Algebra

CHAPITRE 1

ANNEAUX, IDÉAUX, ALGÈBRES

Ce chapitre introduit les notions d'anneaux et d'idéaux. Ces deux notions formalisent les méthodes de calcul bien connues avec les nombres entiers ou les matrices : on dispose d'une addition, d'une multiplication, de deux symboles 0 *et* 1 *et des règles de calcul usuelles.*

§1.1. Premières définitions

DÉFINITION 1.1.1. — *On appelle anneau un groupe abélien A noté additivement muni d'une loi de multiplication $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$ vérifiant les propriétés suivantes :*

– *il existe un élément $1 \in A$ tel que pour tout $a \in A$, $1a = a1 = a$ (élément neutre pour la multiplication) ;*

– *pour tous a, b et c dans A, $(ab)c = a(bc)$ (associative) ;*

– *pour tous a, b et c dans A, $a(b+c) = ab + ac$ et $(b+c)a = ba + ca$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).*

On dit que l'anneau A est commutatif si de plus

– *pour tous a et b dans A, $ab = ba$ (commutativité).*

Comme exemples évidents d'anneaux commutatifs, citons $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \geqslant 1$, les corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, l'anneau $K[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps (voire un anneau commutatif) K. Si A est un anneau, l'ensemble des fonctions d'un ensemble S dans un anneau A muni des lois évidentes ($(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ et $(fg)(s) = f(s)g(s)$) est un anneau. L'ensemble des fonctions continues d'un espace topologique dans $\mathbf{R}$ est un anneau, de même l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ ($k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$).

Voici des exemples non commutatifs bien connus :

Exemples 1.1.2. — a) Soit A un anneau et soit $\mathrm{M}_n(A)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans A muni des règles de calcul habituelles : la somme de deux matrices est obtenue en ajoutant terme à terme, le produit des matrices $P = (p_{i,j})$ et $Q = (q_{i,j})$ est la matrice $R = (r_{i,j})$ dont le terme (i, j) est donné par

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} q_{k,j}.$$

Si $n \geqslant 2$, ou si A n'est pas commutatif, l'anneau $\mathrm{M}_n(A)$ n'est pas commutatif.

b) Si K est un corps (pour l'instant commutatif), l'ensemble $\mathrm{End}_K(V)$ des endomorphismes d'un K-espace vectoriel V est un anneau, non commutatif dès que $\dim V \geqslant 2$. En fait, $\mathrm{End}_K(V)$ est aussi un K-espace vectoriel et sa multiplication est K-linéaire. On dit que c'est une *K-algèbre.*

c) Soit G un groupe abélien. Si φ et ψ sont deux endomorphismes de G, l'application $g \mapsto \varphi(g) + \psi(g)$ est encore un endomorphisme de G qu'on note $\varphi + \psi$; cela munit $\mathrm{End}(G)$ d'une structure de groupe commutatif, d'élément neutre l'application $g \mapsto 0$. La composition des endomorphismes $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi$ est une loi associative et distributive par rapport à l'addition ; l'application identique de G en est un élément neutre. Ces lois munisent ainsi l'ensemble $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes du groupe abélien G d'un structure d'anneau.

Voici un exemple un peu moins connu.

Exemple 1.1.3. — Soit A un anneau et soit G un groupe. Le groupe abélien $A^{(G)}$ des fonctions de G dans A de support fini est muni d'un produit de convolution défini par la formule

$$(\varphi * \psi)(g) = \sum_{h \in G} \varphi(h) \psi(h^{-1} g).$$

Le produit de convolution est bien défini : la somme est finie, et la convolée de deux fonctions de support fini est encore de support fini. En outre, le produit de convolution est associatif, l'élément neutre est la fonction (« de Dirac ») qui vaut 1 en l'élément neutre de G et 0 ailleurs. Cela munit $A^{(G)}$ d'une structure d'anneau. Surtout lorsque A est un anneau commutatif, on l'appelle l'*algèbre du groupe* G (à coefficients dans A).

Les axiomes des anneaux permettent un calcul analogue à celui dont on a l'habitude dans les entiers ou les matrices. Si a est un élément d'un anneau A et si n est un entier positif ou nul, on définit a^n par récurrence en posant $a^0 = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $a^n = a(a^{n-1})$. On prendra garde que $a^n b^n$ et $(ab)^n$ sont en général distincts, à moins que a et b ne commutent, c'est-à-dire que l'on ait $ab = ba$.

