvons définir la notion d'*application holomorphe* (cf. [3], exp. VI ainsi que [18], n° 32):

Soient U et V deux sous-ensembles analytiques de \mathbb{C}^r et de \mathbb{C}^s , respectivement. Une application $\varphi: U \rightarrow V$ sera dite holomorphe si elle est continue, et si $f \in \mathcal{H}_{\varphi(x),V}$ entraîne $f \circ \varphi \in \mathcal{H}_{x,U}$.

Il revient au même de dire que les s coordonnées de $\varphi(x)$, $x \in U$, sont des fonctions holomorphes de x , autrement dit des sections de \mathcal{H}_U .

La composée de deux applications holomorphes est holomorphe. Une bijection $\varphi : U \rightarrow V$ est appelée un *isomorphisme analytique* (ou simplement un isomorphisme) si φ et φ^{-1} sont holomorphes; cela équivaut à dire que φ est un homéomorphisme de U sur V qui transforme le faisceau \mathcal{H}_U en le faisceau \mathcal{H}_V .

Si U et U' sont deux sous-ensembles analytiques de \mathbb{C}^r et de $\mathbb{C}^{r'}$, le produit $U \times U'$ est un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^{r+r'}$. Les propriétés énoncées dans [18], n° 33 sont valables, en remplaçant partout sous-ensemble localement fermé par sous-ensemble analytique, et application régulière par application holomorphe; en particulier, si $\varphi : U \rightarrow V$ et $\varphi' : U' \rightarrow V'$ sont des isomorphismes analytiques, il en est de même de

$$\varphi \times \varphi' : U \times U' \rightarrow V \times V'.$$

Toutefois, à la différence du cas algébrique, la topologie de $U \times U'$ est identique à la topologie produit des topologies de U et de U' .

2. La notion d'espace analytique.

DÉFINITION 1. — On appelle *espace analytique* un ensemble X muni d'une topologie et d'un sous-faisceau \mathcal{H}_X du faisceau $\mathcal{C}(X)$, ces données étant assujetties à vérifier les axiomes suivants :

(H_I). Il existe un recouvrement ouvert $\{V_i\}$ de l'espace X , tel que chaque V_i , muni de la topologie et du faisceau induits par ceux de X , soit isomorphe à un sous-ensemble analytique U_i d'un espace affine, muni de la topologie et du faisceau définis au n° 1.

(H_{II}). La topologie de X est séparée.

Les définitions du n° 1, étant de caractère local, se transportent aux espaces analytiques. Ainsi, si X est un espace analytique, le faisceau \mathcal{H}_X sera appelé le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X ; si X et Y sont deux espaces analytiques, une application $\varphi : X \rightarrow Y$ sera dite holomorphe si elle est continue, et si $f \in \mathcal{H}_{\varphi(x), Y}$ entraîne $f \circ \varphi \in \mathcal{H}_{x, X}$; ces applications forment une famille de *morphismes* (au sens de N. BOURBAKI) pour la structure d'espace analytique.

Si V est un sous-ensemble ouvert d'un espace analytique X , nous appellerons *carte* de V tout isomorphisme analytique de V sur un sous-ensemble analytique U d'un espace affine. L'axiome (H_{II}) signifie qu'il est possible de recouvrir X par des ouverts possédant des cartes. Si Y est un sous-ensemble de X , nous dirons que Y est analytique si, pour toute carte $\varphi: V \rightarrow U$, l'image $\varphi(Y \cap V)$ est un sous-ensemble analytique de U . S'il en est ainsi, Y est localement fermé dans X , et peut être muni de façon naturelle d'une structure d'espace analytique, dite *induite* par celle de X (cf. [18], n° 35 pour le cas algébrique). De même, soient X et X' deux espaces analytiques; il existe alors sur $X \times X'$ une structure d'espace analytique et une seule telle que, si $\varphi: V \rightarrow U$ et $\varphi': V' \rightarrow U'$ sont des cartes, $\varphi \times \varphi': V \times V' \rightarrow U \times U'$ soit une carte de $V \times V'$; muni de cette structure, $X \times X'$ est appelé le *produit* des espaces analytiques X et X' ; on observera que la topologie de $X \times X'$ coïncide avec la topologie produit des topologies de X et de X' .

