GEOMETRY

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 2 (2005), 353–372

STABILITÉ DE L'INÉGALITÉ DE FABER-KRAHN EN COURBURE DE RICCI POSITIVE

par **Jérôme BERTRAND** (*)

Introduction.

En utilisant l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov [11], P. Bérard et D. Meyer ont démontré une inégalité du type Faber-Krahn pour les domaines d'une variété compacte à courbure de Ricci positive.

THÉORÈME 0.1 (Bérard-Meyer [3]). — *Soit (M,g) une variété riemanienne compacte de dimension dont la courbure de Ricci vérifie* $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)g$. *Soit Ω un domaine régulier de M et Ω^* le domaine symétrisé de Ω, c'est-à-dire une boule géodésique de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ vérifiant vérifiant $\frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(M)} = \frac{\mathrm{vol}(\Omega^*)}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)}$. Sous ces hypothèses, on a l'inégalité*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geqslant \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où λ_1^D désigne la première valeur propre de Dirichlet du domaine sur l'espace correspondant. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si le triplet (Ω, M, g) est isométrique au triplet $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, \mathrm{can})$.

L'objet de cet article est d'étudier les domaines des variétés à courbure de Ricci positive dont la première valeur propre de Dirichlet est proche de celle de leur domaine symétrisé.

(*) Soutenu par la requête 20-101469 du FNRS.
Mots-clés : géométrie Riemanienne, distance de Gromov-Hausdorff, inégalité de Faber-Krahn, domaines convexes.
Classification math. : 53C20, 53C24, 58C40, 51K.

La première remarque est que de tels domaines ne sont pas nécessairement homéomorphes à des boules euclidiennes. En effet si l'on retire des ensembles de petite capacité à une calotte sphérique de la sphère canonique (par exemple des boules de petit rayon), on modifie peu la première valeur propre de Dirichlet [6], [15]. Il est également facile de construire des exemples de variété qui ne sont pas proches, pour la distance de Gromov-Hausdorff, de la sphère canonique et qui pourtant contiennent des domaines dont la première valeur propre de Dirichlet est arbitrairement proche de celle de leur domaine symétrisé (par exemple en lissant aux extrémités des sinus produits tordus de la forme $((0,\pi)\times\mathbb{S}^{n-1}, dt^2+\epsilon^2\sin^2 t\,\mathrm{can})$ avec $\epsilon>0$ petit et en considérant des domaines de la forme $(0,a)\times\mathbb{S}^{n-1}$). Signalons enfin qu'il est également possible de construire de tels exemples sur des variétés à courbure de Ricci positive, non homéomorphes à la sphère en utilisant les métriques construites sur l'espace projectif complexe par M. Anderson [1]. Muni de ces métriques l'espace projectif complexe est proche, pour la distance de Gromov-Hausdorff, d'un sinus produit tordu, pour plus de détails sur cet exemple nous renvoyons à [5].

Dans cet article nous démontrons un résultat de stabilité optimal, au vue des remarques précédentes, lorsque la première valeur propre d'un domaine convexe est proche de celle d'un hémisphère $\mathbb{S}^{n+}$ de la sphère canonique de dimension n.

THÉORÈME 0.2. — *Il existe des fonctions $\eta(\epsilon)$ et $\tau(\epsilon)$ telles que, pour toute variété riemannienne compacte (M^n,g) dont la courbure de Ricci vérifie* $\mathrm{Ric}\geqslant(n-1)g$, *pour tout domaine régulier Ω de M, géodésiquement convexe, de volume* $\mathrm{vol}\,\Omega\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{vol}\,M$ *et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie*

$$\lambda_1^D(\Omega)\leqslant\lambda_1^D(\mathbb{S}^{n+})+\epsilon,$$

alors, en notant d_H la distance de Hausdorff, il existe x_0 dans Ω tel que

$$d_H\Big(\Omega, B\Big(x_0,\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\leqslant\tau(\epsilon).$$

De plus, il existe un sinus produit tordu $((0,\pi)\times N,d)$ tel que

$$d_{GH}((M,d_g),((0,\pi)\times N,d))\leqslant\tau(\epsilon),$$
$$d_{GH}((\Omega,d_g),((0,\frac{\pi}{2})\times N,d))\leqslant\tau(\epsilon),$$

où d_g est la distance induite par la métrique riemannienne g et d_{GH} désigne la distance de Gromov-Hausdorff. Nous renvoyons à la troisième partie de cet article pour une définition des sinus produits tordus.