PROPOSITION 1.1.4 (Formule du binôme). — *Soit A un anneau, soit a et b des éléments de A tels que $ab = ba$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 0$,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. — La démonstration, standard, procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, les deux membres valent 1. Supposons la formule vraie pour n, alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ba^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

puisque $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ pour tout couple d'entiers (n,k). Cela conclut la démonstration par récurrence sur n. □

Un *sous-anneau* B d'un anneau A est un sous-groupe de A pour l'addition qui contient 1 et est stable par la multiplication, de sorte que muni des lois induites par les lois de A, B est un anneau dont les éléments neutres sont encore 0 et 1.

L'intersection d'une famille de sous-anneaux d'un anneau A est un sous-anneau de A.

Soit A un anneau et S une partie de A. L'intersection de tous les sous-anneaux de A qui contiennent S est un sous-anneau de A qu'on appelle le *sous-anneau de A engendré par S*. Si S est de la forme $B \cup T$ où B est un sous-anneau de A, on note aussi $B[T]$ le sous-anneau de A engendré par S. Si les éléments de T commutent deux à deux, le sous-anneau engendré par T dans A est commutatif.

Soit A un anneau. L'ensemble Z des éléments $a \in A$ tels que $ax = xa$ pour tout $x \in A$ est un sous-anneau *commutatif* de A, appelé *centre* de A.

DÉFINITION 1.1.5. — *Soit A et B deux anneaux. Un* homomorphisme *d'anneaux $f : A \to B$ est une application vérifiant les propriétés suivantes*

- *on a $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;*
- *pour tous a et b dans A, on a $f(a+b) = f(a)+f(b)$ et $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Le mot *morphisme* est un synonyme pour homomorphisme. Un endomorphisme d'un anneau A est un homomorphisme de A dans A. Si A est un anneau, l'application

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984). 155-190.

Analysis

FONCTIONS A HESSIEN BORNE

par Françoise DEMENGEL

Cet article a pour objet d'établir quelques propriétés de l'espace des fonctions dont le hessien est une mesure bornée. Cet espace est l'espace naturel pour certains problèmes de mécanique. Il permet de résoudre des problèmes parfaitement plastiques en dimension deux, pour le modèle de Hencky (problème de plaques). Nous renvoyons à [2], [3] pour l'étude des solutions dans l'espace HB du déplacement orthogonal au plan d'une plaque à comportement parfaitement plastique du type de Hencky. Remarquons que cette étude nécessite nombre de résultats énoncés ici. La première partie de l'article présent concerne des propriétés topologiques de l'espace HB. On y montre, entre autres, la compacité relative des bornés de $HB(\Omega)$, pour une topologie dite faible ; on y introduit une topologie intermédiaire entre la topologie faible et la forte, qui sera très utile pour les théorèmes de trace : les traces sont étudiées au paragraphe 2, et nous permettent de donner des théorèmes de prolongement d'une fonction de $HB(\Omega)$ en une fonction de $HB(\mathbf{R}^n)$ à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Au paragraphe 3, on donne les théorèmes d'injection de type Sobolev. En particulier $HB(\Omega)$ est pour $n = 2$ inclus avec injection continue dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$. Remarquons que ce résultat permet de justifier la déformation plastique d'une plaque soumise à une charge ponctuelle, puisque celle-ci est représentable par une mesure de Dirac, qui appartient au dual de $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$. Nous renvoyons à [2], [3] pour plus de précisions sur ce point et pour les questions d'existence de solutions des problèmes variationnels des plaques.

Notations.

Dans ce qui suit on désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ et connexe.

• Dans la plupart des propriétés énoncées, on suppose que Ω a la propriété de cône (cf. Adams [1]); dans d'autres – notamment pour le théorème de continuité – on suppose que Ω est C^2 régulier uniforme, ce qui est évidemment plus fort.

