Algebra

French
Fall 2014

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1951)

QUELQUES RÉSULTATS D' HARISH-CHANDRA [1], I,

par Jacques DIXMIER.

Tous les espaces vectoriels et toutes les algèbres sont sur le corps complexe.

1. L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

1. - Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, T l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, I l'idéal bilatère de T engendré par les

$$a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1 , a_2] , \; a_1 \in \mathfrak{a}, \; a_2 \in \mathfrak{a} .$$

Soit S le sous-espace de T formé des tenseurs symétriques. Alors, T est la somme directe de S et I (non trivial). L'application canonique de T sur $A = T/I$ applique biunivoquement S sur A. En particulier, on peut identifier désormais $\mathfrak{a} \in S$ à un sous-espace de A ; A est engendré par $\mathfrak{a}$ et 1. D'autre par toute représentation ν de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ se prolonge de manière unique en une représentation ν' de l'algèbre associative T, qui s'annule sur les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1 , a_2]$, donc sur I ; alors ν' définit par passage au quotient une représentation ν_1 de l'algèbre associative A ; ν_1 est la seule représentation de A prolongeant ν ; réciproquement, toute représentation de l'algèbre associative A fournit, par restriction à $\mathfrak{a}$, une représentation de l'algèbre Lie $\mathfrak{a}$. L'algèbre A s'appelle l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$.

2. - Sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, introduisons l'unique structure d'algèbre de Lie commutative. L'idéal I correspondant dans T est l'idéal engendré par les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$; nous le désignerons par I'. Alors, T est la somme directe de S et I'. Identifions S à l'algèbre commutative T/I' : S se trouve muni d'une structure multiplicative qui en fait l'algèbre sysmétrique de $\mathfrak{a}$ (algèbre de polynômes).

Revenons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ initiale. Soit γ la restriction à S de l'application canonique de T sur A. On a vu que γ est un isomorphisme de l'espace S sur l'espace A. Mais γ n'est pas un isomorphisme d'algèbre. On va étudier les relations entre l'algèbre S et l'algèbre A.

[1] HARISH-CHANDRA. - On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 28-96.

Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S. On a : $S^r S^{r'} \subset S^{r+r'}$: S est une algèbre graduée. Soit $A^r = \gamma(S^r)$. Nous dirons que les éléments de A^r sont les éléments symétriques homogènes de degré r de A. L'espace A est la somme directe des A^r ; $A^0 = \{\lambda 1\}$, et $A^1 = \mathfrak{a}$. Soit $A_r = A^0 + A^1 + \dots + A^r$. On voit aisément que A_r est l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de produits de r éléments de $\mathfrak{a}$ au plus. Donc $A_r A_{r'} \subset A_{r+r'}$: A est une algèbre filtrée par les A_r (mais non graduée par les A^r). Un élément $a \neq 0$ de A sera dit de degré r si sa composante symétrique homogène non nulle de degré maximum est de degré r. Ainsi, γ conserve le degré.

Soient $s \in S$, $s' \in S$, avec (degré de s) $\leqslant r$, (degré de s') $\leqslant r'$. Alors, $\gamma(s)$, $\gamma(s')$ et $\gamma(ss')$ sont congrus modulo $A_{r+r'-1}$. Autre expression de ce résultat : construisons l'algèbre graduée B associée à l'algèbre filtrée A ; soit B_r l'espace A_r/A_{r-1}, et B la somme directe $B_0 + B_1 + \dots$; le produit dans A définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $B_r \times B_{r'}$ dans $B_{r+r'}$; d'où, par linéarité, une application bilinéaire de $B \times B$ dans B ; autrement dit, B se trouve munie d'une structure d'algèbre, graduée par les B_r. Il y a un isomorphisme canonique évident de l'espace B_r sur l'espace A^r donc sur l'espace S^r ; d'où un isomorphisme canonique de l'espace B sur l'espace S, qui est aussi un isomorphisme d'algèbres.

