French Exam
Spring 2018
Algebra

# GROUPES FINIS ENGENDRÉS PAR DES SYMÉTRIES

(Exposé de P. CARTIER, le 1.4.57)

## 1.- Symétries.

Soit $V$ un espace de dimension finie $n > 0$ sur le corps des nombres réels. Si $S$ est une transformation linéaire involutive de $V$, c'est-à-dire si $S^2 = 1$, nous poserons $E_+ = (S+1)/2$, $E_- = (1-S)/2$ ; on a alors

(1) $$E_+ + E_- = 1 \qquad E_+E_- = E_-E_+ = 0 \qquad S = E_+ - E_-$$

et par suite $E_+$ et $E_-$ sont les projecteurs associés à une décomposition de $V$ en somme directe de sous-espaces $V_+$ et $V_-$ ; on a alors

(2) $$S(x_+ + x_-) = x_+ - x_-$$

pour $x_\pm \in E_\pm$. Les éléments de $E_\pm$ sont caractérisés par la condition $S(x) = \pm x$. Inversement, si $V$ est somme directe des sous-espaces $V_+$ et $V_-$, la formule (2) définit un opérateur involutif.

De plus, si l'on a donné un produit scalaire $(x \mid y)$ sur $V$, pour que l'opérateur $S$ défini par la formule (2) soit orthogonal, il faut et il suffit que l'on ait

$$(x_+ + x_- \mid x_+ + x_-) = (x_+ - x_- \mid x_+ - x_-)$$

soit $(x_+ \mid x_-) = 0$ pour $x_\pm \in V_\pm$ ce qui signifie que les sous-espaces $V_+$ et $V_-$ de $V$ sont orthogonaux.

Nous appellerons symétrie un opérateur linéaire $S$ dans $V$, involutif et dont l'ensemble des points fixes est un hyperplan.

Si l'on s'est donné un produit scalaire $(x \mid y)$ défini positif sur $V$, pour tout $a \in V$ non nul, il existe une symétrie $S_a$ et une seule qui soit une transformation orthogonale et qui applique $a$ sur $-a$. En effet, soit $H_a$ l'hyperplan orthogonal à $a$ ; on devra avoir $V_+ = H_a$ et $V_- = \underline{R}.a$ et la symétrie cherchée sera de la forme $1 - 2E$, $E$ étant le projecteur de $V$ sur la droite $\underline{R}.a$ nul sur $H_a$. Or si $Ex = \lambda a$, on doit avoir $x - \lambda a \in H_a$, i.e. $(x - \lambda a \mid a) = 0$, d'où en résolvant par rapport à $\lambda$, la formule

(3) $$S_a(x) = x - 2(x \mid a)/(a \mid a)$$

Il est clair que la formule (3) définit une symétrie répondant à la question. $S_a$ est la seule transformation orthogonale $\neq 1$ qui induise l'identité sur $H_a$.

## 2.- Systèmes de racines.

L'espace vectoriel $V$ restera fixé jusqu'à la fin de cet exposé.

Nous appèllerons système de racines un ensemble fini $\Delta$ contenu dans $V$ vérifiant les conditions suivantes :

1) L'espace vectoriel $V$ est engendré par $\Delta$.

2) Si $a \in \Delta$, on a $-a \in \Delta$, mais aucun autre vecteur proportionnel à $a$ ne peut appartenir à $\Delta$

3) Pour tout $a \in \Delta$, il existe une symétrie $S_a$ appliquant $a$ sur $-a$ et telle que $S_a \Delta = \Delta$.

Il résulte immédiatement de ces conditions que $0 \notin \Delta$ et que le groupe $G$ d'opérateurs dans $V$ engendré par les symétries $S_a$ est fini. De plus, on définit sur le dual $V^*$ de $V$ un produit scalaire défini positif par la formule :

$$(f \mid g) = \sum_{a \in \Delta} f(a)g(a) \tag{4}$$

Par dualité, on définit donc aussi un produit scalaire $(x \mid y)$ défini positif sur $V$, qui sera invariant par tout opérateur linéaire dans $V$ conservant l'ensemble $\Delta$. En particulier, $S_a$ est la symétrie orthogonale changeant $a$ en $-a$, et c'est donc l'unique transformation linéaire dans $V$ changeant $a$ en $-a$ et conservant $\Delta$. On en déduit $gS_ag^{-1} = S_{g.a}$ pour toute transformation linéaire $g$ conservent $\Delta$.

