

## French Exam

# Méthode numérique pour la décroissance de l'énergie d'un réseau de cordes

Kais Ammari

Mohamed Jellouli

### 1 Introduction

L'étude de la décroissance de l'énergie globale de la solution de l'équation des ondes sur un arbre soumise à une condition de dissipation a fait l'objet de plusieurs travaux dont on peut citer [1]-[8] et [10].

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude numérique de la fonction énergie d'un arbre générique  $\mathcal{AG}$  formé de trois cordes de longueurs  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$ .

---

## French Exam

# Méthode numérique pour la décroissance de l'énergie d'un réseau de cordes

Kaïs Ammari

Mohamed Jellouli

### 1 Introduction

L'étude de la décroissance de l'énergie globale de la solution de l'équation des ondes sur un arbre soumise à une condition de dissipation a fait l'objet de plusieurs travaux dont on peut citer [1]-[8] et [10].

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude numérique de la fonction énergie d'un arbre générique  $\mathcal{AG}$  formé de trois cordes de longueurs  $l_1, l_2$  et  $l_3$ .

---

l'arbre générique en fonction de ces données initiales, ce qui fera l'objet du Théorème 1.

La construction numérique des opérateurs de type  $\mathcal{T}$  (en particulier l'inverse et la composée) demandera la vérification de ce qu'on appellera *une propriété de saturation*. Cette propriété permettra dans la troisième section de décrire l'opérateur tronqué

$$\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$$

par une forme matricielle

$$M(k, q) = \begin{cases} \gamma(R(k, q)) & \text{si } R(k, q) > 0 \\ 0 & \text{si } R(k, q) = 0 \end{cases}$$

et de montrer le Théorème 3.

Dans la dernière section nous donnerons deux illustrations numériques telles que le cas d'une tige soumise à une condition de dissipation à une extrémité et à une source  $k(t)$  à l'autre et le cas de l'arbre générique avec les données initiales

$$a_1 \equiv 0, a_2(x) = \sin^2 \left( \frac{\pi}{l_2} x \right), a_3 \equiv 0, \text{ et } b_k \equiv 0, k = 1, 2, 3.$$

## 2 Opérateurs de type $\mathcal{T}$

Dans cette section, nous allons rappeler les opérateurs de type  $\mathcal{T}$  et montrer quelques propriétés.

**Définition 1.** Soient  $m = (m(j))_{j \geq 1}$  une suite réelle strictement croissante vérifiant  $m(1) = 0$  et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} m(j) = +\infty$  et  $\gamma = (\gamma(j))_{j \geq 1}$  une suite de nombres réels (ou complexes).

1. On définit l'opérateur  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  par

$$\mathcal{P}_{(m, \gamma)} f(t) = \sum_{j=1}^q \gamma(j) f(t - m(j)), \text{ p.p. } t \in ]m(q), m(q+1)[,$$

$$\forall f \in L^p(0, +\infty), p \in [1, +\infty], \text{ et } \forall q \geq 1$$

et on dit que  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  est un opérateur de type  $\mathcal{T}$ . On notera souvent  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)} \equiv (m, \gamma)$ . Le nombre  $\gamma(1)$  s'appelle le coefficient de  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  et sera noté  $\text{coeff} \mathcal{P}_{(m, \gamma)}$ .

2. Soit  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$  et  $T > 0$ , on appelle troncature de  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  sur  $(0, T)$ , l'opérateur noté  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}^T$  caractérisé par les suites

$$m(1) = 0 < m(2) < \dots < m(L) \leq T$$

$$\alpha(1), \dots, \alpha(L-1) \text{ si } m(L) = T \text{ ou } \alpha(1), \dots, \alpha(L) \text{ si } m(L) < T.$$

Quitte à changer l'indexation, on peut supposer que  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}^T$  est défini par

$$m(1) = 0 < m(2) < \dots < m(L) = T \text{ et } \alpha(1), \dots, \alpha(L-1).$$

On adoptera aussi la notation  $\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$ .