3. - Soient $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, G la sous-algèbre de A engendrée par $\mathfrak{g}$. Soit G' l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Il existe un homomorphisme de G' sur G tel que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(g) = g$ pour $g \in \mathfrak{g}$. Soit $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ une base de $\mathfrak{a}$ telle que $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}$. Les $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r}$ (calculés dans G'), où $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ est une suite croissante (au sens large) d'entiers compris entre 1 et n, forment une base de l'espace G', et leurs images par φ sont linéairement indépendantes ; donc φ est biunivoque. Nous identifierons désormais G' à G par l'isomorphisme φ.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Soit $H \subset A$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. L'application bilinéaire $(g, h) \longrightarrow gh$ de $G \times H$ dans A définit une application linéaire θ de $G \otimes H$ dans A telle que $\theta(g \otimes h) = gh$. On peut supposer que $g_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_m$ forment une base de $\mathfrak{h}$. Les $g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_r} \times g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_s}$ (où $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ est une suite croissante d'entiers compris entre $n + 1$ et m) forment une base de $G \otimes H$;

or les $g_{i_1}\ g_{i_2} \dots g_{i_r}\ g_{j_1}\ g_{j_2} \dots g_{j_s}$ forment une base de A. Donc θ est un <u>isomorphisme</u> de l'espace vectoriel $G \otimes H$ sur l'espace A.

2. <u>Représentation des algèbres de Lie</u>.

1. – Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, H son algèbre enveloppante. Soit Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. La représentation nulle s'effectuant dans un espace de dimension 1 définit un élément δ_0 de Δ. Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V. Pour $\delta \in \Delta$, on désigne par V_δ l'espace engendré par les sous-espaces stables de V dans lesquels ν induit une représentation de classe δ. Les éléments de V_{δ_0} sont les éléments annulés par ν, encore appelés <u>invariants</u>. V_δ est stable pour ν. Si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ sont des éléments distincts de Δ, il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)$ se réduise à 1 dans V_{δ_1}, à 0 dans les V_{δ_i}, $i > 1$; il en résulte que la somme $\sum V_\delta$ est directe.

Si W est un sous-espace stable de V, on a $W_\delta = V_\delta \cap W$. Soient d'autre part $v \to v^*$ l'application canonique de V sur $V^* = V/W$, et ν^* la représentation induite par ν dans V^*. Si $v \in V_\delta$, on a $v^* \in (V^*)_\delta$, donc $(V^*)_\delta \supset (V_\delta)^*$. Si de plus $V = \sum V_\delta$, on a $V^* = \sum (V_\delta)^*$, donc, la somme $\sum (V^*)_\delta$ étant directe, $(V^*)_\delta = (V_\delta)^*$.

Si $V = \sum_\zeta V^\zeta$ est une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables pour ν, on a $V_\delta = \sum_\zeta (V_\delta \cap V^\zeta) = \sum_\zeta (V^\zeta)_\delta$.

Si $v \in \sum V_\delta$, le sous-espace $W = \nu(H)v$ est de dimension finie. Réciproquement, si W est de dimension finie, et si $\mathfrak{h}$ est <u>semi-simple</u>, on a $v \in \sum V_\delta$; en effet, W, qui est stable pour ν, est complètement réductible.

2. Soit $\delta \in \Delta$, et ν_δ une représentation de classe δ dans un espace U_δ. La représentation $\nu_{\delta^*} = -{}^t(\nu_\delta)$ qui s'effectue dans l'espace U_{δ^*} dual de U_δ, définit un élément δ^* de Δ. Ceci posé, considérons, dans $W = V \otimes U_{\delta^*}$, la représentation $\nu \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{\delta^*}$. Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ une base de U_{δ^*}. Alors, si $w = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$, le sous-espace V' de V engendré par les v_i est stable, et ν induit dans V' une représentation de classe δ, ou bien $V' = 0$. Réciproquement, si ν induit dans un sous-espace stable V' de V une

Analysis

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 442

442-01
Février 1974

CARACTÉRISATION D'ESPACES DE FONCTIONS ANALYTIQUES ET NON QUASI-ANALYTIQUES SUR UNE VARIÉTÉ A BORD

[d'après M. BAOUENDI et C. GOULAOUIC]

par Serge ALINHAC

Introduction

Les résultats présentés ici précisent la structure de certains espaces de fonctions régulières sur un ouvert à bord Ω , ou plus généralement sur une variété analytique réelle à bord convenable.

