

Algebra

CHAPITRE 12

CELLULES DE CALOGERO-MOSER À GAUCHE ET À DROITE

Comme dans toute cette partie, \mathcal{C} désigne un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathcal{C}]$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les \mathcal{C} -cellules de Calogero-Moser à gauche (ou à droite), en lien avec les représentations de l'algèbre \mathbf{H}^{left} . Dans ce cadre, tout comme avec les cellules bilatères, nous aurons à notre disposition des *modules de Verma à gauche* (ou à droite). Ces modules de Verma nous permettront de définir les notions de CM-caractères \mathcal{C} -cellulaires, dont nous espérons qu'ils coïncident avec les KL-caractères cellulaires (lorsque W est un groupe de Coxeter).

L'essentiel de ce chapitre traitera des \mathcal{C} -cellules de Calogero-Moser à gauche et des modules de Verma à gauche : les résultats se transposent sans problème dans le contexte à droite.

12.1. Choix

Les questions de choix d'idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}^{\text{left}}$ sont tout autant cruciales que dans le cas des cellules bilatères. Nous allons définir et utiliser les modules de Verma à gauche pour guider ce choix.

Rappelons que $P^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathcal{C} \times V/W]$. Il découle de la décomposition PBW que l'on a un isomorphisme de P^{left} -modules

$$(12.1.1) \quad \mathbf{H}^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathcal{C} \times V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]^{\text{co}(W)}.$$

On retrouve alors l'algèbre $\bar{\mathbf{H}}^- = \mathbf{k}[\mathcal{C}] \otimes (W \ltimes \mathbf{k}[V^*]^{\text{co}(W)})$ comme sous- \mathbf{k} -algèbre de \mathbf{H}^{left} . Cela nous permet de définir des *modules de Verma à gauche* : si $\chi \in \text{Irr}(W)$, on pose

$$\mathcal{M}^{\text{left}}(\chi) = \mathbf{H}^{\text{left}} \otimes_{\bar{\mathbf{H}}^-} (\mathbf{k}[\mathcal{C}] \otimes V_{\chi})^{(-)}.$$

Alors $\mathcal{M}^{\text{left}}(\chi)$ est un \mathbf{H}^{left} -module à gauche et

$$(12.1.2) \quad \mathcal{M}^{\text{left}}(\chi) \text{ est libre de rang } |W|\chi(1) \text{ comme } P^{\text{left}}\text{-module.}$$

Lemme 12.1.3. — Si γ est un caractère linéaire de W , alors $\mathbf{K}^{\text{left}} \mathcal{M}^{\text{left}}(\gamma)$ est un $\mathbf{K}^{\text{left}} \mathbf{H}^{\text{left}}$ -module absolument simple.

Démonstration. — Notons que, d'après l'exemple 8.4.7, $\mathfrak{q}_{\text{sing}} \cap P \not\subset \mathfrak{p}^{\text{left}}$. Ainsi, le théorème 8.4.6 s'applique et donc, si τ désigne un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{p}^{\text{left}}$, alors les $k_R(\tau) \mathbf{H}^{\text{left}}$ -modules simples sont absolument simples et de dimension $|W|$. Donc, pour des raisons de dimension (voir 12.1.2), $k_R(\tau) \mathcal{M}^{\text{left}}(\gamma)$ est forcément absolument simple et le lemme en découle. \square

Fixons donc un caractère linéaire γ de W . Par le lemme 12.1.3, l'algèbre d'endomorphismes de $\mathbf{K}^{\text{left}} \mathcal{M}^{\text{left}}(\gamma)$ est égale à \mathbf{K}^{left} , ce qui induit un morphisme de P -algèbres $\Omega_\gamma^{\text{left}} : Z \rightarrow \mathbf{K}^{\text{left}}$ dont la restriction à P est le morphisme canonique $P \rightarrow P^{\text{left}}$. Puisque Z est entier sur P , l'image de $\Omega_\gamma^{\text{left}}$ est entière sur P^{left} et contenue dans $\mathbf{K}^{\text{left}} = \text{Frac}(P^{\text{left}})$. Puisque $P^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathcal{C} \times V/W]$, P^{left} est intégralement clos, cela force $\Omega_\gamma^{\text{left}}$ à se factoriser à travers P^{left} . Nous poserons

$$\mathfrak{z}^{\text{left}} = \text{Ker}(\Omega_1^{\text{left}}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}^{\text{left}} = \text{cop}(\mathfrak{z}^{\text{left}}).$$

Alors :

Proposition 12.1.4. — L'idéal $\mathfrak{q}^{\text{left}}$ de Q vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $\mathfrak{q}^{\text{left}}$ est un idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\text{left}}$.
- (b) $\mathfrak{q}^{\text{left}} \subset \bar{\mathfrak{q}}$.
- (c) $P^{\text{left}} = P/\mathfrak{p}^{\text{left}} \simeq Q/\mathfrak{q}^{\text{left}}$.

