

From Prachar, Primzahlverteilung

is	Seite
.....	370
andtes	370
ihen	373
.....	376
hilfssätze	382
dnung	386
.....	393
LÖF	395
.....	397
.....	400
IRICHLET	404
und Integration	405
.....	406
.....	408
.....	414

Einleitung

1. Es ist wohl nicht ganz sicher, wann zum erstenmal in der Geschichte der Mathematik der Begriff der Primzahl aufgetaucht ist: Eine Primzahl ist eine von Eins verschiedene, positive, ganze Zahl, welche nur durch Eins und durch sich selbst teilbar ist. Daß die Folge der so definierten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... nicht abbricht, daß es also unendlich viele Primzahlen gibt, hat, soviel wir wissen, als erster EUKLID bewiesen. Aber es wird wohl auch schon vor EUKLID in verschiedenen Kulturkreisen Menschen gegeben haben, welche einiges über die Eigenschaften der Primzahlen wußten. So war z. B. der FERMATSche Satz, daß für jede Primzahl p und jedes ganze a stets $a^p - a$ durch p teilbar ist, vermutlich schon den alten Chinesen bekannt.

Auf genauere Untersuchungen über die *Verteilung* der Primzahlen stoßen wir nach EUKLID erst wieder bei EULER (1744), welcher z. B. bewies, daß die über alle Primzahlen erstreckte Reihe $\sum 1/p$ divergent ist, woraus insbesondere wieder folgt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. EULER bemerkte auch, daß es „unendlich viel weniger“ Primzahlen gibt als natürliche Zahlen, d. h., wenn für $x > 0$ mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ bezeichnet wird, daß der Quotient $\pi(x)/x$ mit nach Unendlich wachsendem x gegen Null strebt. Dies wurde jedoch erst später von LEGENDRE einigermaßen streng nachgewiesen.

In der Untersuchung der Funktion $\pi(x)$, also der Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x , besteht das Hauptproblem der Theorie der Verteilung der Primzahlen.

Schon die Betrachtung einer größeren Anzahl von Gliedern der Folge der Primzahlen läßt es unwahrscheinlich erscheinen, daß es eine elementare Funktion gibt, durch welche man $\pi(x)$ für alle ganzen $x > 0$ darstellen kann. Denn das Wachstum von $\pi(x)$ geht sehr unregelmäßig vor sich. Man versuchte daher, einfache Näherungsfunktionen für $\pi(x)$ zu finden. LEGENDRE vermutete 1798, daß sich $\pi(x)$, dividiert durch $\frac{x}{\log x}$, für $x \rightarrow \infty$ dem Grenzwert Eins nähert (log bedeutet stets den natürlichen Logarithmus), daß also, grob gesprochen, für großes x der $\log x$ -te Teil aller natürlichen Zahlen aus Primzahlen besteht. Er vermutete, daß genauer $\pi(x) = x/\{\log x - B(x)\}$ gilt, wo-

bei $B(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen eine Konstante $B = 1,083\dots$ strebt. Schon vor LEGENDRE hatte GAUSS (wahrscheinlich 1792 oder 1793) eine noch weitergehende Vermutung, nämlich, daß $\pi(x)$ durch die Funktion

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\log \xi} = li x - C, \quad C = li 2 = 1,04\dots$$

mit einem „viel kleineren“ Fehler angenähert wird als durch die Funktion $x/\log x$. (Der Quotient beider Funktionen strebt für $x \rightarrow \infty$ gegen Eins, wie man unschwer beweist.) Aus der Richtigkeit der letzteren Vermutung würde, wie man ebenfalls ohne große Mühe erkennen kann, folgen, daß in LEGENDRES Formel $\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = B = 1$ ist, daß also ein Teil der LEGENDRESchen Vermutung falsch ist. Genauere Resultate in dieser Richtung wurden allerdings erst von TSCHEBYSCHEFF (1851 und 1852) erzielt. Er zeigte: Wenn der Grenzwert von $\pi(x) : \frac{x}{\log x}$ für $x \rightarrow \infty$ existiert, so muß er Eins sein. Er zeigte sogar genauer: Bei beliebig großen $A > 0$ und beliebig kleinem $\delta > 0$ gibt es oberhalb jeder noch so großen Schranke Werte von x mit