Ces espaces sont $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ (l'espace des fonctions indéfiniment différentiables jusqu'au bord de Ω), $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ (l'espace des fonctions analytiques jusqu'au bord) ou des espaces intermédiaires non quasi-analytiques notés $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ $(s \geq 1)$; ils seront définis plus loin.

On parvient à caractériser une fonction f d'un de ces espaces par des propriétés de la suite des itérés $A^i f$ $(i \in \mathbb{N})$, où A est un opérateur différentiel bien choisi, lié à la géométrie de l'ouvert ou de la variété.

Cela permet de montrer que ces espaces sont isomorphes à des espaces de suites, et de donner diverses applications.

Des résultats analogues avaient déjà été obtenus pour une variété sans bord (cf. [2]) et un opérateur A elliptique. L'originalité du présent travail est le choix judicieux de A , autorisant le "traitement du bord".

I. Généralités et rappels de quelques résultats anciens

Ces résultats, comme ceux qui sont présentés plus loin, sont de deux ordres : un résultat de régularité locale "à l'intérieur", et une "propriété d'itérés".

Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et A un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux à coefficients analytiques dans Ω . On a alors la

PROPOSITION I.1.- Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ une fonction telle que $Af \in \mathcal{A}(\Omega)$. Alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

La "propriété d'itérés" est la suivante :

PROPOSITION I.2.- Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ telle que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $M > 0$ avec : $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\|A^i f\|_{L^2(K)} \leq M^{i+1}(2i)!$. Alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

La proposition I.1 est bien connue (cf. par exemple Petrovski) ; la proposition I.2 a été établie d'abord par Aronszajn pour $A = \Delta$ (Laplacien usuel), puis en général par Kotake et Narasimhan [2]. Les résultats présents généralisent les propositions I.1 et I.2 au cas d'un ouvert "à bord", ou même "à coins cubiques" (cf. Hanouzet [3]).

II. Le problème du bord et la forme des opérateurs A choisis

Soient Ω un ouvert borné régulier, $\Omega \subset R^n$, et f une fonction, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Notre premier but est d'obtenir, pour un opérateur A convenable, un résultat du type :

$$Af \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) \ .$$

On imposera que A soit elliptique en tout point de Ω , afin d'obtenir $Af \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Néanmoins, si l'on choisit, par exemple, $A = \Delta$, on devra imposer de plus $f|_{\partial\Omega} \in \mathcal{A}(\partial\Omega)$, faute de quoi Af pourra être analytique jusqu'au bord de Ω sans que f le soit.

Il convient donc d'éliminer cette condition supplémentaire de trace sur $\partial\Omega$.

A cet effet, on peut regarder la variété à bord $\bar{\Omega}$ comme image d'une variété sans bord V par une certaine application, et voir si certains opérateurs elliptiques sur V "descendent" sur $\bar{\Omega}$. Donnons deux exemples de ce procédé :

Exemple 1.- Soient S^2 la sphère unité de R^3, et $p : S^2 \to [-1,+1]$ l'application restriction à S^2 de la projection $(x,y,z) \mapsto z$. On vérifie que le Laplacien Δ_S de la sphère se projette par p en l'opérateur différentiel $L \equiv \frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt}$. On nomme l'opérateur L "opérateur de Legendre".