On désigne par $L^p(\Omega)$ (resp. $\mathbf{L}^p(\Omega)$) l'espace des classes de fonctions à valeurs réelles (respectivement à valeurs dans $\mathbf{R}^n$), de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable sur Ω; on désigne par $\mathcal{M}_b(\Omega)$, (resp. $\mathcal{M}_b(\Omega,\mathbf{R}^n)$, resp. $\mathcal{M}_b(\Omega,E)$, l'espace des mesures bornées sur Ω à valeurs réelles, (resp. à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, resp. à valeurs dans l'espace E des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbf{R}^n$). $\mathscr{P}_1(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω à dérivées secondes nulles sur Ω. On note indifféremment $|\ |_p$ la norme sur $L^p(\Omega)$ ou $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $|\ |_T$ la variation totale d'un élément de $\mathcal{M}_b(\Omega)$ ou de $\mathcal{M}_b(\Omega,E)$.

On rappelle maintenant la définition des espaces de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u/D^\alpha u \in L^p(\Omega), [\alpha] \leqslant m\}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n \quad \text{et} \quad [\alpha] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

les dérivées étant prises au sens des distributions, et on note $\|\ \|_{m,p}$ la norme sur $W^{m,p}$, définie par

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leqslant [\alpha] \leqslant m} |D^\alpha u|_p,$$

et qui en fait un espace de Banach.

On rappelle aussi la définition des espaces $BV(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$) utilisés en calcul des variations et en plasticité, étudiés par Giusti [6], Miranda [7], (resp. Strang-Teman [13], Suquet [14]) :

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega), \nabla u \in \mathcal{M}_b(\Omega,\mathbf{R}^n)\},$$

$$BD(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathbf{L}^1(\Omega), \varepsilon(\vec{u}) \in \mathcal{M}_b(\Omega,E)\},$$

où $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$.

On introduit maintenant l'espace des fonctions à hessien borné, noté :

$$\mathrm{HB}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega),\ \nabla\nabla u \in \mathcal{M}_b(\Omega,\mathrm{E})\}$$

et que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{\mathrm{HB}} = |u|_1 + |\nabla u|_1 + |\nabla\nabla u|_{\mathrm{T}}.$$

Remarque. – Lorsque Ω possède la propriété de cône il est aisé de voir que :

$$\mathrm{HB}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \nabla\nabla u \in \mathcal{M}_b(\Omega,\mathrm{E})\}.$$

Ce résultat est conséquence directe du résultat de Deny-Lions [5] :

$$W^{1,1}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{L}^1(\Omega)\},$$

joint au résultat de Strang-Teman [13] :

$$\mathrm{BD}(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varepsilon(u) \in \mathcal{M}^b(\Omega,\mathbf{R}^n)\}.$$

Citons un exemple de fonction de $\mathrm{HB}(\Omega)$ en dimension 2, qui présente un intérêt pour l'étude de la déformation d'une plaque élastoplastique à géométrie simple soumise à une charge concentrée au centre :

Exemple. – Un repère orthonormé de $\mathbf{R}^2$ étant choisi, Ω est le carré $]-1,+1[\times]-1,+1[$, et u est la fonction définie par

$$u(x,y) = (1-|y|)\mathbf{1}_{\{|y|<1,|x|\leqslant|y|\}} + (1-|x|)\mathbf{1}_{\{|x|<1,|y|<|x|\}}$$

($\mathbf{1}_A$ désigne la fonction caractéristique du borélien A).

Les calculs des dérivées secondes de u donnent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\delta_{\{|y|\leqslant 1,x=|y|\}} - \delta_{\{|y|<1,x=-|y|\}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \delta_{\{|x|\leqslant 1,y=x\}} - \delta_{\{|x|<1,y=-x\}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\delta_{\{|x|<1,y=|x|\}} - \delta_{\{|x|\leqslant 1,y=-|x|\}};$$

(où $\delta_{\mathscr{C}}$ désigne la mesure de Dirac distribuée sur la courbe $\mathscr{C}$).

Geometry/Topology

Chapitre VI

Géométrie différentielle des courbes

Sommaire.[1] La géométrie différentielle étudie les propriétés locales et globales des courbes, surfaces (ainsi que leurs analogues en dimension supérieure), qui sont liées à la métrique de l'espace ambient et aux dérivées des équations locales ou des paramétrisations locales des objets considérés. Ainsi, l'existence de cercles osculateurs est une propriété locale des courbes planes régulières (théorème VI.3.1); le théorème des quatre sommets exprime une propriété globales des courbes planes fermées simples (théorème VI.3.16). Les méthodes utilisées reposent sur le calcul différentiel et intégral.
Ouvrages de référence : [1],[4].

