German Exam Winter 2003

COMPLEX ANAL.

#1

Die moderne Funktionentheorie wurde im 19. Jahrhundert entwickelt. Die Pioniere der Gründerjahre sind:

A.L. Cauchy (1789–1857), B. Riemann (1826–1866),
K. Weierstrass (1815–1897).

Jeder von ihnen prägte die Theorie auf seine Art, so sprechen wir noch heute vom Cauchyschen bzw. Riemannschen bzw. Weierstrassschen Standpunkt.

Cauchy hat seine ersten Arbeiten zur Funktionentheorie in den Jahren 1814–1825 geschrieben. Der Funktionsbegriff ist wie bei seinen Vorgängern aus der Eulerzeit noch recht unbestimmt. Eine holomorphe Funktion ist für Cauchy im wesentlichen eine komplex-differenzierbare Funktion, die eine stetige Ableitung hat. Die Cauchysche Funktionentheorie basiert auf seinem berühmten Integralsatz und auf dem Begriff des Residuums. *Jede* holomorphe Funktion hat eine natürliche Integraldarstellung und wird so den Methoden der Analysis zugänglich. Die Cauchysche Theorie wurde durch J. Liouville (1809–1882) vervollständigt, [Liou]; das Buch [BB] von Ch. Briot und J-C. Bouquet (1859) vermittelt einen sehr guten Eindruck vom damaligen Stand der Theorie.

Riemanns epochemachende Göttinger Inauguraldissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* [R] erschien 1851. Bei Riemann steht die geometrische Auffassung im Mittelpunkt: holomorphe Funktionen sind Abbildungen zwischen Bereichen in der Zahlenebene $\mathbb{C}$, allgemeiner zwischen Riemannschen Flächen, die in ihren „entsprechenden kleinsten Theilen ähnlich sind". Riemann schöpfte seine Ideen u.a. aus der Anschauung und den Erfahrungen in der mathematischen Physik: die Existenz von Strömungen ist ihm Beweis genug, daß holomorphe (=konforme) Abbildungen existieren. Nicht durch Formeln, sondern durch „innerliche charakteristische" Eigenschaften, aus welchen die äußerlichen Darstellungsformen mit Notwendigkeit entspringen, sucht er – mit einem Minimum an Rechnung – seine Funktionen zu verstehen.

Für Weierstrass ist der Ausgangspunkt die Potenzreihe; holomorphe Funktionen sind solche Funktionen, die lokal in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind. Funktionentheorie ist die Theorie dieser Reihen und wird ganz einfach und weitgehend algebraisch begründet. Die Anfänge dieser Auffassung gehen auf J.L. Lagrange zurück, der 1797 in seiner *Théorie des fonctions analytiques* (2. Aufl. Courcier, Paris 1813) den Satz beweisen wollte, daß jede stetige Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist. ~~Seit Lagrange spricht man~~

ALGEBRA

6 Codierung

#2

6.1 Begriffe und Prinzipien

Ein Code ist eine Zuordnungsvorschrift zwischen zwei Zeichenmengen, wie z.B. zwischen den Buchstaben des Alphabets und den Morsezeichen. Den vom Codierer bzw. Decodierer (Mensch oder Maschine) ausgeführten Vorgang des Zuordnens nennt man Codierung bzw. Decodierung.

Zweck einer Codierung ist die Umformung einer gegebenen in eine nach bestimmten Kriterien geeignetere oder gar optimale Zeichenmenge. Diese Kriterien können vielfältiger Art sein. Sie folgen aus den jeweiligen technischen Problemen bei der Übertragung, Verarbeitung, Speicherung, Geheimhaltung u.a. von Nachrichten bzw. Daten.

Aus der Fülle dieser Probleme wollen wir hier eine kurze Einführung in ein sehr begrenztes Teilgebiet der Codierungstheorie geben. Die Auswahl wurde so getroffen, daß sich ein enger Zusammenhang mit den bisher behandelten mathematischen Gebieten und damit ein Beispiel für deren Anwendung ergibt. Folgende Schritte führen zu dieser Auswahl:

Zunächst beschränken wir uns auf die Aufgabe der Übertragung von Nachrichten (Daten) über gestörte räumliche oder zeitliche Kanäle (Übertragungsstrecken oder Speicher). Fig. 6.1.1 möge als Modell für ein solches Nachrichtensystem dienen. Man erkennt darin zwei Arten von Codierung, nämlich Quellen- und Kanalacodierung.