ALGEBRA / NUMBER THEORY

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 4 (1982), 119-142.

EXTENSIONS CENTRALES D'ALGÈBRES DE LIE

par C. KASSEL et J.-L. LODAY

Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre associative. S. Bloch ([1], théorème 3.1) a démontré que le groupe d'homologie $H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$ de l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle sur A est isomorphe au k-module de différentielles $\Omega^1_{A/k}/dA$ lorsque A est commutative et que 2 est inversible dans A (le cas particulier où $A = k[t,t^{-1}]$ a été traité dans [3], théorème 2.36).

Dans ce travail, nous éliminons les hypothèses restrictives de Bloch et nous calculons $H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$ en toute généralité. Au module $\Omega^1_{A/k}/dA$ qui n'est défini que pour A commutative, on substitue un groupe $HC_2(A)$ construit à partir d'un complexe-quotient du complexe de Hochschild de l'algèbre A. L'idée d'un tel complexe vient des travaux d'A. Connes sur les C*-algèbres. On démontre alors stablement l'isomorphisme

$$H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k) \cong HC_2(A) \quad \left(n \geqslant 5 \text{ ou } n \geqslant 2 \text{ et } \frac{1}{2} \in A\right)$$

en étudiant l'extension centrale universelle $\mathfrak{st}_n(A)$ de la k-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$.

Au § 2 nous développons une version relative des résultats précédents pour une surjection $A \to A/I$. Lorsque A est commutative, on calcule le groupe d'homologie relative $H_3(\mathfrak{sl}_n(A/I),\mathfrak{sl}_n(A);k)$ de la projection $\mathfrak{sl}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A/I)$ au moyen d'un groupe relatif pour l'homologie de Connes. On montre ainsi que $H_3(\mathfrak{sl}_n(A/I),\mathfrak{sl}_n(A);k)$ est isomorphe (pour n assez grand) au k-module $\Omega^1_{A,I/k}/dI$ engendré par les générateurs $\langle a,b\rangle$ (où l'un au moins des éléments a, b de A est dans l'idéal I) et les relations

$$\begin{gathered}\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = 0, \\ \langle a,\lambda b+\mu c\rangle - \lambda\langle a,b\rangle - \mu\langle a,c\rangle = 0,\ \lambda,\ \mu \in k, \\ \langle a,bc\rangle + \langle b,ca\rangle + \langle c,ab\rangle = 0, \qquad a \text{ ou } b \text{ ou } c \in I.\end{gathered}$$

On se reportera à la proposition 2.11 pour un résultat général lorsque A n'est pas nécessairement commutative.

On peut réinterpréter les résultats du § 1 de la manière suivante : (pour n assez grand), on a une suite exacte fonctorielle en A

$$0 \to H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k) \to \mathfrak{st}_n(A) \xrightarrow{\varphi_A} \mathfrak{gl}_n(A) \to H_1(\mathfrak{gl}_n(A),k) \to 0$$

et les groupes $H_1(\mathfrak{sl}_n(A),k)$, $H_1(\mathfrak{st}_n(A),k)$ et $H_2(\mathfrak{st}_n(A),k)$ sont nuls. Par analogie avec les premiers groupes de K-théorie algébrique (voir [9]), nous introduisons les foncteurs

$$K_1^L(A) = H_1(\mathfrak{gl}_n(A),k), \qquad K_2^L(A) = H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$$

et

$$K_3^L(A) = H_3(\mathfrak{st}_n(A),k)$$

(n assez grand). Alors $K_i^L(A)$ est isomorphe au groupe $HC_i(A)$ d'homologie de Connes ($i=1$ et 2).