Nous laissons au lecteur le soin de transposer aux espaces analytiques les autres résultats de [18], nos 34-35.

3. Faisceaux analytiques.

La définition des faisceaux analytiques donnée dans [2], exp. XV s'étend d'elle-même au cas d'un espace analytique X : un faisceau analytique \mathcal{F} est simplement un faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux \mathcal{H}_X , autrement dit, un faisceau de \mathcal{H}_X -modules (cf. [18], n° 6).

Soit Y un sous-ensemble analytique fermé de X ; pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{A}_x(Y)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{H}_{x, X}$ dont la restriction à Y est nulle au voisinage de x . Les $\mathcal{A}_x(Y)$ forment un faisceau d'idéaux $\mathcal{A}(Y)$ du faisceau \mathcal{H}_X ; le faisceau $\mathcal{A}(Y)$ est donc un faisceau analytique. Le faisceau quotient $\mathcal{H}_X/\mathcal{A}(Y)$ est nul en dehors de Y , et sa restriction à Y n'est autre que \mathcal{H}_Y , par définition même de la structure induite; on pourra donc l'identifier à \mathcal{H}_Y , cf. [18], n° 5.

PROPOSITION 1. — a) *Le faisceau \mathcal{H}_X est un faisceau cohérent d'anneaux ([18], n° 15).*

b) *Si Y est un sous-espace analytique fermé de X , le faisceau $\mathcal{A}(Y)$ est un faisceau analytique cohérent (c'est-à-dire un faisceau cohérent de \mathcal{H}_X -modules, au sens de [18], n° 12).*

LA CYCLOTOMIE JADIS ET NAGUÈRE

par André WEIL

0. Littéralement, "cyclotomie" signifie "division du cercle". Les géomètres grecs ont enseigné à diviser le cercle en N parties égales, par la règle et le compas, pour N de la forme 2^n , $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 5$, $2^n \cdot 15$.

La découverte par Euler des relations entre fonctions trigonométriques et exponentielles ramenait le problème de la division du cercle à la résolution des équations binômes de la forme $X^n = 1$. Gauss, à 19 ans, reçut la médaille Fields (plus exactement, il l'aurait reçue si elle avait existé) pour avoir résolu l'équation $X^{17} = 1$ par une succession de racines carrées, ce qui implique la division du cercle en 17 parties égales par la règle et le compas. Bien entendu, ce résultat, pour sensationnel qu'il fût, n'était pour Gauss qu'un premier pas dans la théorie des équations binômes.

1. C'est donc à juste titre qu'on qualifie de "cyclotomiques" les corps engendrés sur \mathbb{Q} par les racines de l'unité, et leurs sous-corps, et le mot de "cyclotomie" pourrait s'appliquer à tout ce qui les concerne ; on sait d'ailleurs, depuis Kronecker, que ces corps ne sont autres que les extensions abéliennes de \mathbb{Q} . Mais, depuis Jacobi, et pendant tout le XIXe siècle, l'usage s'est établi de réserver ce mot (en allemand, Kreist(h)eilung) à l'étude de certaines sommes remarquables de racines de l'unité, qu'on a pris de nos jours (depuis Hasse, semble-t-il) l'habitude d'appeler "sommes de Gauss" ; nous adopterons ce terme, qui est commode, mais historiquement peu justifié. Plus précisément, nous conviendrons d'appeler somme de Gauss relative au corps fini \mathbb{F}_q à $q = p^n$ éléments toute somme

$$(1) \quad G = G(\chi, \psi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} \chi(x)\psi(x)$$

où χ est un caractère du groupe multiplicatif \mathbb{F}_q^\times , et ψ un caractère non

452-02

trivial du groupe additif \mathbb{F}_q . Si ε est une racine primitive de $X^p = 1$, l'ensemble des valeurs de ψ est $\{1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}\}$. Si χ est d'ordre m , m divise $q-1$, et on peut écrire $q-1 = mv$; on dira alors que G est d'ordre m ; pour $m=1$, on a $G = -1$. Si r est un générateur du groupe cyclique \mathbb{F}_q^\times , χ est bien défini par la donnée de $\zeta = \chi(r)$, et ζ est une racine primitive de $Z^m = 1$; on peut écrire alors

$$(2) \quad G = \sum_{i=0}^{q-2} \zeta^i \psi(r^i) = \sum_{i=0}^{m-1} \zeta^i \sum_{j=0}^{v-1} \psi(r^{i+mj}).$$