Préliminaires Nous utiliserons toujours la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de deux vecteurs $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ s'écrit :

$$\langle v \, , \, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

et alors $\|v\|^2 = \langle v \, , \, v \rangle$.

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, est une fonction dérivable d'une variable, on écrit sa dérivée :

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad .$$

Si $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables, on a :

$$\langle \alpha(t) \, , \, \beta(t) \rangle' = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \cdot \beta_i(t) \Big)' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t) \cdot \beta_i(t) + \alpha_i(t) \cdot \beta_i'(t) = \langle \alpha'(t) \, , \, \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t) \, , \, \beta'(t) \rangle \quad .$$

VI.1 Courbes régulières

Définition VI.1.1. Une courbe paramétrée est une application $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, où $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$. On note $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$, et t est appelé *paramètre.* La dérivée $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t))$ est appelé *vecteur vitesse* et l'image $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ *la trace* de la courbe.

Si $n = 3$, on dit que α est une *courbe dans l'espace.* Si $n = 2$, on dit que α est une *courbe plane.*

Si $c, d \in I$, $c < d$, on appelle $\alpha([c, d])$ l'arc de la courbe compris entre $\alpha(c)$ et $\alpha(d)$.

Exemples VI.1.2.

(1) Le cercle peut être paramétré par $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Son vecteur vitesse est $(-\sin(t), \cos(t))$.

(2) L'hélice est la courbe de l'espace paramétrée par $t \mapsto (a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t), b \cdot t)$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$. Son vecteur vitesse est $(-a \sin(t), a \cos(t), b)$

[1] Version du 8 décembre 2006, à 14h. 07

(3) La courbe plane paramétrée par $t \mapsto (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, est appelée *parabole semi-cubique.* Son vecteur vitesse $(2t, 3t^2)$ s'annulle pour $t = 0$.

(4) La courbe plane $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)$ possède un *point double* : le point $(1, 0)$ est l'image de $t = 1$ et $t = -1$. Son vecteur vitesse $(2t, 3t^2 - 1)$ ne s'annulle jamais.

(5) $\alpha(t) = (t, t^2, \ldots, t^n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une courbe dans $\mathbb{R}^n$.

Définition VI.1.3. On dit que la courbe paramétrique $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est *régulière* si son vecteur vitesse ne s'annulle jamais; en symboles : $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Dans les exemples VI.1.2, (1), (2), (4), (5) sont des courbes régulières; la parabole semi-cubique (3) par contre n'est pas une courbe régulière.

Définition VI.1.4. Soient I et J des intervalles ouverts. On dit que l'application $h : J \to I$ est un difféomorphisme si h est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont l'inverse est aussi $\mathcal{C}^\infty$; si c'est le cas, $h'(u) \neq 0$, $\forall u \in J$, car $h^{-1}(h(u)) = u \Rightarrow (h^{-1})'(h(u)) \cdot h'(u) = 1$.

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique et soit $h : J \to I$ un difféomorphisme. Alors l'application $\beta : J \to \mathbb{R}^n$, $\beta(u) = \alpha(h(u))$ est aussi une courbe paramétrique, qui a la même trace que α. On dit que β est une *reparamétrisation* de α.

Si α est une courbe régulière, alors β l'est aussi, car $\beta'(u) = \alpha'(h(u)) \cdot h'(u)$.

Par exemple, $\beta(u) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u))$ est un reparamétrisation du cercle VI.1.2(1), avec $h(u) = \pi \cdot u$. Par contre, $\gamma(u) = (\cos(u^3), \sin(u^3))$, $u \in \mathbb{R}$, n'est pas une reparamétrisation du cercle; en effet, ce n'est pas une courbe régulière, car $\gamma'(0) = (0, 0)$.

Définition VI.1.5. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique et $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ une reparamétrisation. On dit que α et β définissent la *même orientation* si $h'(u) > 0$, $\forall u \in J$. Sinon on dit qu'elles définissent des orientations opposées.

Par exemple, si $\alpha(t) :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrique, $\alpha(-t) :]-b, -a[\to \mathbb{R}^n$ est une reparamétrisation avec orientation opposée.

VI.1.1 Longueur d'arc

Définition VI.1.6. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique, et soient $t_0, t \in I$. La longueur de l'arc joignant $\alpha(t_0)$ à $\alpha(t)$ est défini comme la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau \tag{1-1}$$

où on rappelle que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2}$. Notons que la fonction que l'on intègre dans (1-1) est positive, et donc si $t_0 < t_1$ cette longueur est positive, sinon elle est négative.