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{d\xi}{\log \xi} < \delta \frac{x}{\log^A x}$$

und (eventuell hiervon verschiedene) Werte von x mit

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{d\xi}{\log \xi} > -\delta \frac{x}{\log^A x},$$

d. h., es ist

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left\{ \pi(x) - \int_2^x \frac{d\xi}{\log \xi} \right\} \cdot \log^A x \geq 0,$$

und der entsprechende untere Limes ist ≤ 0 , für beliebig großes festes A . TSCHEBYSCHEFF konnte weiter zeigen, daß bei passenden Konstanten a , A mit $0 < a < 1 < A$ für alle genügend großen x

$$\frac{a}{\log x} < \pi(x) < A \frac{x}{\log x}$$

ist (für die Konstanten fand TSCHEBYSCHEFF $a = 0,92129\dots$, $A = 1,0555$).

¹ li x ist der durch

$$li x = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x \right) \frac{d\xi}{\log \xi} \quad (x > 1)$$

definierte Integrallogarithmus.

Aus allen diesen Resultaten folgt noch nicht, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) : \frac{x}{\log x}$ existiert, sondern nur, daß dieser Limes Eins ist, falls er existiert, und daß jedenfalls der untere Limes $\geq a$ und der obere Limes $\leq A$ ist (und auch daß LEGENDRES Vermutung nur mit $B = 1$ richtig sein kann).

2. Erst mit den von RIEMANN geschaffenen Hilfsmitteln gelang es zu beweisen, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 1$$

ist. Dies ist der Inhalt des sogenannten Primzahlsatzes. RIEMANN betrachtete die Funktion $\zeta(s)$ einer komplexen Veränderlichen, welche für jedes s mit Realteil > 1 durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

gegeben ist (wobei das Produkt über alle Primzahlen läuft). Nun hatten zwar DIRICHLET, TSCHEBYSCHEFF und vorher schon EULER diese Funktion ebenfalls benutzt (insbesondere wurde die Identität von Reihe und Produkt von EULER erkannt). Von ihnen wurde diese Funktion jedoch fast ausschließlich nur für reelles s betrachtet. RIEMANN zeigte, wie man durch Anwendung der Methoden der komplexen Funktionentheorie auf die Untersuchung von $\zeta(s)$ neue, tiefliegende Resultate über die Verteilung der Primzahlen erhalten kann.

Die Funktion $\zeta(s)$ ist bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ (mit Residuum 1) in der ganzen s -Ebene regulär und genügt, wie RIEMANN zeigte, einer Funktionalgleichung, welche es erlaubt, aus dem Wert von $\zeta(s)$ den Wert der ζ -Funktion an der Stelle $1 - s$ zu berechnen. Es stellt sich heraus, daß die Nullstellen von $\zeta(s)$ in dem Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$, $\sigma = \Re s$ eine beherrschende Rolle in vielen Fragen der Primzahltheorie spielen. RIEMANN gab eine Formel an, welche $\pi(x)$ (genauer: gewisse mit $\pi(x)$ verwandte Funktionen) als Funktion von x und den Nullstellen von $\zeta(s)$ in diesem Streifen darstellt. Ferner gab er für die Anzahl solcher Nullstellen mit $-T \leq s \leq T$ die Näherungsformel

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + o(T)$$

für große T , wobei $o(T)$ höchstens die Größenordnung $\log T$ hat.

Diese RIEMANNschen Resultate wurden erst 1894 von v. MANGOLDT streng bewiesen, nachdem HADAMARD seine Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung entwickelt hatte.

Der Primzahlsatz selbst, dessen Beweis — wie sich herausstellt — als schwierigsten Teil den Nachweis erfordert, daß auf der Geraden $\Re s = \sigma = 1$ keine Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen, wurde erst 1896 von HADAMARD und (unabhängig davon) von DE LA VALLEE-POUSSIN bewiesen — unter Benutzung der HADAMARDSCHEN Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. DE LA VALLEE-POUSSIN bewies dann sogar die genauere Beziehung

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + R(x)$$

für genügend großes x , mit $|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 \sqrt{\log x}}$, einem Fehler, der (für großes x) kleiner ist als $x/\log^4 x$ für beliebig großes, festes A . Damit war gezeigt, daß die Funktion

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + C \quad (C = \operatorname{li} 2 = 1,04\dots)$$

eine „sehr gute“ Näherung für die Funktion $\pi(x)$ liefert.