SURFACES DE STEIN ASSOCIÉES  
AUX SURFACES DE KATO INTERMÉDIAIRES

LAURENT BATTISTI \*

Received: August 2, 2010

## 1. INTRODUCTION

Les surfaces de la classe VII de Kodaira sont les surfaces complexes compactes dont le premier nombre de Betti vaut 1 ; on appelle surface de la classe  $VII_0$  une surface de la classe VII qui est minimale. Le cas de ces surfaces dont le second nombre de Betti  $b_2$  est nul est entièrement compris, il s'agit nécessairement d'une surface de Hopf ou d'une surface d'Inoue et le cas  $b_2 > 0$  est toujours étudié actuellement ; il a été conjecturé qu'elles contiennent toutes une coquille sphérique globale. La preuve de ce résultat terminerait la classification des surfaces complexes compactes.

Les surfaces à coquille sphérique globale, qui nous intéressent ici, peuvent être obtenues selon un procédé dû à Kato (voir [11]), que l'on rappelle dans la section suivante. Ces surfaces se divisent en trois classes, les surfaces d'Enoki, d'Inoue-Hirzebruch et enfin les surfaces intermédiaires.

---

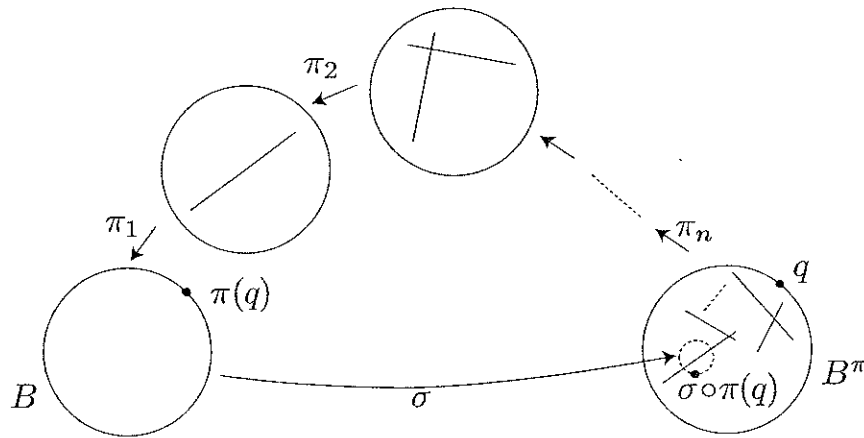
\*. Je tiens à remercier le referee pour ses remarques très importantes. Le financement de cette recherche est assuré par la Région Provence-Alpes-Côte d'Azur dans le cadre d'une bourse doctorale régionale.

Étant donné une surface minimale  $S$  à coquille sphérique globale,  $D$  le diviseur maximal de  $S$  formé des  $b_2(S)$  courbes rationnelles de  $S$  et  $\varpi : \tilde{S} \rightarrow S$  le revêtement universel de  $S$ , nous allons démontrer que  $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$  (où  $\tilde{D} = \varpi^{-1}(D)$ ) est une variété de Stein. Ce résultat était déjà connu pour les surfaces d'Enoki et d'Inoue-Hirzebruch; nous allons le montrer dans le cas des surfaces intermédiaires. Dans la dernière partie et toujours dans le cas des surfaces intermédiaires, on donne une condition pour que le fibré tangent holomorphe de la variété  $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$  soit holomorphiquement trivialisable, à savoir que la surface  $S$  soit d'indice 1.

2. PRÉLIMINAIRES

On dit qu'une surface compacte  $S$  contient une coquille sphérique globale s'il existe une application qui envoie biholomorphiquement un voisinage de la sphère  $S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  dans  $S$  et telle que le complémentaire dans  $S$  de l'image de la sphère par cette application soit connexe.