Par ailleurs, pour toute surjection $A \to A/I$, on peut construire des groupes relatifs $K_i^L(A,I)$ et $HC_i(A,I)$ ($i=1$ et 2) dont on démontre qu'ils sont isomorphes et qu'ils donnent lieu à une suite exacte de la forme

$$K_3^L(A) \to K_3^L(A/I) \to K_2^L(A,I) \to K_2^L(A) \to \cdots \to K_1^L(A) \to K_1^L(A/I) \to 0\,.$$

De même qu'au § 1 on utilise la théorie des extensions centrales d'algèbres de Lie, on a besoin au § 2 d'une classification des suites exactes d'algèbres de Lie à quatre termes. Ceci nous amène à introduire des « modules croisés d'algèbres de Lie » par analogie avec une notion similaire définie par J. H. C. Whitehead en théorie des groupes. On présente en appendice les propriétés principales de ces objets.

1. Extensions centrales de $\mathfrak{sl}_n(A)$.

1.1. La donnée d'un anneau commutatif k et d'une k-algèbre A (associative, commutative ou non) permet de définir le complexe de k-modules

$$\cdots \to C_n(A) \xrightarrow{d} C_{n-1}(A) \to \cdots \to C_1(A) \to C_0(A) \to 0$$

où $C_0(A) = k$, $C_1(A) = A$ et si $n \geqslant 2$, $C_n(A)$ est le quotient du k-

ANALYSIS

au = à + la
peut = (a
sont = être

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 4 (1971), 293-345.

APPROXIMATION DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES SUR CERTAINS ESPACES DE BANACH

par Nicole MOULIS

0. Introduction.

E étant un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, Ω un ouvert de E le sujet de cette étude est l'approximation de fonctions de classe C^k définies sur Ω à valeurs dans un espace de Banach F, par des fonctions de classe C^∞.

Dans un article paru au « Journal of Mechanics » « An approximate Morse-Sard Theorem » [6]. J. Eells et J. MacAlpin montrent que si X et Y sont deux variétés paracompactes de classe C^∞ modelées sur E, toute application continue de X dans Y peut être approchée au sens de la C^0-topologie fine par une application de classe C^∞ qui est une application de Sard (l'ensemble des valeurs critiques est maigre). Ce résultat a pour corollaire : soit B une sous-variété fermée de Y, toute application continue de X dans Y peut être approchée au sens de la C^0-topologie fine par une application de classe C^∞ transversale à B. Les seuls autres théorèmes de transversalités connus pour les variétés de dimension infinie sont dus à S. Smale [13] et F. Quinn [12] et concernent les applications Fredholm.

Ces résultats sont généralisés de la manière suivante :

Dans le paragraphe I, nous démontrons que l'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^{2k-1} muni de la C^k-topo-

(Connu – well-known

logie fine. Si E est de dimension finie, un théorème plus fort est vrai et bien connu ; mais sa démonstration utilise le produit de convolution, donc une mesure de Lebesgue sur E.

f étant une fonction donnée de classe C^{2k-1} définie sur Ω, nous construisons explicitement une fonction g de classe C^∞ qui est une C^k-approximation de f. La construction se fait en deux étapes : à l'aide du théorème connu en dimension finie, et en utilisant l'existence d'une suite de sous-espaces de dimension finie de E dont la réunion est dense dans E, nous définissons une fonction g de classe C^∞ qui est une C^{k-1}-approximation de f et telle que $D^k g$ « ne diffère pas trop » de $D^k f$. Puis, ce lemme est utilisé localement pour, grâce à certaines partitions de l'unité construire la fonction g.

Pour clarifier l'exposé, nous avons d'abord fait la démonstration pour $k = 1$. Elle se généralise, alors, au cas où Ω est un ouvert de c_0 ou d'un espace l_p : si α est la classe d'une norme sur l'espace [2], nous démontrons que l'ensemble des applications de classe C^α de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 de Ω dans F, muni de la C^1-topologie fine.

Dans le paragraphe II, nous donnons quelques applications des théorèmes du paragraphe I qui permettent de ramener l'étude des variétés hilbertiennes de classe C^k à celle des variétés de classe C^∞ (les seules pour lesquelles des théorèmes soient connus d'après [9] et [5]). Ces théorèmes sont démontrés par des méthodes « classiques » [11].