Der Beweis für diese Tatsachen wurde von LANDAU später stark vereinfacht und insbesondere von der HADAMARDSCHEN Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung unabhängig gemacht.

Die Tatsache, daß der Beweis des Primzahlsatzes nur auf dem Umweg über die Verwendung komplexer Funktionentheorie möglich war, hatte viele Bemühungen zur Folge, einen „rein reellen“ Beweis dieses Satzes zu finden. Diese Bemühungen blieben jedoch bis 1948 vergeblich; erst in diesem Jahr gelang es P. ERDŐS und A. SELBERG mit Hilfe einer von A. SELBERG gefundenen Beziehung, einen „reellen“ Zugang zum Beweis des Primzahlsatzes zu finden.

Die DE LA VALLEE-POUSSINSCHEN Abschätzung des Fehlers $R(x)$

bei der Approximation von $\pi(x)$ durch $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ (welche bis heute ohne Verwendung der komplexen Funktionentheorie nicht hergeleitet werden konnte) war lange Zeit das beste in dieser Richtung bewiesene Resultat. Durch Verwendung einer von WEYL stammenden Methode zur Abschätzung trigonometrischer Summen der Form $\sum_{i=1}^n e^{2\pi i f(i)}$,

wobei $f(n)$ ein Polynom in n ist und n eine Reihe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durchläuft, gelang es LITTLEWOOD 1924, für $R(x)$ die bessere Abschätzung $|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 \sqrt{\log x \log \log x}}$ zu beweisen. 1935 entwickelte VINOGRADOV eine neue, sehr komplizierte Methode zur Abschätzung trigonometrischer Summen. Mit dieser Methode konnte TSCHUDAKOFF zeigen, daß (für großes x) $|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 (\log x)^2}$

gilt für ein a mit $\frac{1}{2} < a < 1$ (TSCHUDAKOFF zeigte dies für jedes solche a mit $a < \frac{1}{2} + \frac{1}{42}$). Mit verschiedenen Verbesserungen der VINOGRADOV'SCHEN Methode, deren bisher wirkungsvollste von VINOGRADOV selbst stammt und von HUA sehr vereinfacht wurde, konnte das a in dieser Abschätzung noch vergrößert werden. Das beste bisher gefundene Resultat ist

$$|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 \lambda(x)}, \quad \lambda(x) = c_2 \frac{\log^{\frac{1}{2}} x}{(\log \log x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Es wurde von TARUZAWA aus dem Resultat von HUA abgeleitet.

3. Schon LEGENDRE hatte den Satz aufgestellt, daß in jeder arithmetischen Reihe $l, l+k, l+2k, \dots$ ($k \geq 1$ ganz, l zu k teilerfremd) unendlich viele Primzahlen vorkommen. Dies konnte jedoch erst von DIRICHLET 1837 bewiesen werden. Er benützte dazu gewisse zur Funktion $\zeta(s)$ analoge, der Zahl k zugeordnete Funktionen, die L -Funktionen, welche für $\Re s > 1$ durch

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

gegeben sind, wobei $\chi(n)$ ein sogenannter Charakter zum Modul k ist. Die Theorie der DIRICHLET'SCHEN L -Funktionen hat sich inzwischen zu einem der wichtigsten Hilfsmittel der Primzahltheorie entwickelt. Sei $\pi(x, k, l)$ die Anzahl der Primzahlen p , $p \leq x$, für die $p \equiv l \pmod{k}$ ist. Mit Hilfe der Theorie der DIRICHLET'SCHEN L -Funktionen bewies DE LA VALLEE-POUSSIN den *Primzahlsatz für die arithmetische Reihe*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x, k, l) \frac{x}{\varphi(k) \log x} = 1,$$

welcher, grob gesprochen, aussagt, daß in jeder der $\varphi(k)$ zu k teilerfremden Restklassen \pmod{k} , „gleich viele“ Primzahlen liegen. Er zeigte sogar:

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + R(x, k, l)$$

mit $|R(x, k, l)| < c_1 x e^{-c_2 \sqrt{\log x}}$, wobei $c_1 = c_1(k)$, $c_2 = c_2(k)$ positive Konstanten sind. Für den Beweis dieser Formel ist es nötig, die Nullstellen der Funktionen $L(s, \chi)$ in Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ ($\sigma = \Re s$) wie die Nullstellen von $\zeta(s)$ bei der Untersuchung von $\pi(x)$.