Toute surface contenant une coquille sphérique globale peut être obtenue de la façon suivante : étant données une succession finie d'éclatements  $\pi_1, \dots, \pi_n$  de la boule unité  $B$  de  $\mathbb{C}^2$  au-dessus de 0 et  $\pi := \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n : B^\pi \rightarrow B$  la composée de ces éclatements, ainsi qu'une application  $\sigma : \bar{B} \rightarrow B^\pi$  biholomorphe sur un voisinage de  $\bar{B}$ , on recolle les deux bords de  $\text{Ann}(\pi, \sigma) := B^\pi \setminus \sigma(\bar{B})$  à l'aide de l'application  $\sigma \circ \pi$  :

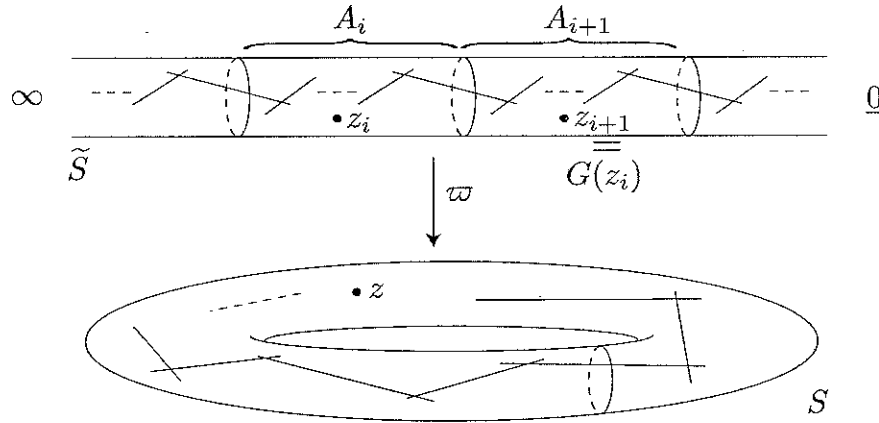


La surface obtenue possède un groupe fondamental isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et son second nombre de Betti est égal à  $n$  (voir [2]). Il s'agit d'une construction due à Kato [11]. Dans la suite, on appellera surface de Kato une surface complexe compacte minimale contenant une coquille sphérique globale, dont le second nombre de Betti est non nul.

Dans [2], Dloussky étudie le germe contractant d'application holomorphe  $\varphi = \pi \circ \sigma : B \rightarrow B$  associé à la construction précédente. Ce germe détermine à isomorphisme près la surface étudiée (proposition 3.16 loc. cit.).

Soit  $S$  une surface de Kato; on note  $D$  le diviseur maximal de  $S$  formé des  $b_2(S)$  courbes de  $S$ ,  $\tilde{S}$  le revêtement universel de  $S$  et  $\tilde{D}$  la préimage de  $D$  dans  $\tilde{S}$ .

Suivant les notations de [2], on obtient la surface  $\tilde{S}$  en recollant une infinité d'anneaux  $A_i$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) isomorphes à  $\text{Ann}(\pi, \sigma)$ , en identifiant le bord pseudo-concave de  $A_i$  au bord pseudo-convexe de  $A_{i+1}$  via l'application  $\sigma \circ \pi$ . La surface  $\tilde{S}$  possède deux bouts, notés  $\underline{0}$  et  $\infty$ , le bout  $\underline{0}$  possédant une base de voisinages ouverts strictement pseudo-convexes (les  $\bigcup_{i \geq j} A_i$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ ) et le second une base de voisinages strictement pseudo-concaves (les  $\bigcup_{i \leq j} A_i$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ ). Enfin on définit un automorphisme  $G$  de  $\tilde{S}$  en posant  $G(z_i) := z_{i+1}$  où  $z_i$  et  $z_{i+1}$  sont les images dans  $A_i$  et  $A_{i+1}$  respectivement d'un même point  $z \in \text{Ann}(\pi, \sigma)$ .