La première propriété de $G(\chi, \psi)$ qui nous saute aux yeux est que c'est un entier algébrique du corps $\mathbb{Q}(\zeta, \varepsilon)$, et que tous ses conjugués sur \mathbb{Q} sont aussi des sommes de Gauss; si un automorphisme de $\mathbb{Q}(\zeta, \varepsilon)$ change ζ en ζ^t et ε en ε^u , il change $G(\chi, \psi)$ en $G(\chi^t, \psi^u)$. De plus, avec des "abus de notations" évidents, on a $\psi^u(x) = \psi(ux)$, et par suite:

$$(3) \quad G(\chi, \psi^u) = \chi(u)^{-1} G(\chi, \psi),$$

ce qui implique aussitôt que $G(\chi, \psi)^m$ est dans $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Notons aussi dès maintenant qu'on a, pour G défini par (1):

$$(4) \quad G\bar{G} = \sum_{x,y} \chi(xy^{-1}) \psi(x-y) = \sum_{z \neq 0} \chi(z) \sum_{y \neq 0} \psi(y(z-1)) \\ = q-1 - \sum_{z \neq 0,1} \chi(z) = \begin{cases} q & \text{si } \chi \neq 1 \\ 1 & \text{si } \chi = 1. \end{cases}$$

Si \mathbb{F}_q est le corps premier $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on pourra prendre $\psi(x) = \varepsilon^x$, et on aura

$$(5) \quad G = \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \varepsilon^x = \sum_{i=0}^{p-2} \zeta^i \varepsilon^{r^i} = \sum_{i=0}^{m-1} \zeta^i \sum_{j=0}^{v-1} \varepsilon^{r^{i+mj}}.$$

2. Nous avons anticipé sur l'ordre historique, auquel nous revenons à présent. Les sommes (5) sont des cas particuliers des sommes introduites par Lagrange dans son grand mémoire ([1 a]) sur la théorie algébrique des équations (la théorie de Galois "avant la lettre"). C'est là que Lagrange montre, entre

autre, comment engendrer une extension cyclique de degré m au moyen d'une racine m -ième, après adjonction, s'il y a lieu, des racines m -ièmes de l'unité (engendrement dit, bien à tort, "kummérien"). Il introduit les sommes

$$(6) \quad y = x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha^{m-1} x_m ,$$

où $\alpha^m = 1$, et où x_1, \dots, x_m sont les racines d'une équation de degré m , et il observe que y^m est invariant par toute permutation circulaire des x_i . Il fait voir par exemple qu'on "explique" ainsi les formules classiques de résolution par radicaux des équations du 3e et du 4e degré. Exposant à nouveau sa méthode dans son Traité de 1808 ([1 b], Note XIII), il donne aux sommes (6) le nom de "résolvantes", qui leur est resté pendant tout le XIXe siècle.

3. En 1801, dans la VIIe section des Disquisitiones ([2 a]), Gauss donne un exposé complet de la "théorie de Galois" de $\mathbb{Q}(\epsilon)$ considéré comme extension cyclique de \mathbb{Q} de degré $p-1$. Il montre en particulier que, pour $p-1 = mv$, $\mathbb{Q}(\epsilon)$ possède un sous-corps k_m (et un seul) de degré m sur \mathbb{Q} , engendré sur \mathbb{Q} par l'une quelconque des "périodes d'ordre m " :

$$(7) \quad \eta_i = \sum_{j=0}^{v-1} \epsilon^{r^{i+mj}} \quad (0 \leq i < m) ,$$

celles-ci étant permutées circulairement par les automorphismes de $\mathbb{Q}(\epsilon)$ sur \mathbb{Q} .