In der letzten Formel hängt die Abschätzung des „Fehlers“ $R(x, k, l)$ außer von x noch von k ab. Es ist ein schwieriges Problem,

tsverzeichnis.

	Seite
L. Nordheim in Göttingen. Über die	1
driß der Mengerschen Dimensionstheorie .	64
zu	308
nation rigoureuse des ondes permanentes	
paration de deux liquides de profondeur	582
geschlossene Kurven und unzerlegbare	399
ethode der Differenzgleichungen zur	
vertproblemen	107
nfangswertproblem einer hyperbolischen	
gleichung zweiter Ordnung mit zwei	179
tingen. Über die Eindeutigkeit und das	
eim Anfangswertproblem linearer hyper-	192
Flächen vom Maximalindex	657
D. Hilbert in Göttingen. Über die	1
as Kreisproblem	717
Neumann in Göttingen. Über die	1
e de Whittaker sur l'existence d'une	
e conservatif à n degrés de liberté . .	576
eparierbare Systeme in der Wellen-	749
Klassenzahlen der reellen quadratischen	
ten unter 12000 und zwischen	745
.000	309
Zerlegung von Dreieckspolyedern in	737
nz von e und π	313
itig affinparallele Kurven und Flächen	684
eometrisches Gegenstück zu den Ro-	281
orie der fastperiodischen Funktionen	637
ension nicht abgeschlossener Mengen	296
enhängende Kontinua. (Aus dem	89
ndroff)	273
skau. Über nulldimensionale Punkt-	616
.	
Differentialsystemen mit unendlich	273
i Physik	616

Über die Grundlagen der Quantenmechanik.

Von

D. Hilbert, J. v. Neumann und L. Nordheim in Göttingen.

§ 1.

Einleitung.

Die neuere Entwicklung der Quantenmechanik, die an die Arbeiten von Heisenberg¹⁾, Born und Jordan einerseits und Schrödinger²⁾ andererseits anknüpft, hat es ermöglicht, das ganze Gebiet der Atomerscheinungen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen und die wichtigsten Beobachtungsergebnisse zu erklären, so daß man kaum noch zweifeln kann, in ihr einen Gedankenkomplex von gleicher Bedeutung wie etwa die klassische Mechanik oder Elektrodynamik gefunden zu haben. Bei dieser hohen Bedeutung der Quantenmechanik ist es ein dringendes Bedürfnis, ihre Prinzipien so klar und allgemein wie möglich zu erfassen. Hier hat nun Jordan³⁾ im Anschluß an eine Idee von Pauli⁴⁾ eine Formulierung und Begründung der Theorie gegeben, die von großer Allgemeinheit ist und dem physikalischen Charakter der zu grunde liegenden Erscheinungen sehr gut angepaßt erscheint. Unabhängig von Jordan ist Dirac⁵⁾ zu ähnlichen Anschauungen gelangt.

Die vorliegende Abhandlung ist aus einer Vorlesung hervorgegangen, die D. Hilbert im Wintersemester 1926/27 über die neuere Entwicklung der Quantenmechanik hielt, und deren Vorbereitung mit wesentlicher Hilfe von L. Nordheim geschah. Wichtige Stücke der mathematischen Durch-

¹⁾ S. z. B. W. Heisenberg, Math. Annalen 95 (1926), S. 683.

²⁾ E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927.

³⁾ P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 40 (1927), S. 204 und Gött. Nachr. 1926, S. 162. Die formalen Zusammenhänge sind zum Teil auch unabhängig von F. London. Zeitschr. f. Phys. 40 (1926), S. 193 gefunden worden.

⁴⁾ W. Pauli jr., Zeitschr. f. Phys. 41 (1927), S. 21.

⁵⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Royal Soc. (A), 113 (1927), S. 621.

führung rühren von J. v. Neumann her. Die endgültige Abfassung dieser Abhandlung hat L. Nordheim besorgt. Wir glauben, daß die Formulierung der Jordanschen und Diracschen Gedanken, zu der wir hier gelangt sind, erheblich einfacher und daher durchsichtiger und leichter verständlich geworden ist.