Les éléments de $\Delta$ seront appelés racines ; on posera $u(a, b) = -2(a \mid b)/(a \mid a)$ pour tout couple de racines $a$, $b$ ; on aura donc :

$$u(a, a) = -2 \tag{5}$$

$$S_a b = b + u(a, b)a \tag{6}$$

## 3.- Racines fondamentales.

Comme l'ensemble $\Delta$ est fini, il existe $x \in V$ tel que l'on ait $(x \mid a) \neq 0$ pour toute racine $a$ ; nous noterons $\Sigma$ l'ensemble des racines $a$ telles que $(x \mid a) > 0$. Les ensembles $\Sigma$ et $-\Sigma$ forment donc une partition de $\Delta$. Nous munirons $V$ de la relation d'ordre (partielle) compatible avec sa structure d'espace vectoriel réel pour laquelle les éléments positifs sont les combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ d'éléments de $\Sigma$. Il est clair que $\Sigma$ est l'ensemble des racines positives.

Considérons l'ensemble $\underline{P}$ des parties $F$ de $\Sigma$ telles que tout élément de $\Sigma$ soit combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ d'éléments de $F$ et soit $\pi$ un élément minimal de l'ensemble $\underline{P}$ ordonné par inclusion. On supposera numérotés les éléments de $\pi$ sous la forme $a_1, a_2, \dots, a_m$ et l'on posera $S_i = S_{a_i}$.
On a alors la proposition fondamentale suivante :

<u>PROPOSITION 1</u> : <u>L'ensemble</u> $\pi$ <u>jouit des propriétés suivantes</u> :

a) $\pi$ <u>est une base de</u> $V$ (donc $m = n$)

b) <u>Toute racine est de la forme</u> $\pm \sum \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \geqslant 0$.

c) <u>Les scalaires</u> $u_{ij} = u(a_i, a_j)$ <u>sont</u> $\geqslant 0$ <u>pour</u> $i \neq j$.

Le b) résulte de la définition de $\pi$ ; remarquons ensuite que l'on ne peut avoir $\lambda_i a_i - \lambda_j a_j \geqslant 0$ avec $\lambda_i, \lambda_j > 0$ et $i \neq j$ ; on aurait en effet dans ce cas $\lambda_i a_i = \lambda_j a_j + \sum \mu_k a_k$. On ne pourrait avoir $\lambda_i \leq \mu_i$, car on en déduirait $\sum \nu_k a_k = 0$ avec $a_k > 0$, $\nu_k \geqslant 0$ et $\nu_j > 0$, ce qui est contradictoire ; on ne peut non plus avoir $\lambda_i > \mu_i$ car il en résulterait $(\lambda_i - \mu_i) a_i = \sum_{k \neq i} \pi_k a_k$ avec $\pi_k \geq 0$, et par suite $a_i$ serait combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ des $a_k$ pour $k \neq i$, ce qui contredirait le caractère minimal de $\pi$.

Comme on a $S_i a_j > 0$ ou $- S_i a_j < 0$, et que $S_i a_j = a_j + u_{ij} a_i$, on déduit c) de ce qui précède.

Comme $\Delta$ engendre $V$, il en est de même de $\pi$, d'après b). Il suffit donc pour prouver a) de montrer que les $a_i \in \pi$ sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, on aurait une relation de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = \sum_{j \in J} \mu_j a_j = u$$

avec $I \cap J = \emptyset$, $\lambda_i, \mu_j > 0$ et $I, J \neq \emptyset$. On a donc $(a_i \mid a_j) \leq 0$ pour $i \in I$ et $j \in J$, et par suite de $\sum \lambda_i \mu_j (a_i \mid a_j) = (u \mid u) \geqslant 0$, on déduit $\lambda_i = \mu_j = 0$, ce qui est contradictoire.

C.Q.F.D.

<u>COROLLAIRE 1</u> : <u>Pour qu'une racine</u> $a > 0$ <u>appartienne à</u> $\pi$, <u>il faut et il suffit qu'elle ne soit pas combinaison linéaire à coefficients</u> $> 0$ <u>de</u> $r \geqslant 2$ <u>racines positives</u>.

Analysis

3 février 1959

# FONCTIONS DE TYPE EXPONENTIEL MINIMUM AYANT DES ZÉROS DONNÉS

par Paul MALLIAVIN

Etant donnée une fonction entière $f(z)$ de type exponentiel (c'est-à-dire telle que $\limsup |z|^{-1} \log|f(z)| < \infty$) quelle est "la plus petite croissance" que peut avoir cette fonction lorsque l'on se donne une partie de l'ensemble de ses zéros ?