Exemple 2.- Soient $\pi = R^2$ le plan réel et $p : \pi \to R_+$ l'application définie par $(x,y) \mapsto t = x^2 + y^2$. Le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se projette par p en l'opérateur $4\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$ de R_+.

On est donc conduit à choisir pour A une "dégénérescence" au voisinage du bord $\partial\Omega$ du type de celle de $\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$ près de $t = 0$.

D'une façon précise, on fera l'hypothèse

(H_1) Au voisinage de tout point du bord $\partial\Omega$, l'opérateur A s'écrit dans les coordonnées locales (x,y) (avec (x,y) appartenant à un voisinage V de 0 dans $\bar{R}^n_+$)

$$A = D_y y D_y + \sum_{|\mu|\leq 2} b_\mu D_x^\mu + \sum_{|\mu|\leq 1} c_\mu D_x^\mu y D_y .$$

Cela signifie que toute dérivation normale au bord présente dans A "dégénère" sur le bord. On impose en revanche que les termes de dérivations tangentielles se maintiennent sur le bord, et y constituent un opérateur elliptique. C'est, pour l'essentiel, le sens de la seconde hypothèse faite sur A :

(H_2) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in D(V)$, on ait l'inégalité a priori

$$\|yu\|_{H^2(R^n_+)} + \sum_{|\alpha|\leq 2} \|D_x^\alpha u\|_{L^2(R^n_+)} \leq C(\|Au\|_{L^2(R^n_+)} + \|u\|_{L^2(R^n_+)}) .$$

Geometry

Séminaire BOURBAKI
27e année, 1974/75, n° 458

Novembre 1974

COHOMOLOGIE DES OUVERTS DE L'ESPACE PROJECTIF SUR UN CORPS DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

[d'après A. OGUS]

par Lucien SZPIRO

0. Présentation

Soit V un sous-schéma fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$, où k est un corps de caractéristique zéro. Il s'agit ici de comparer les différents groupes de cohomologie associés à V et à $\mathbb{P}_k^n$. Par exemple, si V est une hypersurface non singulière de $P = \mathbb{P}_{\mathbf{C}}^n$, un théorème de Lefschetz assure que :

a) $H^i(P, \mathbf{Z}) \to H^i(V, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme si $i < \dim V$;

b) si $n \geq 3$, alors $\pi_1(V) = 0$;

c) si $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(P) \to \mathrm{Pic}(V)$ est un isomorphisme.

Ce théorème a été généralisé par W. Barth [2] en 1970 à des sous-variétés qui ne sont plus forcément intersection complète.

THÉORÈME (W. Barth [2]).- Soit V une sous-variété non singulière, de dimension d , de $P = \mathbb{P}_{\mathbf{C}}^n$, alors $H^i(P, \mathbf{C}) \to H^i(V, \mathbf{C})$ est un isomorphisme pour $i \leq 2d - n$.

Notons que la conclusion n'est non vide que si $d \geq n/2$. Si $d = n/2$, on obtient le théorème de la dimension des intersections. Si $d = n - 1$, on est de nouveau en présence du théorème de Lefschetz avec coefficients dans $\mathbf{C}$. Le premier cas intéressant est $d = 3$ et $n = 5$. On voit ainsi qu'une variété abélienne de dimension 3 n'est pas plongeable dans $\mathbb{P}^5$. Cet énoncé peut se déduire d'un calcul aisé des classes de Chern du faisceau normal à une telle variété. C'est cette idée qui est utilisée dans un récent travail de A. Holme [10]. Il donne une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une sous-variété lisse de $\mathbb{P}^N$ reste lisse quand on la projette dans $\mathbb{P}^n$, $n < N$. Cette condition s'exprime par l'annulation de polynômes universels en les classes de Chern de la variété considérée.

Remarquons que R. Hartshorne a donné dans [7] une démonstration élégante et courte du théorème de W. Barth comme corollaire du théorème, dit difficile, de S. Lefschetz. D'autre part, Larsen, utilisant la méthode de W. Barth, montre le même résultat pour la cohomologie entière [12].