Der physikalische Grundgedanke der ganzen Theorie besteht darin, daß an Stelle von strengen funktionalen Beziehungen der gewöhnlichen Mechanik überall Wahrscheinlichkeitsrelationen treten.

Die Art dieser Relationen wird am besten durch ein besonders wichtiges Beispiel erklärt. Ist der Wert W_n der Energie des Systems bekannt, und zwar gleich dem n -ten Eigenwert eines gequantelten Systems, so ist nach Pauli

$$|\psi_n(x)|^2$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß die Koordinate des Systems einen Wert zwischen x und $x + dx$ hat, wenn ψ_n die zu dem Eigenwert W_n gehörige Eigenfunktion bedeutet.

Allgemein wird verlangt, daß zwischen zwei verschiedenen mechanischen Größen F_1 und F_2 stets eine solche Wahrscheinlichkeitsbeziehung besteht. Unter mechanischer Größe verstehen wir hierbei Dinge wie Entfernungen, Bahnradius, Energie, Impuls, d. h. Größen, die in der gewöhnlichen Mechanik Funktionen einer mechanischen Koordinate q und des zu ihr kanonisch konjugierten Impulses p sind.

Wir beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad. Jedoch ist diese Beschränkung keineswegs wesentlich, und es lassen sich Systeme mit mehreren Freiheitsgraden ganz analog behandeln. Auf die Wahl des Koordinatensystems kommt es ferner, wie sich herausstellen wird, nicht an.

Der Weg, der nun zu dieser Theorie führt, ist folgender: Man stellt gewisse physikalische Forderungen an diese Wahrscheinlichkeiten, die durch unsere bisherigen Erfahrungen und Entwicklungen nahe gelegt sind, und deren Erfüllung gewisse Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten erfordern. Dann sucht man zweitens einen einfachen analytischen Apparat, in dem Größen auftreten, die genau dieselben Relationen erfüllen. Dieser analytische Apparat, und damit die in ihm auftretenden Rechengrößen, erfahren nun auf Grund der physikalischen Forderungen eine physikalische Interpretation. Das Ziel ist dabei, die physikalischen Forderungen so vollständig zu formulieren, daß der analytische Apparat gerade eindeutig festgelegt wird. Dieser Weg ist also der einer Axiomatisierung, wie sie z. B. in der Geometrie durchgeführt worden ist. Durch die Axiome werden die Relationen zwischen den geometrischen Gebilden, wie Punkt, Gerade,

Ebene, beschrieben, und dann gezeigt, daß diese Relationen gerade ebenso bei einem analytischen Apparat, nämlich den linearen Gleichungen erfüllt sind. Dadurch kann man wieder umgekehrt aus den Eigenschaften der linearen Gleichungen geometrische Sätze gewinnen.

Genau so ordnet man in der neuen Quantenmechanik formal nach einer bestimmten Vorschrift jeder mechanischen Größe ein mathematisches Gebilde als Repräsentanten zu, das zunächst eine reine Rechengröße ist, aus der man aber Aussagen über die Repräsentanten anderer Größen, und dann durch Zurückübersetzung Aussagen über wirkliche physikalische Dinge erhalten kann.

Solche Repräsentanten sind die Matrizen in der Heisenbergschen, die q -Zahlen in der Diracschen und die Operatoren in der Schrödingerschen Theorie und ihrer jetzigen Weiterbildung.

Es ist also zu beachten, daß wir zwei ganz verschiedene Klassen von Dingen betrachten, nämlich einerseits die meßbaren Zahlenwerte physikalischer Größen und andererseits die ihnen zugeordneten Operatoren, mit denen lediglich nach den Regeln der Quantenmechanik gerechnet wird.

Das oben angedeutete Verfahren der Axiomatisierung wird nun in der Physik gewöhnlich nicht genau so befolgt, sondern der Weg zur Aufstellung einer neuen Theorie ist, wie in der Regel, so auch hier, folgender.

