German Exam Fall 2002 (1)

Number Theory

23.

Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins

Mathematische Annalen 77, 313—352 (1916)

§ 1. Grundlagen. Der lineare Fall

Es seien auf der Geraden der reellen Zahlen unendlich viele Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

markiert; wir rollen die Gerade auf einen Kreis vom Umfange 1 auf und fragen, ob dabei die an den Stellen α_n befindlichen Marken schliesslich den Umfang des Kreises überall gleich dicht bedecken. Dies würde dann der Fall sein, wenn die Anzahl $n_\mathfrak{a}$ derjenigen unter den n ersten Marken $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, welche beim Aufrollen in den Teilbogen $\mathfrak{a}$ der Kreisperipherie hineinfallen, asymptotisch durch $|\mathfrak{a}| \cdot n$ gegeben ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_\mathfrak{a}}{n} = |\mathfrak{a}|; \tag{1}$$

unter $|\mathfrak{a}|$ ist dabei die Länge des Bogens $\mathfrak{a}$ verstanden. Dann und nur dann, falls diese Limesgleichung für jeden Teilbogen $\mathfrak{a}$ erfüllt ist, sprechen wir von einer gleichmässig dichten Verteilung der Marken über die Kreisperipherie. Das Aufrollen der Geraden auf den Kreis besagt, dass wir die reellen Zahlen mod. 1 betrachten, d. h. dass zwei Zahlen bereits dann als gleich gelten, wenn sie sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Unter den Zahlen x, welche einer gegebenen α mod. 1 kongruent sind, gibt es eine und nur eine, welche der Ungleichung $0 \leqq x < 1$ genügt; diese, die Reduzierte von α mod. 1, möge mit (α) bezeichnet werden.

Um zu einem Kriterium für die Gleichverteilung zu gelangen, nehmen wir an, dass die Zahlen α_n mod. 1 dieses Gesetz erfüllen. Dann behaupte ich, können wir daraus für jede beschränkte, Riemannisch integrierbare Funktion $f(x)$, die periodisch mit der Periode 1 ist, die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) = \int_0^1 f(x)\, dx \tag{2}$$

erschliessen; d. h. der mittels der diskreten Zahlen α_n gebildete Mittelwert der Funktion f stimmt mit dem kontinuierlichen Mittelwert $\int_0^1 f(x)\, dx$ überein.

[1]) Den gleichen Gegenstand wie die vorliegende Arbeit behandelt eine in den Göttinger Nachrichten (Sitzung vom 13. Juni 1914) erschienene Note des Verfassers.

2

In der Tat besagt unsere Voraussetzung, dass (2) erfüllt ist für jede stückweis konstante Funktion von der Periode 1. Es liegt im Wesen einer im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gegebenen, beschränkten, Riemannisch integrierbaren Funktion $f(x)$, dass zu ihr zwei stückweis konstante Funktionen f_1, f_2 existieren, welche sie zwischen sich enthalten ($f_1 \leqq f \leqq f_2$) und deren Integrale $\int_0^1 f_1\,dx$, $\int_0^1 f_2\,dx$ sich beliebig wenig voneinander unterscheiden. Sei der Unterschied dieser Integrale $= \varepsilon$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f_1(\alpha_h) = \int_0^1 f_1\,dx \geqq \int_0^1 f\,dx - \varepsilon.$$

Für hinreichend grosses n ist daher

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f_1(\alpha_h) > \int_0^1 f\,dx - 2\,\varepsilon$$

also a fortiori

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) > \int_0^1 f\,dx - 2\,\varepsilon.$$

Ebenso ergibt sich mit Benutzung von f_2, dass für hinreichend grosses n die linke Seite

$$< \int_0^1 f\,dx + 2\,\varepsilon$$

ist, und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Die einfachste Funktion von der Periode 1 ist

$$e^{2\pi i x} = e(x);$$

sie ist die eigentliche *analytische Invariante der Zahlklassen* mod. 1. Der reellen Zahl x die komplexe $e(x)$ zuordnen, besagt nichts anderes, als den Prozess des Aufrollens der Zahlgerade auf den Kreis vom Umfange 1 analytisch ausführen. Für jede ganze Zahl m hat auch $e(mx)$ die Periode 1, und daher gilt unter unserer obigen Annahme insbesondere für jede ganze Zahl $m \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h) = \int_0^1 e(mx)\,dx = 0.$$