Fixons une courbe compacte  $C$  de  $\tilde{S}$  avec  $C \subset A_0$ . On note  $(\hat{S}_C, p_C)$  l'effondrement de  $\tilde{S}$  sur la courbe  $C$ , c'est-à-dire la donnée d'une surface  $\hat{S}_C$  n'ayant qu'un bout, d'une application holomorphe  $p_C$  de  $\tilde{S}$  dans  $\hat{S}_C$ , biholomorphe sur un voisinage du bout  $\infty$  dans  $\tilde{S}$  sur un voisinage du bout de  $\hat{S}_C$ , telles que  $\hat{C} = p_C(C)$  soit une courbe d'auto-intersection  $-1$ .

La proposition 3.4 de [2] nous assure l'existence d'une telle application  $p_C$  pour toute courbe compacte  $C$  de  $\tilde{S}$ , et d'un point  $\hat{0}_C \in \hat{C}$  tel que  $p_C$  soit également biholomorphe entre  $\tilde{S} \setminus p_C^{-1}(\hat{0}_C)$  et  $\hat{S}_C \setminus \{\hat{0}_C\}$ .

De plus, la restriction de  $p_C$  au complémentaire de  $\tilde{D}$  est un biholomorphisme entre  $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$  et  $\hat{S}_C \setminus p_C(\tilde{D})$ . Enfin, il existe une application holomorphe  $F_C$  de  $\hat{S}_C \setminus \{\hat{0}_C\}$  dans lui-même, contractante en  $\hat{0}_C$ , conjuguée à  $\varphi$  et biholomorphe sur  $\hat{S}_C \setminus p_C(\tilde{D})$ .

## SUR LA NON-DENSITÉ DES POINTS ENTIERS

---

### 1. Introduction

On s'intéresse ici aux solutions à coordonnées (quasi-)entières de systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans un corps de nombres  $K$ : on prouve qu'une variété projective sur  $K$  privée de suffisamment d'hypersurfaces n'a pas beaucoup de points (quasi-)entiers. On a également les résultats analogues en géométrie hyperbolique: une telle variété (sur  $\mathbb{C}$ ) n'a pas de courbe entière non dégénérée.

Plus précisément, soit  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ . On note  $O_{KS}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ . Cet article s'inscrit dans le cadre d'un problème important de la géométrie arithmétique.

CONJECTURE 1.1 ([6, Conjecture 4.2], [13, Conjecture 3.4.3])

Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $K$  de diviseur canonique  $\mathcal{K}_X$ . Soit  $D$  un diviseur effectif sur  $X$ , à croisements normaux. Posons  $Y = X - D$ . On suppose  $\mathcal{K}_X + D$  big (par exemple, ample) sur  $X$ . Alors tout ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K)$   $S$ -entier sur  $Y$  est non Zariski-dense dans  $Y$ .

L'hypothèse sur  $\mathcal{K}_X + D$  est une condition de positivité de ce diviseur. Notons que cette conjecture est encore largement ouverte: le cas où  $X = \mathbb{P}_K^2$  n'est par exemple pas connu. Levin en a proposé des cas particuliers intéressants, lorsque  $D$  a suffisamment de composantes irréductibles.

CONJECTURE 1.2 ([8, Conjecture 5.3A])

*Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . Soient  $D_1, \dots, D_r$  des diviseurs effectifs big sur  $X$  qui se coupent proprement. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . On suppose  $r \geq d + 2$ . Alors aucun ensemble  $S$ -entier sur  $Y$  n'est Zariski-dense dans  $Y$ .*

Pour une explication du lien entre 1.1 et 1.2, on pourra consulter [8, paragraphe 14.2]. Un théorème classique de Siegel montre cette conjecture lorsque  $X$  est une courbe. Le cas des surfaces lisses est obtenu par Levin [8, théorème 6.2A.c].