La question de la résolution par radicaux était trop implantée dans les esprits pour que Gauss pût la laisser complètement de côté. Soit qu'il ait eu connaissance directement ou indirectement de la méthode de Lagrange (comme il est vraisemblable), soit qu'il l'ait retrouvée par lui-même (comme il est possible), il l'applique aux corps intermédiaires entre \mathbb{Q} et $\mathbb{Q}(\epsilon)$; si k_m est comme plus haut, et si k est un sous-corps de k_m , cela conduit à former des résolvantes de Lagrange au moyen des η_i et de racines de l'unité auxiliaires, d'ordre $< p$. Pour $k = \mathbb{Q}$, ces résolvantes ne sont autres que les sommes (5). Mais Gauss ne semble pas leur attacher d'importance; il note en passant la relation $G\bar{G} = p$, et cela seulement pour dire que l'extraction de racines $(G^m)^{1/m}$ se ramène à une racine carrée et à la division par m d'un arc de cercle. Quand un peu plus tard Lagrange, dans son Traité ([1 b], Note XIV) donne un exposé des résultats de Gauss basé principalement sur les sommes (5),

452-04

il se fait vertement critiquer par Gauss, pour n'avoir pas suffisamment tenu compte de l'ambiguïté qui résulte de l'emploi des racines de l'unité d'ordre $< p$.

4. Comme Gauss le fait voir, les périodes η_i ont une table de multiplication

$$(8) \quad \eta_i \eta_j = \sum_k N_{ijk} \eta_k$$

où les N_{ijk} sont des entiers naturels, apparentés aux nombres de solutions des congruences $AX^m + BY^m \equiv C \pmod{p}$. Ce fait a des conséquences arithmétiques importantes, dont Gauss a aperçu quelques-unes (pour le cas $m = 3$) dès les Disq.. Plus tard, il en a développé d'autres pour $m = 4$ ([2 d]). Mais il s'est surtout intéressé au cas $m = 2$, le seul où il ait cru pouvoir utiliser les "sommes de Gauss" de préférence aux "périodes" (sans doute parce qu'alors il n'y a pas à introduire d'irrationalité accessoire). On a alors :

$$(9) \quad G = \eta_0 - \eta_1 = 1 + 2\eta_0 = \sum_{x=0}^{p-1} \varepsilon^{x^2}.$$

Ici (3) donne $\bar{G} = \pm G$, donc $G^2 = \pm p$ d'après (4), le signe étant donné par $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$. Il s'ensuit que le corps quadratique k_2 contenu dans $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ est $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$.

5. Comme Gauss le signale dès les Disq., ce résultat se généralise à la somme

$$G = \sum_{x=0}^{N-1} \alpha^{x^2},$$

où α est une racine primitive N -ième de l'unité, avec N impair quelconque ; on a $G^2 = \pm N$, ce qui pose le problème de la détermination du signe de G , par exemple pour $\alpha = e^{2\pi i/N}$; énoncé sous cette forme, le problème n'est pas algébrique. "Nous observons", dit Gauss dans les Disq. (avec une ambiguïté sans doute voulue) qu'on a toujours $G = +\sqrt{N}$ resp. $+i\sqrt{N}$. En fait, il n'en obtint la démonstration qu'en 1805 ; celle-ci, publiée en 1811 ([2 b]) s'apparente, d'une manière très visible pour nous, à ses recherches (qu'il n'a pas

publiées) sur les fonctions thêta. Pour $N = pq$, avec p, q premiers, Gauss en tire sa quatrième démonstration de la loi de réciprocité quadratique. Ce travail a donné lieu, et jusqu'à une époque toute récente, à d'importantes généralisations, que nous laisserons complètement de côté.

6. En 1818, Gauss publia sa sixième démonstration de la loi de réciprocité quadratique ([2 c]) ; elle est basée, elle aussi, sur les sommes de Gauss d'ordre 2, mais envisagées d'un point de vue strictement algébrico-arithmétique. Soit G défini par (9). Soit q un nombre premier impair $\neq p$; posons $p = 2p' + 1$, $q = 2q' + 1$. Au moyen du symbole de Legendre, la loi de réciprocité s'écrit :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} = (-1)^{p'q'}$$

On a vu qu'on a $G^2 = (-1)^{p'} p$, d'où

$$G^{q-1} = (-1)^{p'q'} \cdot p^{q'} \equiv (-1)^{p'q'} \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{q}$$

Mais on a aussi, d'après la formule du binôme :

$$G^q \equiv \sum_x \epsilon^{qx^2} = \left(\frac{q}{p}\right) G \pmod{q}$$

d'où la loi de réciprocité, puisque G est premier à q . Bien entendu Gauss ne se permet pas (ostensiblement) d'écrire des congruences dans l'anneau $\mathbb{Z}[\epsilon]$; il les remplace par des congruences modulo $(q, 1+X+\dots+X^{p-1})$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$. Néanmoins il est incompréhensible que Jacobi, Cauchy et Eisenstein, tour à tour, aient publié des démonstrations virtuellement identiques à celle-là (et qu'ils aient même soulevé entre eux des questions de priorité à ce sujet) avant qu'Eisenstein ne fît observer qu'à la présentation près c'était toujours la sixième démonstration de Gauss.

