(1) Réaliser les surfaces comme quotient d'un polygone de $\mathbb{R}^2$ à $2n$-cotés par identification des cotés par paires

(2) Simplifier une telle présentation pour se ramener à une forme canonique

4.1 Quotients canoniques de polygones

On commence par décrire les briques fondamentales S^2, P^2, B^2 et T^2 comme des quotients $P/_\sim$, où $P \subset \mathbb{R}^2$ est (topologiquement) un disque fermé. On peut définir T^2, resp. K^2, comme quotient de RR^2 par $\mathbb{Z}^2$ pour les actions $(x,y) \mapsto (x+k, y+l)$, resp. $(x,y) \mapsto (x+k, (-1)^k y + l)$. La restriction de la relation d'équivalence au polygone $P = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ définit le même espace quotient. En effet, lorsque $Y = X/_\sim$ et $A \subset X$ est une partie telle que la projection $p : X \to X/_\sim$ est surjective restreinte à A, on a $Y \approx A/_\sim$.

On peut définir la relation d'équivalence sur P d'une autre manière en procédant comme suit. Labelisons d'une même lettre les cotés qu'on veut identifier (a les deux cotés verticaux de P, b les deux cotés horizontaux). Numérotons $p_0, p_1, \ldots, p_4 = p_0$ les cotés consécutifs de P dans le sens horaire. Il existe exactement deux homéomorphismes linéaires entre le segment $[0,1]$ et un coté donné $p_i p_{i+1} : H_+(t) = (1-t)p_i + tp_{i+1}$ et $H_-(t) = H_+(1-t)$. Munissons chaque coté de P d'une flèche, spécifiant une identification du coté avec $[0,1]$ via H_+ si la flèche est orientée dans le sens horaire, via H_- sinon. Ces données (lettre attribuée au coté + orientation) sont décrites de manière non ambigue par le *symbole*, mot formé des lettres successives des cotés de P (lues dans le sens horaire à partir de p_0), munies de l'exposant -1 si la flèche correspondante est anti-horaire. Par exemple :

$$\text{Tore} : aba^{-1}b^{-1} \qquad \text{Bouteille de Klein } abab^{-1}.$$

On définit la relation d'équivalence sur P de la manière suivante :

- tout point intérieur à P n'est équivalent qu'à lui même.
- les points de deux cotés ayant même lettre sont équivalents si identifiés au même point de $[0,1]$

On peut vérifier (exercice) que la relation d'équivalence ainsi définie coincide avec celle définie plus haut. L'espace projectif P^2 est

$$P^2 \approx S^2/(x \sim -x) \approx S^2_+/(x \sim -x) \approx \bar{D}/(x \sim -x \, sur \, \partial \bar{D})$$

où $D = D_{\mathbb{R}^2}(0,1)$, $\bar{D} = \overline{D_{\mathbb{R}^2}(0,1)}$. On décide que $P = \bar{D}$ est un polygone à 2 cotés, qu'on appelle 2-gone, définis par les sommets $p_0 = (1,0) = e^{i0}$, $p_1 = (-1,0) = e^{i\pi}$, $p_2 = p_0$ (par exemple). L'identification de $[0,1]$ avec le coté $p_i p_{i+1}$ se fait via $t \mapsto p_i e^{-\pi t}$ (dans le sens horaire). Le symbole du projectif est alors aa.

De même la sphère peut être obtenue en quotientant le disque $P = \bar{D}$ à l'aide du symbole aa^{-1} (la relation d'équivalence est $(x,y) \sim (-x,y)$ sur ∂P, et on construit facilement $f : P \to S^2$ continue, donc fermée entre ces deux compacts, qui passe au quotient en un homéomorphisme $\bar{f} : D/\sim \to S^2$).

French - Algebra

Introduction

Rappelons une question classique :

Question 0.1. — La classe des groupes kählériens [1] coïncide-t-elle avec celle des groupes projectifs ?