Die Theorie der Fourierschen Reihen lehrt, dass aus den speziellen Funktionen $e(mx)$ sich jede periodische Funktion linear zusammensetzen lässt. Daraus kann die folgende Umkehrung unseres Ergebnisses hergeleitet werden:

Satz 1. *Gilt für jede ganze Zahl $m \neq 0$ die Limesgleichung*

$$\sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h) = o(n),$$

3

so genügen die Zahlen α_n mod. 1 *dem Gesetz der überall gleichmässig dichten Verteilung.*

In der Tat, da die Gleichung (2) für die Funktion $e(0x) = 1$ selbstverständlich ist, folgt sie aus der in Satz 1 gemachten Annahme für jede abbrechende trigonometrische Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x) + \cdots + (a_m \cos 2\pi m x + b_m \sin 2\pi m x).$$

Ist $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion von der Periode 1, so kann man bekanntlich zu jeder positiven Zahl ε eine abbrechende trigonometrische Reihe f_ε finden, so dass $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$ ist. $f_1 = f_\varepsilon - \varepsilon$ und $f_2 = f_\varepsilon + \varepsilon$ sind dann zwei abbrechende trigonometrische Reihen, welche f zwischen sich enthalten und deren Integrale

$$\int_0^1 f_1\,dx, \qquad \int_0^1 f_2\,dx$$

sich um 2ε voneinander unterscheiden. Wir schliessen daraus wie oben, dass Gleichung (2) für die Funktion f gültig ist. Bezeichnet endlich f eine stückweis konstante Funktion von der Periode 1, so kann man leicht (indem man etwa die Sprünge von f durch steile, geradlinige Böschungen ersetzt) zwei stetige Funktionen f_1, f_2 finden, die f zwischen sich enthalten und deren Integrale beliebig wenig voneinander verschieden sind. Darum gilt (2) dann auch für eine solche Funktion f. In dem damit bewiesenen Satz 1 besitzen wir ein analytisch gut brauchbares Kriterium für die Gleichverteilung von Zahlfolgen mod. 1.

Wir geben sogleich eine Anwendung, indem wir zeigen:

Satz 2. *Ist* ξ *eine irrationale Zahl, so liegen die ganzzahligen Vielfachen von* ξ:

$$1\xi,\ 2\xi,\ 3\xi,\ \ldots$$

mod. 1 *überall gleich dicht.*

Ist m eine ganze Zahl $\neq 0$ und setzen wir $m\xi = \eta$, so haben wir nur festzustellen, dass

$$\sum_{h=1}^{n} e(h\eta) = o(n)$$

wird. Die linke Seite lässt sich aber als geometrische Reihe summieren, ihr absoluter Betrag ist

$$= \left|\frac{e((n+1)\eta) - e(\eta)}{e(\eta) - 1}\right| \leq \frac{2}{|e(\eta) - 1|} = \frac{1}{|\sin \pi \eta|},$$

ist also, da η keine ganze Zahl ist, nicht nur $= o(n)$, sondern bleibt sogar unterhalb einer endlichen Grenze.

Der Satz 2 ist von Bohl, Sierpiński und mir 1909–1910 auf Grund der Tatsache bewiesen worden, dass sich die irrationale Zahl ξ durch einen Bruch,

3

Analysis

(1)

Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren

Einleitung.

I. Wenn wir alle Funktionen eines gewissen metrischen Raumes Ω (z. B. der reellen Zahlengeraden, der komplexen Zahlenebene, der Oberfläche der Einheitskugel, der Strecke $0, 1$ usw.) betrachten, die gewissen Regularitätsbedingungen genügen (z. B. stetig und bis auf endlich viele Knicke stetig differentiierbar sind, zweimal stetig differentiierbar sind, ein endliches Absolutwertquadratintegral über Ω haben[1]) usw.) und eventuell auch noch gewissen Randbedingungen unterworfen sind, so wird unter einem linearen Operator bekanntlich das Folgende verstanden: Eine Zuordnung R, die jeder Funktion f unserer Klasse eine Funktion Rf (die nicht mehr zu dieser Klasse gehören muß) zuordnet, aber so, daß stets

$$R(a_1 f_1 + \dots + a_k f_k) = a_1 R f_1 + \dots + a_k R f_k \quad (a_1, \dots, a_k \text{ komplexe Konstante})$$

ist.