Par ailleurs, c'est une conséquence directe du théorème du sous-espace (voir Schmidt [11], Schlickewei [10]) lorsque  $X = \mathbb{P}_K^d$  et les  $D_i$  sont des hyperplans en position générale. Plus généralement, cet énoncé est connu de Vojta [15, corollaire 0.3] pour  $X$  lisse et  $r \geq d + \rho + 1$ , où  $\rho$  désigne le nombre de Picard de  $X_{\bar{K}}$ .

Dans un article récent, Corvaja, Levin, et Zannier [2] démontrent la conjecture 1.2 avec  $d^2 - d + 1$  diviseurs  $D_i$  amples sur  $X$  lisse ( $d \geq 3$ ). On se propose ici d'améliorer ce résultat en considérant un nombre de diviseurs linéaire en  $d$  (au lieu de quadratique).

THÉORÈME 1.3

*Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 2$ . Soient  $D_1, \dots, D_{2d}$  des diviseurs effectifs amples sur  $X$  qui se coupent proprement. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_{2d}$ . Alors tout ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K)$   $S$ -entier sur  $Y$  est non Zariski-dense dans  $Y$ .*

On l'obtient comme corollaire d'un critère (théorème 2.11) qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points  $S$ -entiers.

La démonstration s'inspire de la méthode introduite par Corvaja et Zannier dans le cas des courbes (voir [3]) et des surfaces (voir [4]). Cette méthode, dont l'ingrédient arithmétique principal est le théorème du sous-espace, a ensuite été étendue en dimension supérieure par Levin [8], l'auteur [1], et par Corvaja, Levin, et Zannier [2].

L'idée nouvelle ici est de considérer un faisceau cohérent codant les ordres d'annulation optimaux en les  $D_i$  et de prouver un théorème de convexité (théorème 3.6) sur les sections globales de ce faisceau.

À titre d'application du critère 2.11, on montre en outre l'énoncé suivant.



## THÉORÈME 1.4

Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 2$ . Soient  $D_1, \dots, D_{d+2}$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement. Posons  $L = \sum_{i=1}^{d+2} D_i$  et  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_{d+2}$ . On suppose que  $L - (d+1)D_i$  est ample pour tout  $i \in \{1, \dots, d+2\}$ . Alors aucun ensemble  $S$ -entier sur  $Y$  n'est Zariski-dense dans  $Y$ .

L'hypothèse sur les  $L - (d+1)D_i$  est vérifiée lorsque les  $D_i$  vivent dans un cône "suffisamment étroit" du groupe de Néron-Severi de  $X$ .

Par ailleurs, Vojta [13] a développé un "dictionnaire" entre la géométrie diophantienne et la théorie de Nevanlinna: l'étude des points  $S$ -entiers sur les variétés sur  $K$  est mise en analogie avec l'étude des courbes entières sur les variétés complexes. À titre d'exemple, le théorème de Siegel sur les courbes est l'analogue du théorème de Picard.

Pour l'étayer, on obtient aussi le critère (théorème 2.12) qui, dans ce dictionnaire, correspond au théorème 2.11.

La section 2 décrit les critères de quasi-hyperbolicité, qui sont démontrés à la section 4. La section 3 donne le théorème de convexité 3.6 (ainsi qu'un lemme d'algèbre locale prouvé à la section 6). On en déduit les théorèmes 1.3 et 1.4 à la section 5.

## 2. Définitions et énoncés

Soit  $K$  un corps. Commençons par quelques définitions de géométrie.

### Conventions

On appelle variété sur  $K$  tout schéma quasi-projectif et géométriquement intègre sur  $K$ . Le mot "diviseur" sous-entend "diviseur de Cartier".

Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . Lorsque  $L$  est un diviseur sur  $X$  tel que  $h^0(X, L) \geq 1$ , on désigne par  $\mathbf{B}_L$  le lieu de base de  $\Gamma(X, L)$  et par  $\Phi_L : X - \mathbf{B}_L \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L))$  le morphisme défini par  $\Gamma(X, L)$ . Pour tout diviseur effectif  $D$  sur  $X$ , on note  $1_D$  la section globale de  $\mathcal{O}_X(D)$  qu'il définit.

### Définition 2.1

Un diviseur  $L$  sur  $X$  est dit *grand* lorsque  $h^0(X, L) \geq 1$  et  $\Phi_L$  est génériquement fini.

### Définition 2.2

Soient  $D_1, \dots, D_r$  des diviseurs effectifs sur  $X$ . On dit que  $D_1, \dots, D_r$  se coupent proprement lorsque pour toute partie  $I$  non vide de  $\{1, \dots, r\}$ , la section globale  $(1_{D_i})_{i \in I}$  de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(D_i)$  est régulière (autrement dit, pour tout  $x \in \bigcap_{i \in I} D_i$ , en notant  $\varphi_i$  une équation locale de  $D_i$  en  $x$ , les  $(\varphi_i)_{i \in I}$  forment une suite régulière de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ ).

*Remarque 2.3*

Supposons  $X$  de Cohen-Macaulay (par exemple, lisse sur  $K$ ); alors d'après [5, lemme A.7.1], les diviseurs  $D_1, \dots, D_r$  se coupent proprement si et seulement si pour toute partie  $I$  non vide de  $\{1, \dots, r\}$ , le fermé  $\bigcap_{i \in I} D_i$  est purement de codimension  $\#I$  dans  $X$  (éventuellement vide).

*Définition 2.4*

Lorsque  $L$  est un diviseur sur  $X$  tel que  $q = h^0(X, L) \geq 1$  et  $E$  un diviseur effectif non nul sur  $X$ , on pose

$$\alpha(L, E) = \frac{1}{q} \sum_{k \geq 1} h^0(X, L - kE).$$

Introduisons ensuite les notions d'hyperbolicité étudiées dans cet article.

*Convention 2.5*

Lorsque  $K$  est un corps de nombres et  $v$  une place de  $K$ , on désigne par  $K_v$  le complété de  $K$  en  $v$ , et on normalise la valeur absolue  $|\cdot|_v$  de sorte que  $|x|_v = |x|^{[K_v:\mathbb{Q}]}$  si  $v$  est archimédienne et  $|p|_v = p^{-[K_v:\mathbb{Q}_p]}$  si  $v$  est  $p$ -adique.

Lorsque  $K$  est un corps de nombres et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ , on note  $O_{K,S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$  (i.e., l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $|x|_v \leq 1$  pour toute place finie  $v \notin S$ ).

Soit  $K$  un corps de nombres.

*Définition 2.6*

Soient  $Y$  une variété sur  $K$ ,  $K'$  une extension finie de  $K$ , et  $S$  un ensemble fini de places de  $K'$ . Un ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  est dit  $S$ -entier sur  $Y$  lorsqu'il existe un  $O_{K',S}$ -schéma intègre et quasi-projectif  $\mathcal{Y}$  de fibre générique  $Y_{K'}$  tel que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}(O_{K',S})$ .

*Définition 2.7*

Soient  $Y$  une variété sur  $K$ , et  $K'$  une extension finie de  $K$ . Un ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  est dit *quasi-entier* sur  $Y$  lorsqu'il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $K'$  tel que  $\mathcal{E}$  soit  $S$ -entier sur  $Y$ .

*Définition 2.8*

Soit  $Y$  une variété sur  $K$ . On dit que  $Y$  est *arithmétiquement quasi-hyperbolique* lorsqu'il existe un fermé  $Z \neq Y$  tel que pour toute extension finie  $K'$  de  $K$  et tout ensemble quasi-entier  $\mathcal{E} \subset Y(K')$  sur  $Y$ , l'ensemble  $\mathcal{E} - Z(K')$  soit fini.