Aufgabe der Quellencodierung ist es, ein primäres Signal x (das auch analog sein kann) in ein digitales Signal m umzuformen, das möglichst nur das erforderli-

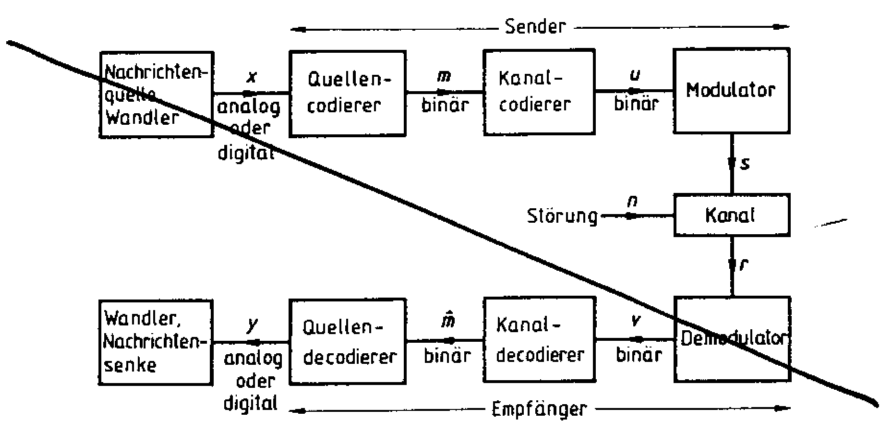

Fig. 6.1.1

che Minimum an Information enthält. Man sagt auch, m soll möglichst wenig Redundanz besitzen, damit keine „unnötigen" Anteile der Nachricht übertragen werden. Codes, die dieses Ziel erreichen, nennt man Optimalcodes.

Das Problem der Quellencodierung wird hier nicht weiter betrachtet. Wir setzen vielmehr ein vorgegebenes Signal m voraus und *beschränken uns auf den binären Fall, d.h. m ist eine (beliebig lange) Folge von Binärzeichen (Bits).* Dieses Signal soll, ggf. mit Hilfe eines Modulationsverfahrens, über einen gestörten Kanal übertragen werden.

Aufgabe der Kanalcodierung ist es, die bei der Übertragung entstandenen Verfälschungen des Signals zu vermindern, so daß die empfangene Informationsfolge $\hat{m}$ hinreichend fehlerarm ist. Hierzu wird die Informationsfolge m in eine Sendefolge u so umcodiert, daß in der gestörten Empfangsfolge v eine Fehlerminderung möglich ist, d.h. entweder eine Fehlererkennung oder zusätzlich eine Fehlerkorrektur[1].

Für diese Aufgabe verwendet man fehlermindernde Codes. Der Informationsfolge m werden nach bestimmten Regeln Binärstellen als sog. Prüfstellen hinzugefügt. Die Sendefolge u wird damit gegenüber der Informationsfolge m redundant, *jedoch gerade diese „nützliche" Redundanz ermöglicht die Fehlerminderung,* wie wir gleich sehen werden.

Bei den fehlermindernden Codes unterscheidet man Baum-Codes und Block-Codes. Bei den Baum-Codes (die sich vorzugsweise durch einen Codebaum beschreiben lassen) werden der Informationsfolge m fortlaufend Prüfstellen „hinzugemischt", die jeweils auf eine ganze Anzahl von Informationsstellen wirken. Die Sendefolge u bleibt dabei ein zusammenhängendes Ganzes und kann auch nur als solches decodiert werden. Bei den Block-Codes dagegen wird bereits die Informationsfolge m in Blocks zu je k Stellen aufgeteilt. Der Kanalcodierer fügt jedem Block $n - k$ Prüfstellen hinzu, so daß die Sendefolge u aus Blocks zu je n Stellen besteht, *die getrennt und unabhängig voneinander übertragen und decodiert werden.*

Im folgenden betrachten wir nur diese sog. (n, k)-Block-Codes. Einen n-stelligen Block nennt man auch Binärwort bzw. einfach Wort. Nach den Gesetzen der Kombinatorik gibt es 2^n unterscheidbare Wörter. Da die Information jedoch in Blocks zu $k < n$ Stellen aufgeteilt ist, gibt es unter den 2^n Wörtern nur $2^k < 2^n$ Codewörter. Die restlichen $2^n - 2^k$ Wörter sind keine Codewörter. Wenn man dies betonen will, spricht man auch von sinnlosen Wörtern.