Man mutmaßt meistens den analytischen Apparat, bevor man noch das vollständige Axiomensystem aufgestellt hat, und kommt dann erst durch die Interpretation des Formalismus zur Aufstellung der physikalischen Grundrelationen. Es ist schwer, eine solche Theorie zu verstehen, wenn man diese beiden Dinge, den Formalismus und seine physikalische Interpretation, nicht scharf genug auseinandertrennt. Diese Scheidung soll hier möglichst deutlich durchgeführt werden, wenn wir auch, dem jetzigen Zustand der Theorie entsprechend, noch nicht eine vollständige Axiomatik begründen wollen. Das, was jedenfalls eindeutig festliegt, ist der analytische Apparat, der — rein mathematisch — auch keiner Abänderung fähig ist. Was dagegen modifiziert werden kann, und voraussichtlich auch noch werden wird, ist die physikalische Interpretation, bei der eine gewisse Freiheit und Willkür besteht.

Durch die Axiomatisierung verlieren die vorher etwas vagen Begriffe, wie Wahrscheinlichkeit und so weiter, ihren mystischen Charakter, da sie dann durch die Axiome implizit definiert sind.

Theorie der Zöpfe.

Von EMIL ARTIN in Hamburg.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen sind als ein Ansatz zu einem Wege gedacht, dem Studium der Knoten und Verkettungen näher zu kommen. Es handelt sich um eine Kennzeichnung einfacherer topologischer Gebilde, der Zöpfe. Dabei ist unter einem Zopf im wesentlichen ein Geflecht aus Fäden zu verstehen, wie schon der Name sagt. Die Zöpfe geben Anlaß zu einer Gruppe, da man aus zwei von ihnen durch „Aneinanderhängen“ einen dritten komponieren kann. Die Konstruktion dieser Gruppe ist einfach genug, um mit einem finiten Verfahren die Entscheidung zu ermöglichen, ob zwei vorgelegte Zöpfe sich ineinander deformieren lassen oder nicht. Schlicht man einen Zopf, verknüpft man also Anfang und Ende, so entsteht eine Verkettung. Umgekehrt läßt sich auch jede Verkettung in diese Gestalt bringen. Von hier aus bis zum Knotenproblem ist aber noch ein weiter Weg. Immerhin gestalten bereits die gewonnenen Resultate, Aussagen über die Verkettungen, vor allem über ihre Fundamentargruppe, zu machen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn O. SCHREIER, der mich bei der Abfassung dieser Arbeit tatkräftig unterstützt hat, insbesondere auch bei den langwierigen Rechnungen, mit denen wir zunächst durchzukommen hofften. Seine Hilfe kam mir besonders beim Beweis von Satz 9 zustatten.

§ 2. Komposition und Gruppenezeugende.

Unter einem Zopf Z von n^{ter} Ordnung verstehen wir folgendes topologisches Gebilde:

Im Raum sei ein Rechteck mit Gegenseiten g_1, g_2 bzw. h_1, h_2 (der „Rahmen“ von Z) vorgelegt. Auf jeder der beiden Seiten g_1 und g_2 seien n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n bzw. B_1, B_2, \dots, B_n gegeben, wobei der Sinn der Numerierung von h_1 nach h_2 laufe. Jedem Punkte A_i sei eindeutig ein Punkt B_i zugeordnet, mit dem er durch eine doppelpunkt-freie Raumkurve μ_i verbunden ist, die keine andere Kurve μ_k schneidet. Die Kurve μ_i erhalte noch die Orientierung von A_i nach B_i . Zwei solche Zöpfe heißen äquivalent oder kürzer gleich, wenn sie sich ineinander ohne Selbstdurchdringung deformieren lassen. Bei dieser Deformation betrachte man auch die Verlängerungen von g_1 und g_2

als undurchdringlich. Man beachte die beiden Orientierungen, die im Zopf liegen. Die erste betrifft die Numerierung der Punkte A_i , die zweite den Sinn der Kurve μ_i . Bei der Deformation hat man auf diese Orientierungen Rücksicht zu nehmen.