Wenn in Ω ein allgemeiner Maßbegriff (etwa im Sinne des Lebesgueschen) existiert und dv das Volumelement in Ω ist (auf der Geraden: dx, in der Ebene: $dx\,dy$, auf der Oberfläche der Einheitskugel: $\sin\vartheta \cdot d\vartheta\, d\varphi$ usw.), und das Integral über diesen ganzen Raum mit $\int\limits_{\Omega}$ bezeichnet wird, so heißt ein linearer Operator R selbstadjungiert oder Hermitesch, wenn für alle zugelassenen Funktionen f, g

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot \overline{Rg} \cdot dv = \int\limits_{\Omega} Rf \cdot \bar{g} \cdot dv$$

gilt[2]).

---

[1]) Die Funktionen dürfen komplexe Werte haben.

[2]) $\bar{f}$ ist diejenige Funktion, die überall den zum Werte von f konjugiert-komplexen Wert annimmt. — Unsere Terminologie weicht von der üblichen etwas ab:

(Fortsetzung der Fußnote [2]) auf nächster Seite.)

2

Hermitesche lineare Operatoren (wir wollen sie kurz H. O. nennen) sind z. B. die folgenden (wir geben nun auch die Argumente der Funktionen an, und zwar sei P der allgemeine Punkt von Ω):

$R f(P) = f(P)$

$R f(P) = x \cdot f(P)$ (x irgendeine Koordinate von P in Ω),

$R f(P) = \int_\Omega \varphi(P', P) \cdot f(P') \cdot dv'$ ($\varphi(P', P) = \overline{\varphi(P, P')}$, d. h. der Kern Hermitesch),

$R f(P) = L f(P)$ (L irgendein selbstadjungierter Differential- oder partieller Differentialausdruck, vgl. Anm. [2])).

Bekanntlich bestimmen die beiden letzten Typen von H. O. ein Eigenwertproblem, das bei hinreichender Regularität des Kernes $\varphi(P, P')$ bzw. der Koeffizienten von L (nämlich wenn nur ein „Punktspektrum" existiert) so formuliert werden kann[3]):

Ein Eigenwert ist eine Zahl λ, zu der es eine Funktion $f \neq 0$ mit

$$R f = \lambda f$$

gibt; f ist dann Eigenfunktion. Es gibt im allgemeinen unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, denen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ so zugeordnet werden können, daß sie ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen bilden. D. h. es gilt:

$$\int_\Omega \varphi_m \cdot \overline{\varphi_n} \cdot dv = \begin{cases} 0, & \text{für } m = n \\ 1, & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad \text{(Orthogonalität)},$$

---

ein Differentialoperator R z. B. heißt ja gewöhnlich dann selbstadjungiert, wenn $f \cdot \overline{Rg} - Rf \cdot g$ vollständiges Differential eines Ausdruckes der f, g und ihrer Ableitungen ist, also

$$\int_\Omega f \cdot \overline{Rg} \cdot dv - \int_\Omega R f \cdot \bar{g} \cdot dv$$

ein nur von den Randwerten von f, g und ihrer Ableitungen abhängiger Ausdruck. Unsere Selbstadjungiertheit (Hermitescher Charakter) folgt hieraus nur, wenn dieser Ausdruck, infolge geeigneter Randbedingungen, verschwindet. D. h. ein im gewöhnlichen Sinne selbstadjungierter Differentialoperator ist es für uns eventuell erst in einem hinreichend eingeengten Definitionsbereiche (vgl. auch Einleitung VII).

[3]) Das Eigenwertproblem der regulären Integraloperatoren wurde von Hilbert gelöst (Göttinger Nachr. 1904, S. 49—91), seine Methode wurde später von Courant, Hellinger, F. Riesz, E. Schmidt, Toeplitz u. a. bedeutend vereinfacht. Die Differentialoperatoren (zumindest die selbstadjungierten von zweitem Grade) können bei der Lösung des Eigenwertproblems durch Integraloperatoren ersetzt werden (Hilbert, Göttinger Nachr. 1904, S. 213—259), die dieselben Eigenfunktionen, aber reziproke Eigenwerte haben.