Start -

I Introduction

Nous donnons ici une brève présentation de résultats récents (voir R.J. Di Perna and P-L. Lions [2],[3],[4]) concernant l'équation de Boltzmann

$$(B) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f = Q(f, f) \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$$

où $N \geq 1$. La fonction inconnue $f = f(t, x, \xi)$ représente la densité de molécules au temps t , au point x et avec la vitesse ξ dans une description statistique d'un gaz raréfié de molécules que nous supposons soumises à aucune force, afin de simplifier la présentation. En particulier, ceci explique que f est non-négative

$$(1) \quad f \geq 0 \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

La nonlinéarité de l'équation de Boltzmann réside dans l'opérateur quadratique Q apparaissant au membre de droite de (B). Ce terme, appelé opérateur de collision, est donné par (en chaque point (t, x))

$$(2) \quad Q(f, f) = \int_{\mathbf{R}^N} d\xi_* \int_{S^{N-1}} \{f' f'_* - f f_*\} B(\xi - \xi_*, \omega)$$

où nous notons pour toute fonction $\varphi(\xi)$

$$(3) \quad \varphi' = \varphi(\xi'), \quad \varphi_* = \varphi(\xi_*), \quad \varphi'_* = \varphi(\xi'_*)$$

et où ξ', ξ'_* sont construits à partir de ξ, ξ_*, ω de la manière suivante

$$(4) \quad \xi' = \xi - (\xi - \xi_*, \omega)\omega, \quad \xi'_* = \xi_* + (\xi - \xi_*, \omega)\omega.$$

La fonction $B(z, \omega)$ ($z \in \mathbf{R}^N, \omega \in S^{N-1}$) est appelée noyau de collision et dépend de l'interaction des molécules (potentiel intermoléculaire). L'exemple le plus simple d'un tel noyau de collision est donné par

$$(5) \quad B(z, \omega) = |(z, \omega)|,$$

ce choix correspond au modèle dit des sphères dures (les molécules sont alors considérées comme des sphères entrant en collision de manière parfaitement élastique). Physiquement, le terme $Q(f, f)$ représente le taux de variation de la densité f due aux interactions et collisions des molécules.

Il est important de remarquer que (4) est en fait une paramétrisation de l'ensemble des vitesses (ξ', ξ'_*) (physiquement, vitesses après collision) vérifiant

$$\xi' + \xi'_* = \xi + \xi_* \quad (\text{conservation de la quantité de mouvement})$$

$$|\xi'|^2 + |\xi'_*|^2 = |\xi|^2 + |\xi_*|^2 \quad (\text{conservation de l'énergie cinétique}).$$

Nous supposons toujours que B vérifie

$$(6) \quad B \text{ ne dépend que de } |z| \text{ et de } (z, \omega), \quad B \geq 0.$$

Le caractère quadratique de Q et le manque d'estimées a priori pour les solutions de (B) ont conduit divers auteurs à résoudre (B) avec un "petit paramètre" (temps petit, données initiales petites ou proches d'une solution particulière de type Maxwellienne, libre parcours moyen petit ...) ou à étudier des modèles approchés (solutions spatialement homogènes, i.e. indépendantes de x , modèles à vitesse discrète, approximation de l'opérateur Q ...) et nous renvoyons le lecteur à C.Cercignani [1] (et à [2]) pour une bibliographie extensive ainsi que pour l'obtention de l'équation de Boltzmann à partir de l'étude de systèmes infinis de particules et de l'hypothèse de chaos moléculaire, obtention sur laquelle nous reviendrons dans une publication ultérieure.