Démonstration. — Puisque \mathbf{K}^{left} est intègre, $\mathfrak{q}^{\text{left}}$ est premier. Puisque la restriction de Ω_1^{left} à P est le morphisme canonique $P \rightarrow P^{\text{left}}$, $\mathfrak{q}^{\text{left}} \cap P = \mathfrak{p}^{\text{left}}$. Cela montre (a).

Par construction, $\mathcal{M}^{\text{left}}(\gamma)/\bar{\mathfrak{p}} \mathcal{M}^{\text{left}}(\gamma) = \bar{\mathcal{M}}(\gamma)$ et donc le morphisme $\Omega_\gamma : Z \rightarrow \bar{P} = P/\bar{\mathfrak{p}}$ se factorise à travers les morphismes $\Omega_\gamma^{\text{left}} : Z \rightarrow P^{\text{left}}$ et $P^{\text{left}} \rightarrow \bar{P}$, d'où (b).

Pour finir, l'isomorphisme (c) découle du fait que l'image de Ω_γ est P^{left} . \square

La proposition 12.1.4 nous permet donc de faire un choix d'idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\text{left}}$ cohérent avec notre choix de $\bar{\mathfrak{q}}$. Le lemme suivant montre l'unicité de ce choix :

Lemme 12.1.5. — On a $\mathfrak{p}^{\text{left}} Q_{\bar{\mathfrak{q}}} = \mathfrak{q}^{\text{left}} Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathfrak{p}^{\text{left}}Q_{\bar{q}}$ est un idéal premier de $Q_{\bar{q}}$. D'après le lemme 11.1.1, le morphisme local d'anneaux locaux $P_{\bar{p}} \rightarrow Q_{\bar{q}}$ est étale. De plus, $P/\mathfrak{p}^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathcal{C} \times V^*/W]$ est intégralement clos (c'est une algèbre de polynômes) et donc $P_{\bar{p}}/\mathfrak{p}^{\text{left}}P_{\bar{p}}$ l'est aussi. Par changement de base, le morphisme d'anneaux $P_{\bar{p}}/\mathfrak{p}^{\text{left}}P_{\bar{p}} \hookrightarrow Q_{\bar{q}}/\mathfrak{p}^{\text{left}}Q_{\bar{q}}$ est étale, ce qui implique que $Q_{\bar{q}}/\mathfrak{p}^{\text{left}}Q_{\bar{q}}$, qui est un anneau local (donc connexe), est aussi normal (en vertu de [SGA1, exposé I, corollaire 9.11]) et donc intègre (car connexe). Cela montre que $\mathfrak{p}^{\text{left}}Q_{\bar{q}}$ est un idéal premier de $Q_{\bar{q}}$, comme souhaité. \square

Corollaire 12.1.6. — *L'idéal $\mathfrak{q}^{\text{left}}$ est l'unique idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\text{left}}$ et contenu dans \bar{q} . De plus, Q est étale sur P en $\mathfrak{q}^{\text{left}}$.*

Puisque $Q/\mathfrak{q}^{\text{left}} \simeq P/\mathfrak{p}^{\text{left}} = \mathbf{k}[\mathcal{C} \times V/W]$, on obtient que $Q/(\mathfrak{q}^{\text{left}} + \mathcal{C}Q) \simeq \mathbf{k}[\mathcal{C}]/\mathcal{C} \otimes \mathbf{k}[V/W]$ et donc $\mathfrak{q}^{\text{left}} + \mathcal{C}Q$ est un idéal premier de Q . Nous le noterons $\mathfrak{q}_c^{\text{left}}$.