Nous démontrons ci-dessous le résultat partiel suivant :

Théorème 0.2. — *Si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image d'une représentation linéaire d'un groupe kählérien $\pi_1(X)$, il existe une variété projective complexe lisse X' et un sous-groupe d'indice fini de G qui est l'image d'une représentation linéaire de $\pi_1(X')$. En particulier, un groupe kählérien linéaire est virtuellement projectif.*

La motivation initiale de la question 0.1 est le *problème de Kodaira* : une variété kählérienne compacte est-elle toujours déformation d'une variété projective complexe lisse ? Une réponse affirmative [2] à ce problème impliquerait en particulier qu'une variété kählérienne compacte est toujours difféomorphe à une variété projective, et une réponse affirmative à la question précédente. Les contre-exemples fournis par C. Voisin ([Voi04], [Voi06]) concernent cependant l'aspect biméromorphe du problème, et conduisent à le reformuler seulement pour les modèles minimaux (en général singuliers) des variétés kählériennes compactes à fibré canonique pseudo-effectif [3]. Puisque le passage au modèle minimal n'affecte pas le groupe fondamental, cette reformulation du problème de Kodaira n'affecte pas non plus la conjecture de coïncidence des groupes kählérien avec leurs analogues projectifs.

La démonstration du théorème 0.2 consiste à se ramener, grâce au théorème 0.3 ci-dessous, établi dans [CCE13], au cas où X est munie d'une submersion holomorphe dont les fibres sont des tores, sur une variété complexe projective lisse Y.

Théorème 0.3. — *Soit Z une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(Z) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ une représentation linéaire de son groupe fondamental. Quitte à remplacer Z par un revêtement étale fini, la variété de Shafarevich $\mathrm{Sh}_\rho(Z)$ associée à ρ est (biméromorphe à) une variété kählérienne compacte X qui est l'espace total d'une fibration lisse en tores sur une variété de type général*

$$Z \xrightarrow{sh_\rho} X \simeq \mathrm{Sh}_\rho(Z) \xrightarrow{s_\rho} B \simeq S_\rho(Z).$$

Nous renvoyons à [CCE13] pour les notions utilisées ci-dessus. La variété X est biméromorphe à la variété de Shafarevich de Z, obtenue à partir de Z en contractant les sous-variétés sur le π_1 desquelles ρ est triviale. Les tores de la submersion $X \to S_\rho(Z)$ sont les sous-variétés maximales sur le π_1 desquelles ρ a une image abélienne dans G.

1. Un groupe de présentation finie est dit *kählérien* (resp. *projectif*) s'il peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte (resp. projective lisse).

2. Connue en dimensions 1 et 2 (Kodaira).

3. Ces modèles minimaux sont les espaces kählériens compacts à singularités terminales et fibré canonique semi-ample. Lorsque K_X n'est pas pseudo-effectif, X devrait être uniréglée et le quotient rationnel ramènerait le calcul du groupe fondamental au cas où K_X est pseudo-effectif.

French-Analysis

6 FONCTIONS CONTINUES

En analyse, le continu peut être défini à partir du discret.

6.1 La notion de continuité

Théorème 25 *Soient* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a, b[$. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *pour toute suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de l'intervalle* $]a, b[$ *distincts de* x_0,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \quad \textit{entraîne} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L;$$

2. *à chaque* $\epsilon > 0$ *correspond* $\delta > 0$ *tel que*

$$x \in]a, b[\quad \textit{et} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{entraînent} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Démonstration.

Le second énoncé implique le premier. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de l'intervalle $]a, b[$ distincts de x_0 telle que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0.$$

Il faut vérifier qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in]a, b[\quad \text{et} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{entraîne} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

À ce nombre $\delta > 0$ correspond un indice n_δ tel que $n > n_\delta$ implique

$$0 < |x_n - x_0| < \delta.$$

On aura donc $|f(x_n) - L| < \epsilon$ dès que $n > n_\delta$ ce qui montre que $f(x_n) \to L$.

Le premier énoncé implique le second. Supposons en fait que la deuxième assertion est fausse et montrons qu'alors la première est fausse elle aussi. Nous supposons donc qu'il existe $\epsilon > 0$ pour lequel, quelque soit $\delta > 0$, on peut trouver au moins un point $x = x(\delta) \in]a, b[$ pour lequel on a simultanément

$$0 < |x(\delta) - x_0| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x(\delta)) - L| \geq \epsilon.$$