Sous la seule hypothèse que B vérifie

$$(7) \quad B \in L^1_{\text{loc}}(B_R \times S^{N-1}), (1 + |\xi|^2)^{-1} \int_{B_R} A(\xi + z) dz \rightarrow 0 \quad \text{si } |\xi| \rightarrow \infty$$

pour tout $r < \infty$, où $A(z) = \int_{S^{N-1}} B(z, \omega) d\omega$, nous présentons ci-dessous un résultat d'existence globale d'une solution faible de (B) (définie ci-dessous) lorsque f est prescrite en $t = 0$

$$(8) \quad f(0, x, \xi) = f_0(x, \xi) \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad \xi \in \mathbf{R}^N$$

et f_0 vérifie

$$(9) \quad f_0 \geq 0, \quad \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0(1 + |\xi|^2 + |x|^2 + |\text{Log } f_0|) dx d\xi < \infty.$$

Ce résultat d'existence globale est en fait une conséquence directe d'un résultat de stabilité (pour une topologie faible) des solutions faibles de (B) que nous énoncerons ci-dessous avant le résultat d'existence globale. Signalons également que l'hypothèse (7) est une version faible d'hypothèse de troncature angulaire (angular cut-off) initialement introduite par H. Grad [10].

Nous ne donnerons aucune démonstration des résultats énoncés ci-dessous et nous renvoyons le lecteur à [2],[3]. Signalons néanmoins que la démonstration du résultat de stabilité repose sur trois idées :

- 1) Il est possible pour de nombreux modèles de transport (linéaires ou non) d'opérer des changements non linéaires de fonction inconnue, technique appelée renormalisation des solutions, qui permet d'obtenir en particulier de nombreuses bornes a priori ;

- 2) les moyennes en vitesse (ξ) de solutions d'équations linéaires de transport ont, sous des conditions très générales, un gain de régularité assurant notamment des phénomènes de compacité locale. Ces résultats ont été pour la première fois observés par F. Golse, B. Perthame et R. Sentis [9], voir aussi F. Golse, P-L. Lions, B. Perthame et R. Sentis [8], P. Gérard [7], R.J. Di Perna et P-L. Lions [5],
- 3) il est possible d'écrire des formulations faibles de l'équation de Boltzmann en l'intégrant le long des caractéristiques.

Ces méthodes ne sont pas seulement utiles à la résolution des équations de Boltzmann, mais permettent également d'aborder de nombreux modèles de théorie cinétique comme les équations de Vlasov-Poisson, Vlasov-Maxwell, avec ou sans terme de collision de type Boltzmann ou Fokker-Planck, et nous renvoyons le lecteur à [5], [6] pour plus de précisions. Signalons aussi que le traitement de certains de ces modèles nécessitent l'étude de "caractéristiques généralisées" (voir [6]). Remarquons enfin que les solutions globales (faibles) de (B) que nous construisons, vérifient une inégalité d'entropie, ce qui permet une étude (partielle) du comportement asymptotique quand t tend vers $+\infty$ ou quand le libre parcours moyen tend vers 0 (limite hydrodynamique), sujet qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

Stop -

II Quantités conservées et estimées a priori

L'identité formelle suivante est obtenue par des considérations élémentaires de symétrie basées sur la forme de B induite par l'hypothèse (6)

$$(10) \quad \int_{\mathbf{R}^N} Q(\varphi, \varphi) \psi d\xi = \frac{1}{4} \iiint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times S^{N-1}} B(\xi - \xi_*, \omega) d\xi d\xi_* d\omega \{ \varphi' \varphi'_* - \varphi \varphi_* \} \{ \psi + \psi_* - \psi' - \psi'_* \} .$$

pour toutes fonctions φ et ψ . Les relations liant ξ' , ξ'_* , ξ et ξ_* impliquent donc que $[\psi + \psi_* - \psi' - \psi'_*]$ est identiquement nulle si $\psi = a + b \cdot \xi + c |\xi|^2$ où $a, c \in \mathbf{R}^N$. Grâce à cette remarque, on déduit facilement que les solutions de (B) - au moins formellement - doivent vérifier les invariances suivantes.

$$(11) \quad \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t, x, \xi) dx d\xi \text{ est indépendant de } t \text{ (conservation de la masse)}$$

$$(12) \quad \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t, x, \xi) \xi dx d\xi \text{ est indépendant de } t$$

(conservation de la quantité de mouvement).

$$(13) \quad \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t, x, \xi) |\xi|^2 dx d\xi \text{ est indépendant de } t$$