Corollaire 12.1.7. — *On a $Q/\mathfrak{q}_c^{\text{left}} \simeq P/\mathfrak{p}_c^{\text{left}}$. De plus, $\mathfrak{q}_c^{\text{left}}$ est l'unique idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}_c^{\text{left}}$ et contenu dans \bar{q} .*

Démonstration. — La première assertion est immédiate et la deuxième en découle. \square

Choix, notations. Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cette partie, nous fixons un idéal premier $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$ de R au-dessus de $\mathfrak{q}_c^{\text{left}}$ et contenu dans \bar{r}_c . Nous noterons $\mathbf{K}_c^{\text{left}} = k_P(\mathfrak{p}_c^{\text{left}})$, $\mathbf{L}_c^{\text{left}} = k_Q(\mathfrak{q}_c^{\text{left}})$ et $\mathbf{M}_c^{\text{left}} = k_R(\mathfrak{r}_c^{\text{left}})$. Le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$ sera noté D_c^{left} (respectivement I_c^{left}).

Lorsque $\mathcal{C} = 0$ (respectivement $\mathcal{C} = \mathcal{C}_c$ avec $c \in \mathcal{C}$), les objets $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{K}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{L}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{M}_c^{\text{left}}$, D_c^{left} et I_c^{left} seront notés respectivement $\mathfrak{r}^{\text{left}}$, \mathbf{K}^{left} , \mathbf{L}^{left} , \mathbf{M}^{left} , D^{left} et I^{left} (respectivement $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{K}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{L}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{M}_c^{\text{left}}$, D_c^{left} et I_c^{left}).

Remarque 12.1.8. — Il a été montré dans le corollaire 9.4.4 que, si \bar{q}_* est un idéal premier de Q au-dessus de \bar{p} , alors $Q/\bar{q}_* \simeq P/\bar{p}$. Bien que $Q/\mathfrak{q}^{\text{left}} \simeq P/\mathfrak{p}^{\text{left}}$, nous verrons dans le chapitre 19 que ceci ne s'étend pas en toute généralité aux idéaux premiers de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\text{left}}$: en effet, si W est de type B_2 , alors il existe un idéal premier $\mathfrak{q}_*^{\text{left}}$ de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\text{left}}$ tel que $P/\mathfrak{p}^{\text{left}}$ soit un sous-anneau propre de $Q/\mathfrak{q}_*^{\text{left}}$ (voir le lemme 19.7.12(c)). Donc, en général, $\mathbf{K}^{\text{left}} \subsetneq \mathbf{M}^{\text{left}}$. ■

2. Le modèle

Dans cette section nous introduisons le modèle mathématique décrivant un système de N particules quantiques, et nous formulons plus précisément les questions à étudier. Nous énonçons ensuite un premier résultat concernant l'énergie du système.

2.1. N particules classiques

Commençons avec un système de N particules classiques évoluant dans l'espace \mathbb{R}^d . Généralement $d = 3$ mais les cas $d = 1, 2$ peuvent aussi décrire des condensats très plats ou sous la forme de cigares très allongés. Nous supposons que ces N particules sont soumises à un potentiel extérieur V et qu'elles interagissent par paires, avec une interaction w qui ne dépend que de la distance relative entre les deux particules. L'énergie du système est la fonction

$$(1) \quad H(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{|p_j|^2}{2m} + V(x_j) \right) + \lambda \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} w(x_k - x_\ell),$$

définie sur l'espace des phases $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$, et à valeurs réelles. Les variables x_1, \dots, x_N représentent les positions des N particules, alors que les p_1, \dots, p_N sont leurs quantités de mouvement (rappelons que $p = mv$ où m est la masse et v est la vitesse). Dans la suite nous supposerons pour simplifier que $m = 1/2$, ce qui correspond à un changement d'unités. La fonction $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel extérieur. Dans le cas de lasers servant à confiner le système (c'est-à-dire à éviter que les particules du gaz ne s'échappent), on prend généralement $V(x) = |x|^2$, mais d'autres choix sont possibles. La fonction $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est paire et, typiquement, radiale. On peut toujours supposer pour simplifier que les fonctions V et w sont lisses. Le réel λ est un paramètre de couplage qui servira à varier l'intensité de l'interaction et qui pourrait en principe être intégré à la fonction w .