Rappelons que la croissance des fonctions de type exponentiel $f(z)$ est étudiée en introduisant la fonction $h(\varphi) = \limsup r^{-1} \log|f(re^{i\varphi})|$ . L'enveloppe de la droite $x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$ est une courbe convexe $\Gamma$, appelée indicateur diagramme de $f(z)$ . $\Gamma$ est l'enveloppe convexe des singularités de la transformée de Borel $F(Z) = \int_0^\infty f(z)\, e^{-Zz} dz$ de $f$ . Si $\Gamma'$ désigne une courbe homologue à $\Gamma$ et située dans le complémentaire de $\Gamma$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} F(Z)\, e^{zZ}\, dZ$$

Le problème que l'on étudiera est le suivant : $\Lambda$ désignant une suite de nombres reels, déterminer la plus petite valeur que peut avoir la longueur de la projection de $\Gamma$ sur l'axe imaginaire (bien entendu $f \neq 0$) . CARLEMAN [1] a montré que

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 2\pi \limsup_{t = \infty} \frac{\lambda(t)}{\log t} ,$$

où $\lambda(t) = \sum \lambda^{-1}$ , $\lambda < t$ , $\lambda \in \Lambda$ .

Cette inégalité n'est pas la meilleure possible. Posons $k_a(t) = \frac{a}{\pi} \log t - \lambda(t)$ Alors W. J. H. FUCHS [2] a montré que si $\lambda - \lambda' > h > 0$ , $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$ et si $\liminf k_a(t) = -\infty$ , alors $h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 2a$ .

Ce résultat est le meilleur possible pour les fonctions de type exponentiel holomorphes dans le demi-plan. Pour les fonctions entières cette évaluation n'est pas la meilleure possible. RUBEL a donné dans [7] une condition nécessaire et suffisante pour que, $\Lambda$ étant une partie des entiers, toute fonction s'y annulant vérifie $h(\frac{\pi}{2}) - h(\frac{\pi}{2}) \geq 2\pi$ . Dans [6] on donne l'évaluation exacte de l'ordre de croissance cherché. On a les énoncés :

THÉORÈMES .

A. Si $f(z)$ est une fonction entière de type exponentiel telle que

$$|f(iy)| < Ae^{a|y|} \text{ , avec } f(\Lambda) = 0$$

Posons
$$\delta(k_a) = \limsup_{x = \infty} \left[k_a(x) - \inf_{x' \geqslant x} k_a(x')\right]$$

Alors si
$$\delta(k_a) = \infty \text{, on a } f(z) \equiv 0 \text{ .}$$

B. Inversement si $\delta(k_a) < \infty$ , on peut construire $f(z) \not\equiv 0$ satisfaisant aux hypothèses de (A) .

On peut donner de (A) la forme plus générale suivante :

A'. Soit $f(z)$ fonction entière de type exponentiel telle que $f(\Lambda) = 0$ ,

$$\log |f(iy)\, f(-iy)| < 2\pi\, yq(y) + O(1) \quad \text{pour} \quad y > 0$$

où $q$ est une fonction vérifiant $xq'(x) = O(1)$ . Posons :

$$k_q(t) = \int_1^t q(u)\ u^{-1}\, du - \lambda(t)$$

Alors si $\delta(k_q) = \infty$ , $f(z)$ est identiquement nul .

La preuve de A' dépend des lemmes suivants :

LEMME 1. - Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel, avec $f(0) = 1$ . Posons

$$M(x) = x^{-1} \log |f(x)|$$

$$M_\alpha = M \times \alpha = \int M\left(\frac{x}{t}\right) \alpha(t)\, \frac{dt}{t}$$

où $\alpha$ est une fonction bornée à support compact. Alors

$$\dot{M}_\alpha(x) = O(1) \text{ .}$$

Ce lemme s'obtient aisément en appliquant la formule de Carleman à $y > 0$ , et à 2 demi-cercles $|z| = R$ , $|z| = kR$ et en utilisant le fait que $M(x) < O(1)$ .