3

und für jedes Paar zugelassener Funktionen f, g

$$\int_\Omega f \cdot \bar{g} \cdot dv = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_\Omega f \cdot \overline{\varphi_m} \cdot dv\Big) \cdot \Big(\overline{\int_\Omega g \cdot \overline{\varphi_m} \cdot dv}\Big) \quad \text{(Vollständigkeit).}$$

Wie für alle vollständigen Orthogonalsysteme, gilt der Entwicklungssatz mit Mittelkonvergenz:

$$\int_\Omega \Big| f - \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \varphi_n \Big|^2 \cdot dv \to 0 \qquad \Big(a_n = \int_\Omega f \cdot \overline{\varphi_n} \cdot dv\Big)$$

für $N \to \infty$.

Wenn sich $\varphi(P, P')$ bzw. die Koeffizienten von L nicht mehr ganz regulär verhalten, so treten Verwicklungen auf, die man durch das Auftreten eines Streckenspektrums kennzeichnet. Immerhin können die Begriffe Eigenwert und Eigenfunktion durch geeignete Verallgemeinerungen (insbesondere durch Herabsetzung der Regularitätsanforderungen an die Eigenfunktion oder gar durch Betrachtung sogenannter differentieller Eigenfunktionen[4]) aufrechterhalten werden. Auch die Vollständigkeitssätze bleiben bei geeigneter Verallgemeinerung (Ersetzen der Summe durch ein Integral usw.) gewahrt; aber der ganze Aufbau wird wesentlich komplizierter und verliert viel von seiner ursprünglichen Anschaulichkeit[5]).

II. Wenn wir die in I. betrachteten kontinuierlichen Räume Ω durch den „diskreten Raum" 1, 2, 3, … der positiven ganzen Zahlen ersetzen, wobei die Funktionen $f(P)$ (P durchläuft Ω) durch die Folgen a_n ($n = 1, 2, \ldots$) und die Integrale $\int_\Omega f \cdot dv$ durch die Summen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sinngemäß zu ersetzen sind, so gelangen wir zu ganz analogen Begriffsbildungen wie in I.

Die einfachsten Beispiele von H. O. (ja, wie man nach präziserer Fassung des Begriffes zeigen kann, die einzigen) sind die linearen Transformationen (unendlich vieler Variablen) mit Hermitescher Matrix:

$$R(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots),$$
$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \alpha_{mn} = \overline{\alpha_{nm}}.$$

(Die Rolle der „Regularitätsbedingungen" bei Funktionen in Ω spielen da

[4]) Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7; Carleman, Sur les équations intégrales à noyau réel et symétrique, Upsala 1923, S. 82.

[5]) Das Eigenwertproblem der Integralgleichungen mit „beschränktem" Kerne wurde von Weyl gelöst (Göttinger Inaugural-Dissertation 1908) mit Hilfe der Hilbertschen Theorie der beschränkten Bilinearformen (Göttinger Nachr. 1906, S. 157—209). Auch für eine ausgedehnte Klasse selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiten Grades, deren Koeffizienten singulär sein dürfen, erledigte Weyl das Eigenwertproblem (Math. Annalen **68** (1910), S. 220—269). Eine noch allgemeinere Klasse von Integraloperatoren untersuchte Carleman (vgl. Anm. [4])).

Geometry

1

8. Symplektische Mannigfaltigkeiten

Eine symplektische Struktur auf einer Mannigfaltigkeit ist eine geschlossene nichtentartete 2-Differentialform. Der Phasenraum eines mechanischen Systems hat eine natürliche symplektische Struktur.

Auf einer symplektischen wie auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen Vektorfeldern und 1-Formen. Ein Vektorfeld auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit, das dem Differential einer Funktion entspricht, wird Hamiltonsches Vektorfeld genannt. Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit liefert einen Phasenfluß, d. h. eine einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen. Der Phasenfluß eines Hamiltonschen Vektorfeldes läßt die symplektische Struktur des Phasenraumes unverändert.