Nous n'avons pas introduit dans le modèle les forces centrifuge et de Coriolis, qu'il faut prendre en compte si le condensat tourne autour d'un axe (en particulier si on s'intéresse à l'apparition des tourbillons). Dans le référentiel en rotation, cela revient à ajouter le terme

$$(2) \quad \Omega \sum_{j=1}^N e_z \cdot (x_j \wedge p_j)$$

où Ω est la vitesse de rotation et e_z est un vecteur unitaire donnant la direction de l'axe de révolution, qu'on peut toujours supposer vertical.

Nous devons maintenant nous placer dans un régime des paramètres correspondant à celui rencontré en laboratoire. Comme N est de l'ordre de 10^5 nous allons supposer que N est grand. En fait, nous allons même étudier la limite $N \rightarrow \infty$. Nous devons également prendre la température T suffisamment basse et, pour simplifier au maximum notre discours, nous prendrons simplement ici $T = 0$. Pour finir, nous devons travailler dans un régime où les interactions sont faibles et il y a plusieurs manières de le faire.

Une première technique consiste à supposer simplement que l'intensité λ de l'interaction est petite, c'est-à-dire que $\lambda \rightarrow 0$ en même temps que $N \rightarrow \infty$. La

première somme dans la définition (1) de la fonction H contient N termes, alors que la seconde en contient $N(N - 1)/2$. Pour que les deux soient comparables, il faut donc prendre λ d'ordre $1/N$, qui est le régime qui nous intéressera. Quitte à changer w , on peut toujours supposer que $\lambda N \rightarrow 1$ et c'est ce que nous ferons dans la suite. Dans ce régime, les particules se rencontrent très souvent mais l'intensité de l'interaction est très faible. On parle de *régime de champ moyen* car la loi des grands nombres nous précise que les particules vont chacune voir un champ moyen résultant de celui créé par toutes les autres. Nous y reviendrons.

Une autre hypothèse plus raisonnable physiquement consiste à supposer que le système est très dilué, de sorte que les particules se voient très peu souvent, mais avec un potentiel d'interaction ayant une intensité fixe. Après un changement d'échelle, ceci est équivalent à prendre une interaction qui a une très faible longueur caractéristique $\delta_N \ll 1$. Mathématiquement, cela revient à remplacer w par une interaction dilatée, $w_N(x) = \delta_N^{-a} w(x/\delta_N)$ avec $\delta_N \rightarrow 0$ et $a > 0$ fixé. Ce régime est appelé *Gross-Pitaevskii* et il est plus difficile à étudier mathématiquement. Nous n'en parlerons pas beaucoup ici.

À l'énergie $H(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)$ définie en (1) est associé un système d'équations différentielles ordinaires (les équations de Newton) qui décrivent le mouvement de nos N particules dans \mathbb{R}^d . C'est le système Hamiltonien

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = 2p_j, \\ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\nabla V(x_j) - \lambda \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \nabla w(x_k - x_j), \end{cases} \quad j = 1, \dots, N.$$

À température nulle, nous cherchons les états d'équilibre stables de ce système, qui sont les minima de H , et vérifient toujours $p_1 = \dots = p_N = 0$.²

Il est possible d'étudier le comportement du système classique (3) et des minima de H à la limite $N \rightarrow \infty$ en prenant $\lambda N \rightarrow 1$. Des résultats mathématiques dans cette direction ont été obtenus dès les années 70, en commençant avec des travaux de K. Hepp et H. Spohn. Nous renvoyons par exemple aux notes de cours récentes de F. Golse [6] pour une présentation plus détaillée.

Nous reviendrons plus tard au modèle classique de cette section et passons maintenant à l'équivalent quantique du même problème.

2.2. N particules quantiques

En mécanique quantique, le système n'est plus modélisé par un point dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$, mais par une *fonction d'onde* $\Psi : \mathbb{R}^{dN} \rightarrow \mathbb{C}$, qui est de carré intégrable et normalisée³ : $\int_{\mathbb{R}^{dN}} |\Psi|^2 = 1$. L'interprétation quantique usuelle est que

- $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est la densité de probabilité que les particules soient en x_1, \dots, x_N ;

² À température positive, il faudrait étudier la mesure de Gibbs $Z^{-1} \exp(-H/T)$ où Z est un facteur de normalisation.

³ Pour simplifier, nous omettrons fréquemment la mesure de Lebesgue dans notre notation.

- $|\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N)|^2$ est la densité de probabilité⁴ que les particules aient des vitesses p_1, \dots, p_N .