La fonction sous-harmonique $\log|f(z)|$ peut être représentée dans le demi-plan $x > 0$ par la somme d'un potentiel de Green de masses négatives portées par les zéros et d'un potentiel de double couche porté par la frontière. Balayant ces masses sur l'axe $x > 0$, on obtient que $\log|f(x)|$ est égal à un potentiel de Green d'une masse portée par $x > 0$, soit

$$(1) \qquad M(x) = \frac{\log f(x)}{x} = \int_0^{\infty} \left[\log \left| \frac{1 + xt^{-1}}{1 - xt^{-1}} \right| - 2xt^{-1}\right] dm(t) + A$$

où $A$ est une constante. L'expression explicite de $m$ se calcule [5], on obtient

$$(2) \qquad dm = d\rho - d\lambda - d\sigma$$

où $d\sigma$ est une mesure positive obtenue en balayant les masses relatives aux zéros $\notin \Lambda$ et où $d\rho$ est la mesure balayée de la double couche portée par $x = 0$. On a $t\,d\rho = B * C$ où

$$(3) \qquad 2C(y) = y^{-1} \log |f(iy)\, f(-iy)| \quad , \quad B = kt^2(t^2+1)^{-2} \quad ,$$

$k$ étant une constante numérique $> 0$. Une intégration par partie de (1) donne $M(x) = \text{V. P.} \int_0^{\infty} 1\,(xt^{-1})\, m(t)\, t^{-1}\, dt$ où

$$1(t) = t^{-1}\left[\log\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| + \frac{2t}{t^2 - 1}\right]$$

On a le lemme taubérien :

LEMME 2. - Soit $M = 1 * m$ ; si $M_{\chi}(x) = O(1)$, alors

$$m(x) = O(1)$$

Pour obtenir ce lemme on calcule la transformée de Mellin $L$ de $1$ :

$$L(u) = \frac{u}{1 - u} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} u \quad ;$$

$L(u) \neq 0$ si $u$ est imaginaire pur. On ne peut pas appliquer toutefois le théorème taubérien de Wiener, $\lim\limits_{x=\infty} 1 * m$ n'existant pas. On procède directement, l'identité élémentaire $L(u)\, L(1 - u) = 1$ donne que $\tilde{1}(t) = \frac{2}{\pi} t^{-1}\, 1(t^{-1})$ est la noyau inverse de $1$ d'où

$$m * \alpha * \alpha' = \tilde{1}_{\alpha} * M_{\alpha'} = O(1)$$

ce qui avec la condition $dm < d\rho$ entraine le lemme 2 ;

Geometry

EXTENSION DES APPLICATIONS - HOMOTOPIE

(Exposé de J-P. SERRE, le 7.11.1949).

Le présent exposé a pour but de présenter quelques-uns des problèmes relatifs aux applications continues d'un espace dans un autre. Ces problèmes sont fort loin d'être résolus, même pour des espaces aussi simples que les sphères ; les exposés ultérieurs traiteront certains cas particuliers, dus à Hopf, Hurewicz, Pontrjagin, Steenrod ... ; ici, nous nous bornerons à les poser et à donner quelques définitions essentielles.

Nous nous occuperons de deux problèmes, intimement liés d'ailleurs, le problème de l'extension des applications et celui de l'homotopie.

1.- Extension des applications.

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A$ une partie fermée de $X$ et $f$ une application continue de $A$ dans $Y$. Peut-on prolonger $f$ à tout $X$, c'est-à-dire, peut-on trouver une application continue de $X$ dans $Y$ dont la restriction à $A$ soit $f$ ?

Exemples :

1) Toute application constante est prolongeable.

2) Si $Y$ est un intervalle, ouvert ou fermé, et si $X$ est normal, le problème est toujours possible (théorème d'Urysohn. Voir Bourbaki, Topologie IX, page 4).

3) Par contre, soit $X = S^2$, $A$ un cercle de $X$, $Y$ un tore et $f$ un homéomorphisme de $A$ sur un cercle méridien du tore. On verra, en utilisant l'homologie, que $f$ n'est pas prolongeable.

4) Si $A$ est un rétracte de $X$, c'est-à-dire si l'application identique de $A$ sur lui-même est prolongeable en une application continue de $X$ sur $A$, le problème de prolongement est possible quel que soit $Y$ (noter l'analogie avec la notion algébrique de projecteur).

Exemples de rétractes : tout facteur d'un produit direct est rétracte de l'espace entier. Un point, un segment, sont rétractes de tout espace (normal dans le cas du segment) qui les contienne (pour le voir dans le cas du segment on appliquera le théorème d'Urysohn à l'application identique du segment sur lui-même).