Die Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit bilden eine Liesche Algebra. Die Hamiltonschen Vektorfelder auf einer symplektischen Struktur bilden ebenfalls eine Liesche Algebra. Die Operation in dieser Algebra wird Poissonklammer genannt.

8.1. Symplektische Struktur auf Mannigfaltigkeiten

Hier werden die Begriffe einer symplektischen Mannigfaltigkeit, eines Hamiltonschen Vektorfeldes auf ihr und einer symplektischen Standardstruktur auf dem Kotangentialbündel definiert.

8.1.1. Definition. Es sei M^{2n} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension. Eine *symplektische Struktur* auf M^{2n} ist eine geschlossene nichtentartete 2-Differentialform ω^2 auf M^{2n}:

$$d\omega^2 = 0, \text{ und für alle } \xi \neq 0 \text{ existiert}$$

$$\text{ein } \eta \text{ mit } \omega^2(\xi, \eta) \neq 0 \quad (\xi, \eta \in TM_x).$$

Das Paar (M^{2n}, ω^2) heißt *symplektische Mannigfaltigkeit*.

Beispiel. Der lineare Raum $\mathbf{R}^{2n}$ mit den Koordinaten p_i, q_i und mit $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Aufgabe. Man prüfe, daß $(\mathbf{R}^{2n}, \omega^2)$ eine symplektische Mannigfaltigkeit ist.

Für $n = 1$ entspricht dem Paar $(\mathbf{R}^2, \omega^2)$ das Paar (die Ebene, Flächeninhalt).

 (2)

Das folgende Beispiel erklärt das Auftreten einer symplektischen Mannigfaltigkeit in der Dynamik. Es ist zweckmäßig, neben dem Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit auch sein duales, das Kotangentialbündel zu betrachten.

8.1.2. Das Kotangentialbündel und seine symplektische Struktur. Es sei V eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form auf dem Tangentialraum an V im Punkt $\boldsymbol{x}$ wird *Kotangentialvektor an V im Punkt $\boldsymbol{x}$* genannt. Die Menge aller Kotangentialvektoren an V im Punkt $\boldsymbol{x}$ bildet einen n-dimensionalen linearen Raum, der dual zum Tangentialraum $T\boldsymbol{R}_x$ ist. Dieser lineare Raum der Kotangentialvektoren wird *Kotangentialraum* an V im Punkt $\boldsymbol{x}$ genannt und mit T^*V_x bezeichnet.

Die Vereinigung der Kotangentialräume an die Mannigfaltigkeit in allen Punkten ist das *Kotangentialbündel* von V, nun mit T^*V bezeichnet. Die Menge T^*V hat die natürliche Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Ein Punkt von T^*V ist eine 1-Form auf dem Tangentialraum an V in einem gewissen Punkt von V. Wenn $\boldsymbol{q}$ die Wahl n lokaler Koordinaten für die Punkte von V bedeutet, wird jede Form durch ihre n Komponenten $\boldsymbol{p}$ gegeben. Insgesamt ergeben die $2n$ Zahlen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ einen Satz lokaler Koordinaten für die Punkte von T^*V.

Es existiert eine natürliche Projektion $f\colon T^*V \to V$, die jede 1-Form auf TV_x mit dem Punkt $\boldsymbol{x}$ verknüpft. Sie ist surjektiv und differenzierbar. Das Urbild eines Punktes $\boldsymbol{x} \in V$ bei der Abbildung f ist der Kotangentialraum T^*V_x.

Satz. *Das Kotangentialbündel T^*V hat eine natürliche symplektische Struktur. In den obigen lokalen Koordinaten wird die symplektische Struktur durch die Formel*

$$\omega^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{p} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{q} = \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \cdots + \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}q_n$$

gegeben.