La fonction d'onde sert donc de lien entre deux objets classiques (des probabilités de positions et de vitesses). La transformée de Fourier est l'outil mathématique utilisé pour imposer le principe d'incertitude d'Heisenberg qui stipule que l'on ne peut connaître simultanément positions et vitesses avec une précision exacte (si $|\Psi|^2$ est très concentrée, alors $|\widehat{\Psi}|^2$ est très étalée).

Dans la pratique les particules sont indiscernables et il faut donc que les densités de probabilité $|\Psi|^2$ et $|\widehat{\Psi}|^2$ soient symétriques par rapport aux échanges de leurs variables $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ et $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}^d$. Il y a alors essentiellement deux possibilités : soit Ψ est symétrique et dans ce cas décrit des particules appelées *bosons*, soit Ψ est antisymétrique et modélise alors des *fermions*.⁵ Comme son nom l'indique, la condensation de Bose-Einstein ne concerne que les bosons et nous allons donc nous restreindre aux fonctions Ψ qui sont symétriques. La situation est très différente pour les fermions. Le sous-espace des fonctions symétriques dans $L^2((\mathbb{R}^d)^N)$ sera noté $L_s^2((\mathbb{R}^d)^N)$.

LES VOISINAGES OUVERTS RÉGULIERS

PAR L. SIEBENMANN, L. GUILLOU ET H. HÄHL

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Introduction.....	253
Notations et terminologie.....	256
1. Voisinages réguliers.....	257
2. Unicité des voisinages réguliers.....	261
3. Entourages à complément régulier.....	264
4. Critères élémentaires d'identification.....	268
5. Critères locaux d'existence des voisinages I-réguliers.....	271
6. Généralisations formelles.....	284
Appendice 1 : Pathologies.....	288
Appendice 2 : La théorie de Mazur.....	290

Introduction

Ce Mémoire systématise une théorie élémentaire des voisinages ouverts réguliers dont les premiers éléments sont esquissés dans [14]. On démontrera, entre autres résultats, l'existence d'une famille de voisinages réguliers fort agréables autour d'un polyèdre P topologiquement plongé dans \mathbf{R}^n toutes les fois que le couple (\mathbf{R}^n, P) sera localement triangulable. Il se peut (selon [15]) qu'un tel couple (\mathbf{R}^n, P) , P compact, ne soit pas triangulable et qu'il n'existe aucun voisinage E de P tel que $E - P$ soit un produit avec \mathbf{R} . Il n'existe donc aucune théorie classique des voisinages réguliers qui encadre ces exemples.

Les efforts de Mazur pour dégager une nouvelle théorie des voisinages réguliers [10] nous serviront de matrice philosophique ⁽¹⁾. Surtout on adopte son point de vue « formel et hypostatique » qui a depuis longtemps assuré la majorité des applications (par exemple le théorème de Kister-Mazur).

(1) Il conjecture par exemple l'existence de voisinages réguliers dans la situation citée ci-dessus.

Dans un premier temps on analyse l'idée de voisinage ouvert régulier d'un sous-espace (*a priori* arbitraire) d'un espace topologique Y . Soient $V \subset U \subset Y$; on dit que V est compressible vers X en fixant $Y - U$ et l'on écrit $V \searrow X(U)$ si, pour tout voisinage W de X , il existe un automorphisme de Y (i. e. homéomorphisme de Y sur lui-même) $h : Y \rightarrow Y$ tel que $h(V) \subset W$ et h fixe $Y - U$ et un voisinage de X .

Un voisinage ouvert E de X est dit régulier s'il est réunion, $E = \bigcup_n E_n$, d'une suite emboîtée $X \subset E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ de voisinages de X tels que, pour $n \geq 0$, $E_n \searrow X(E_{n+1})$. Une telle suite s'appelle une *gigogne*.

Par exemple pour $X =$ origine dans $Y = \mathbf{R}$, on constate aisément que les voisinages ouverts réguliers sont les intervalles ouverts (a, b) avec $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$.

La théorie est axée sur un théorème d'*unicité* (facilement démontré) qui affirme qu'entre deux voisinages (ouverts) réguliers E et E' de X dans Y il y a toujours un homéomorphisme $h : E \rightarrow E'$ qui fixe un voisinage de X (cf. § 2).

Par contre l'existence n'est pas assurée : l'ensemble triadique de Cantor n'a *aucun* voisinage régulier dans \mathbf{R} . On constate que l'existence des voisinages réguliers équivaut à l'

AXIOME. — Pour tout voisinage U de X dans Y , il existe un voisinage V de X tel que $V \searrow X(U)$.