Diese Definition werde nun eingeeignet durch die weitere Forderung: Nach passender Deformation von Z sollen die Projektionen der Kurven μ_i auf die Ebene des Rahmens ganz im Innern des Rechtecks laufen, sich nur in endlich vielen Punkten schneiden und

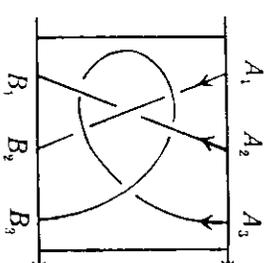


Fig. 1.

mit einer zu g_1 parallelen Geraden nur einen Punkt gemein haben. Da man dreifache Punkte durch leichte Abländerung in Doppelpunkte auflösen kann, wollen wir auch noch annehmen, daß bei der Projektion nur einfache Schnittpunkte auftreten. Schematisch wird sich dann ein Zopf durch eine Zeichnung repräsentieren lassen, wie sie in Fig. 2 zur Darstellung gebracht ist. In Fig. 1 ist als Beispiel ein Geflecht gezeichnet, das wir nicht als Zopf betrachten werden. Im weiteren Verlauf denken wir uns die Zöpfe gleich in einer solchen „Normalgestalt“ gegeben.

Aus zwei Zöpfen Z_1 und Z_2 von n^{ter} Ordnung kann durch Komposition ein dritter gebildet werden, indem man durch Deformation der

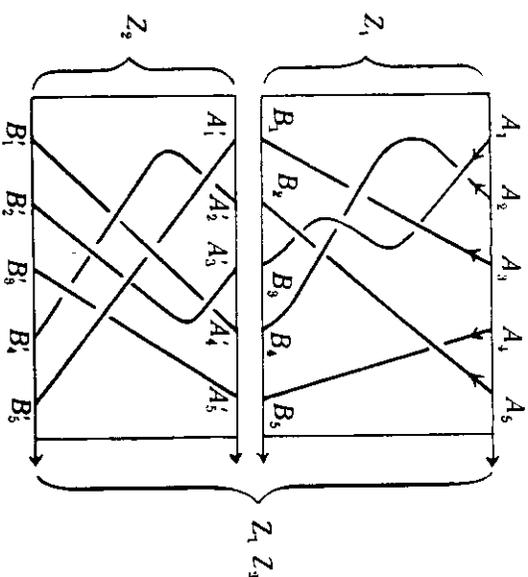


Fig. 2.

Normalgestalten der beiden Rechtecke in einer Ebene so aneinanderlegt, daß die Seite g_2 von Z_1 an g'_1 von Z_2 anstößt, die Punkte B_i von Z_1 mit den Punkten A'_i von Z_2 zusammenfallen und h'_2 in die Verlängerungen von h_1 und h_2 fallen. Sodann löse man die Gerade $g_2 = g'_1$. Das Resultat ist ein neuer Zopf, den wir mit $Z_1 Z_2$ bezeichnen. Der Zopf $Z_1 Z_2$ wird also kurz gesagt durch Aneinanderhängen der beiden Zöpfe Z_1 und Z_2 erhalten. In Fig. 2 ist dies andeutungsweise wiedergegeben. Man achte dabei wieder auf die Orientierungen. Wir erwähnen noch ausdrücklich, obwohl dies schon

aus den Definitionen hervorgeht, daß bei diesem Prozess der i^{te} Faden von Z_1 nicht notwendig mit dem i^{ten} Faden von Z_2 zu verknüpfen ist. Ist vielmehr μ_i die Verbindung von A_i und B_{i+1} , so hat man ja B_i mit dem Punkt A_i von Z_2 zusammenfallen zu lassen, so daß μ_i mit dem Faden μ'_i von Z_2 verknüpft wird. In Fig. 2 ist z. B. der erste Faden von Z_1 mit dem dritten Faden von Z_2 verbunden.

Das assoziative Gesetz

$$(1) \quad Z_1(Z_2 Z_3) = (Z_1 Z_2) Z_3$$

für unsere Komposition leuchtet unmittelbar ein. Denn offenbar erscheint derselbe Zopf, wenn man an Z_1 den bereits verknüpften $Z_2 Z_3$ anhängt oder aber an Z_1 den Zopf Z_2 und an das Kompositionsergebnis Z_3 . Dagegen ist im allgemeinen die Reihenfolge von Z_1 und Z_2 wesentlich, d. h. es gilt nicht das kommutative Gesetz.