Dans le paragraphe III, nous approfondissons l'étude des fonctions construites au paragraphe I. Dans le cas d'une C^1-approximation, la fonction $\bar{g}$ s'obtient par recollement de fonctions très voisines de fonctions linéaires (qui sont des fonctions de Sard). L'étude précise de $D\bar{g}$ montre que, dans le cas où Ω est un ouvert d'un espace de Hilbert, l'ensemble des applications de Sard, de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1, muni de la C^1-topologie fine.

Nous en déduisons que si M et N sont deux variétés de classe C^∞ modelées sur E, N_1 une sous-variété de N l'ensemble des applications de classe C^∞ de M dans N transversales à N_1 est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 muni de la C^1-topologie fine.

ANALYSIS / APPLIED

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 137-178.

PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES (II)

par **J.L. Lions** (Nancy) et **E. Magenes** (Pavia).

INTRODUCTION

Cet article fait suite à l'article [16], mais nous avons divisé nos résultats de façon que ces deux articles puissent être lus indépendamment. D'autres articles suivront, conformément au programme indiqué dans l'introduction de [16].

Si $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A$ désigne un opérateur elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert Ω de R^n (dans des articles ultérieurs de cette série, nous étudierons les problèmes analogues relatifs à des opérateurs non elliptiques) on appelle problème aux limites non homogène la recherche de u, situé dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$, vérifiant (*) $Au = f$, f donné dans un autre espace fonctionnel $\mathcal{G}$, avec les conditions aux limites (**) $B_j u = \varphi_j$, $j = 0, \ldots, m-1$, les B_j étant des opérateurs différentiels (convenables) sur la frontière Γ de Ω; les φ_j doivent être pris dans des espaces fonctionnels convenables, $\mathcal{T}_j$.

Voici grosso modo la méthode suivie :

1) Si l'on prend $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = L^2(\Omega)$ (fonctions de carré sommable sur Ω) la méthode de prolongement des opérateurs non bornés (ou la méthode des projections) conduit naturellement à la résolution de problèmes du type (*), (**), avec $\varphi_j = 0$ (cas homogène), et u étant dans $\mathcal{F}_0$, dont les éléments vérifient en particulier la condition $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout $|p| \leqslant m$. On passe ensuite au cas non homogène à l'aide de

théorèmes de trace. Puis l'on peut trouver d'autres classes $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{T}\}$ à l'aide de théorèmes de régularité;

2) par transposition, on peut déduire de 1) de nouvelles classes $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{T}_{1,j}\}$ où le problème (*), (**) est bien posé;

3) par utilisation de la théorie de l'interpolation, on en déduit des classes « intermédiaires » $\{\mathcal{F}_\theta, \mathcal{G}_\theta, \mathcal{T}_{\theta,j}\}$ où le problème (*), (**) est également bien posé.

Dans les étapes 1), 2) les espaces $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_{j,1,j}$ font intervenir des dérivées fractionnaires; si donc, comme il est raisonnable, on veut considérer les problèmes (*), (**), avec des φ_j donnés dans des classes définies à l'aide des dérivations usuelles, il est utile (si l'on veut obtenir les meilleurs résultats possibles) de considérer l'étape 3), qui fournit (entre autres) des classes $\mathcal{T}_{\theta,j}$ définies par des propriétés portant sur les dérivées usuelles des φ_j (les classes $\mathcal{F}_\theta$ et $\mathcal{G}_\theta$ faisant alors intervenir des dérivations fractionnaires).

Ainsi, à tout résultat du type 1) correspond une théorie assez générale des problèmes non homogènes; on part ici des résultats de régularité dans les problèmes aux limites elliptiques faisant intervenir toutes les dérivées (alors que dans l'article (I) (cf. [16]) nous partions de résultats de régularité « partielle », par rapport à certaines variables privilégiées). L'étape 2) nécessite la mise au point de théorèmes de traces (Nos 2 à 5), les applications étant faites aux Nos 6 à 8; l'étape 3) occupe les Nos 9 à 11. Le No 12 considère d'autres problèmes aux limites et le No 13 donne une première application à des problèmes non elliptiques. [Cf. aussi [16 bis].]

L'article (III) de cette série paraîtra aux *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa.*