Cet axiome simple clarifie beaucoup la question et permet d'établir au paragraphe 5 un critère local qui suffit pour assurer l'existence de voisinages réguliers si (Y, X) est métrisable et localement triangulable. Mieux, on vérifie même une version isotopique de l'axiome (l'*I-axiome*) qui comporte une unicité à isotopie près des voisinages réguliers. C'est une isotopie non ambiante, dite *glissement*. Dans cette circonstance, les voisinages réguliers s'appellent *I-réguliers*.

Pour identifier les voisinages réguliers dans des situations σ -compactes, il existe des critères pratiques de mobilité des compacts. Par exemple, si (Y, X) est compact et métrisable, un voisinage ouvert E de X est régulier si et seulement si $K \searrow X(U)$ pour tout compact $K \subset U$. Ce critère semble assurer que nous étudions l'unique notion acceptable de voisinage (ouvert) régulier valable dans l'enceinte des couples métrisables (Y, X) où $Y - X$ est localement triangulable (ou plus généralement, où $Y - X$ vérifie près de X la condition de prolongement des isotopies, cf. § 4.4). Plus précisément, si on suppose donnée une classe \mathcal{R} de voisinages ouverts qui jouissent des deux propriétés suivantes :

- (1) Tout voisinage de X contient un élément de \mathcal{R} .

- (2) Si E et E' sont dans \mathcal{R} , il existe un glissement $g_t : E \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, de $g_0 =$ inclusion, tel que g_t fixe un voisinage de X (indépendant de t), $g_1(E) = E'$ et que pour tout t , $g_t(E) \subset E \cup E'$. (C'est l'unicité offerte par l'I-axiome.)

Alors \mathcal{R} consiste de voisinages réguliers : En effet, soient $E \in \mathcal{R}$, $K \subset E$ un compact, et $V \subset E$ un voisinage de X . Selon (1), il existe $E' \in \mathcal{R}$ avec $E' \subset V$; soit $g_t : E \rightarrow Y$ le glissement offert par (2). Le principe de prolongement des isotopies dans E (cf. § 4.4, [13, § 6]) assure l'existence d'une isotopie $h_t : Y \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, de $\text{id}|_Y$ fixant un voisinage de $X \cup (Y - E)$ telle que, pour tout t , $h_t|_K = g_t|_K$. Puisque V est arbitraire on a $K \searrow X(E)$. Donc E est régulier, et même I-régulier.

D'autre part on constate que ce lemme d'identification des voisinages réguliers généralise le théorème de M. Brown [3] disant que toute variété métrisable réunion d'une suite emboîtée $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ d'ouverts homéomorphes à \mathbf{R}^m est elle-même homéomorphe à \mathbf{R}^m .

Un énoncé dual (presque équivalent) s'était révélé essentiel à la solution du problème de Schoenflies : Si un compact K est l'intersection d'une suite $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ de voisinages ouverts homéomorphes à \mathbf{R}^m alors $E_i - K$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^m - 0$.

Or, une idée duale à celle de voisinage régulier s'est révélée essentielle à l'étude homotopique des voisinages réguliers dans deux articles ([4], [16]) qui s'enchaînent avec celui-ci :

Un entourage à complément régulier de X dans Y est l'intersection $\bigcap_n E_n$ d'une suite $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ (appelée anti-gigogne) de voisinages de X dans Y tels que $E_i \searrow X(E_{i-1})$ pour $i \geq 1$. On démontre au paragraphe 3.5 que $Y - \bigcap_n E_n$ est unique à homéomorphisme près dès que Y est (par exemple) métrisable. Si $E_0 = E'_0 \subset E'_1 \subset E'_2 \subset \dots$ est en même temps une gigogne, la différence $\bigcup_n E'_n - \bigcap_n E_n$ s'appelle une frange du voisinage régulier $\bigcup_n E'_n$. Les franges jouent souvent le rôle donné par la topologie PL à la frontière d'un voisinage régulier fermé au sens combinatoire de Whitehead [18].

Il reste quelques points faibles dans cette théorie :

- (a) Une foule de propriétés, trivialement vérifiées si (Y, X) est compact, restent inconnues dans le cas non compact (voir l'Appendice 1).