Die einfachsten Typen von Zöpfen n^{ter} Ordnung sind in Fig. 3 dargestellt. Wir haben:

1. Den Zopf E_i bei dem der Punkt A_i mit B_i verbunden ist und die Fäden μ_i miteinander nicht verschlungen sind. (Bei passender Deformation schneiden sich dann die Projektionen unserer Kurven nicht.) Erstlich gilt, wenn Z ein beliebiger Zopf ist:

$$(2) \quad ZE = EZ = Z.$$

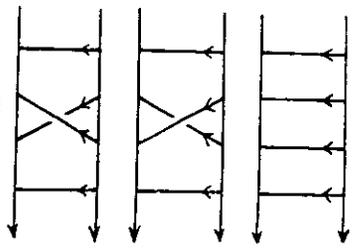


Fig. 3.

Unser Zopf E spielt also die Rolle der Einheit und werde deshalb auch einfach mit 1 bezeichnet.

2. Der Zopf σ_i bei dem A_i mit B_{i+1} und A_{i+1} mit B_i verbunden ist, wobei der i^{te} Faden einmal über dem $(i+1)^{\text{ten}}$ Faden läuft, die übrigen Fäden aber wie bei E laufen. (Also unverschlungen von A_i nach B_i .)

3. Der Zopf σ_i^{-1} , bei dem derselbe Sachverhalt wie bei σ_i vorliegt, nur daß der i^{te} Faden einmal unter dem $(i+1)^{\text{ten}}$ läuft.

Komponiert man den Zopf σ_i mit σ_i^{-1} , so kann man den i^{ten} Faden vom $(i+1)^{\text{ten}}$ herunterheben, erhält also den Zopf E . Ebenso wenn σ_i^{-1} mit σ_i komponiert wird. Es gilt also:

$$(3) \quad \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = 1.$$

Aus diesem Grunde wurde der dritte Typus σ_i^{-1} genannt.

Nummer kann man leicht einsehen, daß jeder Zopf durch passende Komposition der Elementarzöpfe $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ erhalten werden kann, da man ihn nach leichten Deformationen in solche Schichten zerlegen kann, so daß in jeder einzelnen Schicht nur eine Überkreuzung liegt. Die in Fig. 2 vorkommenden Zöpfe gestatten zum Beispiel die Darstellung:

$$Z_1 = \sigma_1 \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1}; \quad Z_2 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_3^{-1}.$$

Dies hat aber zur Folge, daß es zu jedem Zopf Z einen inversen Z^{-1} gibt, für den gilt:

$$(4) \quad ZZ^{-1} = Z^{-1}Z = 1.$$

So ist z. B.: $Z_1^{-1} = \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1^{-1}$. Die geometrische Bedeutung von Z^{-1} ist auch unmittelbar zu erkennen. Man erhält ihn nämlich, wenn man die Projektion von Z an der Geraden g_n spiegelt, die Orientierung der Kurven aber im Spiegelbild einfach fortsetzt.

Somit bilden die Zöpfe n^{ter} Ordnung eine Gruppe \mathfrak{S}_n mit den $(n-1)!$ Erzeugenden $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$.

Als Beispiel eines einfachen Zopfes 3. Ordnung führen wir noch den allgemein bekannten Damenzopf an. Er hat die Formel:

$$Z = (\sigma_1 \sigma_2^{-1})^k.$$

$$Z = (\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1})^k$$

bei der vier Fäden verwendet werden, findet häufig Anwendung.

§ 3. Definierende Relationen.

Die Darstellung eines Zopfes Z mit Hilfe der σ_i ist natürlich nicht eindeutig, da zwischen den σ_i noch gewisse Relationen bestehen werden, die von den erlaubten Deformationen von Z herrühren. Es wird sich nun zunächst darum handeln, die definierenden Relationen unserer Gruppe zu bestimmen, die Deformationen also zu arithmetisieren. Man überlegt sich nun leicht, daß eine Deformation von Z aus einer Normalgestalt in eine andere stets auch in der Normalgestalt ausgeführt werden kann, so daß es nur auf ein Umordnen der Fäden ankommt.

Dieses Umordnen der Fäden soll nun in einzelne Schritte zerlegt werden. Statt mehrere Fäden zugleich umzuordnen, kann man sukzessiv die einzelnen Fäden über oder unter die anderen wegziehen. Dabei wird man allerdings mehrmals zum gleichen Faden zurückkehren müssen, nachdem man inzwischen die anderen Fäden passend umgelegt hat. Jedenfalls besteht aber ein einzelner Schritt darin, daß ein gewisser Faden allein deformiert wird und die anderen fest bleiben.

stop