Nous présentons ici une démonstration purement algébrique du théorème de W. Barth due à A. Ogus. La méthode utilisée a entre autres avantages, celui d'obtenir le résultat pour les variétés localement intersection complète (et non plus lisse) et de prouver, au passage, une conjecture [3] d'A. Grothendieck :

les groupes $H^i(P-V, F)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k, pour tout faisceau cohérent F sur P et tout i plus grand ou égal à $\operatorname{codim}(V)$.

En fait, on réussit à comparer les différents groupes suivants :

(i) cohomologie de De Rham de V ;

(ii) cohomologie des faisceaux cohérents sur $P-V$;

(iii) cohomologie des faisceaux cohérents sur le complété formel $\hat{P}$ de P le long de V ;

(iv) cohomologie de l'ouvert correspondant du spectre de l'anneau local du sommet du cône au-dessus de P.

Rappelons : tout ici sera de caractéristique zéro, en particulier, les applications que nous donnerons aux groupes de Poincaré et de Picard ne seront valables que dans ce cadre. (Cf. l'exposé n° 453 de J.-F. Boutot dans le présent séminaire.)

Le lecteur averti verra, tant dans la présentation que dans les développements, l'influence de R. Hartshorne. Ce texte doit beaucoup à deux de ses écrits "semi-pirates" [7], [8].

1. Le théorème de finitude

Nous donnons ici la démonstration du théorème de finitude, invoqué plus haut et précisé plus bas. On ne s'étonnera pas que dans la preuve d'un tel théorème on utilise beaucoup de dualités : le principe sous-jacent étant qu'un espace vectoriel, sur un corps, est de dimension finie, si et seulement si, il est canoniquement isomorphe à son bidual.

1.1 Enoncé projectif et énoncé local

THÉORÈME 1 (A. Ogus).- Soit $R = k[[X_1,\dots,X_n]]$ un anneau de séries formelles de dimension n sur un corps de caractéristique nulle. Soit I un idéal de R. Nous posons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \text{l'idéal maximal de } R , \\ X &= \operatorname{Spec}(R) , \quad U = X - \{\mathfrak{m}\} , \\ Y &= \operatorname{Spec}(R/I) , \quad V = Y - \{\mathfrak{m}\} . \end{aligned}$$

Supposons que V soit localement intersection complète dans U de pure codimension d. Alors $H^i_I(M)$ est un R-module artinien pour tout R-module de type fini M et pour tout $i > d$.

On a le même théorème si R est seulement un anneau local régulier d'équicaractéristique zéro. Par passage à l'anneau local du sommet du cône, on obtient l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1' .- Soit V un sous-schéma fermé de l'espace projectif $P = \mathbb{P}^n_k$ sur un corps de caractéristique zéro. Supposons que V soit localement intersection complète et purement de codimension d. Alors, pour tout faisceau cohérent F sur P, on a :

(a) $\dim_k(H^i(P - V , F)) < \infty$ si $i \geq d$;

(b) $H^i(P - V , F(\nu)) = 0$ si $\nu \gg 0$ et $i \geq d$.

On verra que l'énoncé local est très utile, dans le cas projectif, pour savoir ce qui se passe avec les anneaux locaux des points de V. Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème 1.

1.2 Traduction en termes de schémas formels [14]

Par définition, $H^i_I(R) = \varinjlim_s \operatorname{Ext}^i_R(R/I^s , R)$. Par dualité locale, on a :

$\operatorname{Hom}(H^i_I(R) , E) = \varprojlim_s H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^s)$ où E est l'enveloppe injective du corps résiduel de R. [Rappelons que $\operatorname{Hom}(\cdot , E) = \operatorname{Hom}(\cdot , k)$ sur les modules de longueur finie.]

On reconnaît à droite de l'égalité la cohomologie locale du complété formel de X