Supposons que $t_0 < t$; la définition précédente est justifié par le fait que si $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = t$ est un partage de l'intervalle $[t_0, t]$, la courbe polygonale obtenue en joignant par des segments de droite $\alpha(\tau_0)$ à $\alpha(\tau_1)$, puis $\alpha(\tau_1)$ à $\alpha(\tau_2)$, et ainsi de suite, est une approximation de l'arc $\alpha([t_0, t])$, tout au moins lorsque la maille du partage $\delta = \inf\{\Delta\tau_i, i = 1, \ldots, N\}$ est suffisamment petit, où $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$. La longueur de cette courbe polygonale vaut

$$\sum_{i=1}^{N} \|\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})\| \tag{1-2}$$

et puisque $\|\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})\|$ est approximé par $\|\alpha'(\tau_i)\| \, \Delta\tau_i$, lorsque la maille δ tend vers zéro, la somme (1-2) tend vers (1-1).

Proposition VI.1.7. *La longueur d'un arc ne change pas après reparamétrisation avec même orientation; sinon, elle change de signe.*

Preuve: Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique et soit $h : J \to I$ un difféomorphisme et $\beta(u) = \alpha(h(u))$ la reparamétrisation correspondante. Soient $t_0, t_1 \in I$, $u_0 = h^{-1}(t_0)$, $u_1 = h^{-1}(t_1)$. La formule de changement de variable dans les intégrales nous donne :

$$\int_{u_0}^{u_1} \|\beta'(u)\| \, du = \int_{u_0}^{u_1} \|\alpha'(h(u))\| \cdot |h'(u)| \, du = \pm \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

où $\pm$ est le signe de $h'(u)$.

q.e.d.

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière et fixons $t_0 \in I$. Posons :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau$$

ce qui représente la longueur de l'arc joignant $\alpha(t_0)$ à $\alpha(t)$, comptée positivement si $t > t_0$, négativement sinon. Remarquons que

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$$

donc $s(t)$ définit un difféomorphisme de I sur un certain intervalle ouvert J. On peut alors reparamétrer la courbe en posant :

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) \quad ;$$

on appelle $\beta(s)$ paramétrisation par la longeur d'arc. Elle jouit des propriété suivantes :

Proposition VI.1.8. *Soit $\beta(s)$ une paramétrisation par la longueur d'arc d'une courbe régulière. Alors :*

(1) $\|\beta'(s)\| = 1$

(2) $\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$

Preuve: En dérivant la relation $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ par rapport à t on trouve

$$\beta'(s(t)) \cdot s'(t) = \alpha'(t)$$

et puisque $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, on en déduit que $\|\beta'(s)\| = 1$. Cette égalité peut aussi s'écrire $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$, et en dérivant cette égalité par rapport à s on obtient que $\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$.

q.e.d.

VI.2 Ordre de contact

On aimerait exprimer le fait que deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (notre cas principal : deux courbes planes) sont proches au voisinage d'un point. On peut le faire en utilisant des paramétrisations et équations locales et leur dérivées.

Définition VI.2.1. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ et $t_0 \in]a, b[$. On dit que f s'annulle à l'ordre m en t_0 si :

$$f(t_0) = 0 \quad , \quad f'(t_0) = 0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f^{m-1}(t_0) = 0 \quad , \quad f^m(t_0) \neq 0 \quad .$$

On note $m = \mu(f, t_0)$ et on l'appelle l'ordre d'annullation de f en t_0.

Notons que si $\mu(f, t_0) = 0$ cela veut dire que f ne s'annulle pas en t_0.

Définition VI.2.2. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière, $t_0 \in I$, $P = \alpha(t_0)$. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $U \ni P$, et $F : U \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $F(P) = 0$, $dF_P \neq 0$, de sorte que F définit une hypersurface contenant P, régulière en ce point. Quitte à remplacer I par un intervalle plus petit de la forme $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, on peut supposer que $\alpha(I) \subset U$. L'ordre de contact de α et F au point P, noté $\mathfrak{o}(F, \alpha, P)$, est défini par :

$$\mathfrak{o}(F, \alpha, t_0) = \mu(F \circ \alpha, t_0) - 1 \quad .$$