Beweis. Zunächst definieren wir auf T^*V eine ausgezeichnete 1-Form. Es sei $\xi \in T(T^*V)_{\boldsymbol{p}}$ ein Tangentialvektor an das Kotangentialbündel im Punkt $\boldsymbol{p} \in T^*V_x$ (Abb. 166). Die Ableitung $f_*\colon T(T^*V) \to TV$ der natürlichen Projektion $f\colon T^*V \to V$

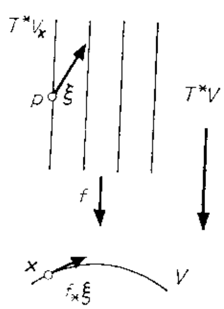

Abb. 166. 1-Form $\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ auf dem Kotangentialbündel

führt ξ in einen Tangentialvektor $f_*\xi$ an V in $\boldsymbol{x}$ über. Nun definieren wir die 1-Form ω^1 auf T^*V durch die Beziehung $\omega^1(\xi) = \boldsymbol{p}(f_*\xi)$. In den obigen lokalen Koordinaten hat diese Form die Gestalt $\omega^1 = \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}$. Gemäß dem Beispiel aus 8.1.1. ist die geschlossene 2-Form $\omega^2 = \mathrm{d}\omega^1$ nicht entartet. □

3

Bemerkung. Wir betrachten ein Lagrangesches mechanisches System mit der Konfigurationsmannigfaltigkeit V und der Lagrange-Funktion L. Offensichtlich ist die „verallgemeinerte Geschwindigkeit" $\dot{\boldsymbol{q}}$ der Tangentialvektor an die Konfigurationsmannigfaltigkeit V, und der „verallgemeinerte Impuls" $\boldsymbol{p} = \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}}$ ist ein Kotangentialvektor. Daher ist der „$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$-Phasenraum" eines Lagrangeschen Problems das Kotangentialbündel der Konfigurationsmannigfaltigkeit. Somit zeigt der vorangegangene Satz, daß der Phasenraum eines mechanischen Problems die natürliche Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit besitzt.

8.1.3. Hamiltonsche Vektorfelder. Eine Riemannsche Struktur auf einer Mannigfaltigkeit stellt einen Isomorphismus zwischen den Räumen der Tangentialvektoren und der 1-Formen her. Eine symplektische Struktur errichtet einen ähnlichen Isomorphismus.

Definition. Jedem Tangentialvektor $\boldsymbol{\xi}$ an eine symplektische Mannigfaltigkeit (M^{2n}, ω^2) im Punkt $\boldsymbol{x}$ ordnen wir durch die Formel

$$\omega_\xi^1(\eta) = \omega^2(\eta, \boldsymbol{\xi}) \qquad \text{für alle } \eta \in TM_{\boldsymbol{x}}$$

eine 1-Form ω_ξ^1 auf TM_x zu.

Aufgabe. Man zeige, daß die Zuordnung $\boldsymbol{\xi} \to \omega_\xi^1$ einen Isomorphismus zwischen dem $2n$-dimensionalen linearen Raum der Vektoren und den 1-Formen darstellt.

Beispiel. Im $\mathbf{R}^{2n} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ wollen wir die Vektoren und die 1-Formen unter Verwendung der euklidischen Struktur $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2$ identifizieren. Dann ergibt die Zuordnung $\boldsymbol{\xi} \to \omega_\xi^1$ eine Abbildung $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$.

Aufgabe. Man berechne die Matrix dieser Transformation in der Basis $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$.

Antwort. $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Mit I werde der oben konstruierte Isomorphismus $I: T^*M_x \to TM_x$ bezeichnet.

Nun sei H eine Funktion auf der symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2n}. Dann ist $\mathrm{d}H$ eine Differential-1-Form auf M, und ihr entspricht in jedem Punkt ein Tangentialvektor an M. Auf diese Weise erhalten wir das Vektorfeld $I\,\mathrm{d}H$.

Definition. Das Vektorfeld $I\,\mathrm{d}H$ wird *Hamiltonsches Vektorfeld* und H die *Hamilton-Funktion* genannt.

Beispiel. Im Fall $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ ergibt sich die Phasenflußgeschwindigkeit des Feldes aus den kanonischen Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = I\,\mathrm{d}H(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \ \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}.$$

8.2. Hamiltonsche Phasenflüsse und ihre Integralinvarianten

Der Liouvillesche Satz behauptet, daß der Phasenfluß das Volumen nicht ändert. POINCARÉ fand eine ganze Reihe von Differentialformen, die beim Hamiltonschen Phasenfluß erhalten bleiben.

8.2.1. Hamiltonsche Phasenflüsse erhalten die symplektische Struktur. Es sei (M^{2n}, ω^2) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H: M^{2n} \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Wir setzen