Remarque : on n'exige rien d'autre du prolongement que d'être continu. On pourrait fort bien se poser d'autres problèmes, par exemple celui du prolongement des homéomorphismes. Mais on ne sait pratiquement rien en dire (voir thèse d'Antoine).

Conditions homologiques .

Soient $H_n(A)$ , $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ les n-ièmes groupes d'homologie de A , X et Y , à coefficients dans un groupe G (l'homologie pouvant être prise au sens singulier -ce sera le cas le plus fréquent- ou tchéquiste. On pourra aussi utiliser les groupes d'homologie de 2-ème espèce).

On sait que f définit un homomorphisme $f^o$ de $H_n(A)$ dans $H_n(X)$ . Soit $p^o$ l'homomorphisme canonique, défini par l'application canonique p de A dans X , de $H_n(A)$ dans $H_n(X)$ . Si f admet un prolongement g à tout X , on a : $f^o = g^o \circ p^o$ .

D'où la condition nécessaire suivante, pour que le prolongement soit possible : Il doit exister un homomorphisme $g^o$ de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$ tel que : $f^o = g^o \circ p^o$ . En particulier, le noyau de $p^o$ doit être contenu dans celui de $f^o$ . C'est ce qui n'avait pas lieu dans le troisième exemple donné ci-dessus.

Remarques : cette condition nécessaire n'est suffisante que dans des cas très particuliers (par exemple (Hopf) si X est de dimension n + 1 , et si $Y = S^n$ ). On peut donner des conditions analogues en cohomologie, faisant alors intervenir la structure multiplicative ; on peut aussi faire intervenir de nouvelles notions homologiques (produits de Steenrod, par exemple) pour renforcer ces conditions et essayer de les rendre suffisantes pour des classes de plus en plus vastes d'espaces.

2.- Homotopie.

Soit X et Y deux espaces topologiques, f et g deux applications continues de X dans Y ; on dit que f et g sont homotopes s'il existe une application continue F de $X \times I$ dans Y telle que : $F(x , o) = f(x)$ et $F(x , 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$ . (I désigne le segment $[o , 1]$ ) .

On dit aussi que f et g sont continûment déformables l'une en l'autre

On voit aussitôt que l'homotopie est une relation d'équivalence, compatible avec la composition des applications. Ses classes sont dites classes d'homotopie.

L'homotopie peut s'interpréter en termes de connexion d'espace fonctionnel de la façon suivante : supposons que $X$ soit localement compact et munissons l'espace $C(X , Y)$ des applications continues de $X$ dans $Y$ de la topologie de la convergence compacte (Bourbaki, Top. X, page 2). Si $Z$ est un espace localement compact, les applications continues de $Z$ dans $C(X , Y)$ correspondent biunivoquement (et même bicontinûment) aux applications continues de $X \times Z$ dans $Y$. Ceci, appliqué au cas où $Z = I$, montre que :

Si $X$ est localement compact, les classes d'homotopie des applications continues de $X$ dans $Y$ ne sont autres que les composantes connexes par arc de $C(X , Y)$.

Ainsi, l'étude de l'homotopie n'est autre que l'étude de la connexion par arc de l'espace fonctionnel $C(X , Y)$. Dans le même ordre d'idées, on peut étudier la connexion locale de cet espace (voir plus loin), ou bien le groupe fondamental (on est alors conduit, lorsque $X$ est une sphère, aux groupes d'homotopie de $Y$).

## Invariance de l'homologie par homotopie

Soient, comme précédemment, $H_n(X)$, $H_n(Y)$, $f^\circ$ et $g^\circ$. On a :
Si $f$ et $g$ sont homotopes, $f^\circ = g^\circ$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1 de l'exposé 9 de l'an dernier. Deux cycles singuliers, images d'un même cycle de $X$ par $f$ et $g$ sont homologues parce que leur différence est le bord du "prisme singulier" défini par l'homotopie.

Comme pour le problème de l'extension des applications, cette condition "homologique" n'est pas suffisante en général pour que $f$ et $g$ soient homotopes.

## Type d'homotopie

On dit que deux espaces ont même type d'homotopie s'il existe une application continue $f$ de $X$ dans $Y$ et une application continue $g$ de $Y$ dans $X$, telles que : $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'application identique. Cette relation est visiblement une relation d'équivalence dans l'"ensemble" de tous les espaces topologiques (si l'on peut dire ...).