Bevor wir auf die mathematische Struktur der Block-Codes eingehen, soll das Prinzip der Fehlerminderung elementar erläutert werden. In Beispiel 9 der Nr. 2.1 wurde die Distanz d zweier Wörter definiert als die Anzahl der Stellen, in denen sie sich unterscheiden und das Gewicht eines Wortes als die Distanz zum Nullwort, d.h. als die Anzahl der im Wort enthaltenen Einsen.

[1] Fehlerminderung wird hier also als Oberbegriff für Fehlererkennung und Fehlerkorrektur gebraucht.

APPLIED MATH

#3

5 Monotone Operatoren

Ein Ausgangspunkt für die Beschäftigung mit monotonen Operatoren und ihren Verallgemeinerungen besteht in der Idee, Existenzsätze für Operatorgleichungen und -ungleichungen nach dem Muster derjenigen aus Abschnitt 4.3, jedoch unter Verzicht auf die dort wesentliche Voraussetzung, der betreffende Operator sei als Ableitung eines konvexen Funktionals darstellbar, zu gewinnen. Die Existenz von Lösungen bei Aufgaben mit hemistetigen, koerzitiven, monotonen Operatoren wird als erstes erschlossen, wobei sogar noch nur dicht definierte Störungen zugelassen werden können. Im Zusammenhang mit diesem Existenzresultat eröffnet sich noch die Möglichkeit, eine Abschwächung der Monotoniebedingung vorzunehmen und auf diese Weise eine ihrer Verallgemeinerungen, nämlich die pseudomonotonen Operatoren einzuführen. Beide Begriffe finden ihre Rechtfertigung in der abstrakten Theorie der stationären Probleme, es stellt sich jedoch heraus, daß dieser Rahmen eine angemessene Behandlung von Aufgaben mit nur dicht definierten Operatoren, also z.B. von nichtstationären Problemen, nicht zuläßt. Dieser Mangel läßt sich erst mit Hilfe der maximal monotonen Operatoren beheben, die es dann aber auch gleich auf ganz natürliche Weise erlauben, die Existenz von Lösungen bei Aufgaben mit mengenwertigen Operatoren, also z.B. bei Kontingenzgleichungen, mit Monotoniemethoden zu studieren.

Im Hinblick auf zahlreiche Randwertaufgaben und die Kontrolltheorie bei nichtlinearen partiellen Differentialoperatoren spielen Variationsungleichungen in diesem Kapitel eine wesentliche Rolle. Wir werden meistens so vorgehen, daß die Existenz von Lösungen zunächst für eine Ungleichung bewiesen und daraus dann die Surjektivität des jeweiligen Operators erschlossen wird.

Im ganzen Kapitel bedeutet E einen B-Raum und S eine Teilmenge davon.

5.1 Variationsungleichungen mit monotonen Operatoren

In diesem Abschnitt wird die Existenz von Lösungen bei der Variationsungleichung

(1) $\langle Tx-w, z-x\rangle \geq \phi x - \phi z \;\; \forall\; z\in E\;,\;\; T:S\subset E\to E^*\;,\;\; w\in E^*,$

#4

Zuletzt möchte ich Weierstraß' vielgenannter Schülerin Sonja Kowalevsky ein paar Worte widmen.

Sie ist 1850 in Moskau geboren und studiert — wir können nur ihre mathematischen Schicksale verfolgen — zunächst als Privatschüler von

Koenigsberger in Heidelberg, dann ebenso bei Weierstraß in Berlin, dem sie sehr nahe trat. An den öffentlichen Vorlesungen konnte sie aber nicht teilnehmen, weil die Anwesenheit von Hospitantinnen damals noch nicht erlaubt war. 1874 wird sie auf Empfehlung von Weierstraß in Göttingen in absentia promoviert auf Grund ihrer Arbeit über lineare partielle Differentialgleichungen: Crelle, Bd. 80; sie kommt da zu dem Resultat, daß eine lineare partielle Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten analytische Lösungen hat, eine Ausführung der Ideen, die Weierstraß in einer Jugendarbeit, welche jetzt in Bd. 1 der Werke veröffentlicht ist, niedergelegt hat[1]). 1883 wird sie auf Betreiben von Mittag-Leffler Privatdozent, 1884 Professor an der von Mittag-Leffler geleiteten Privatuniversität in Stockholm. Seitdem ist sie eine internationale Berühmtheit, die 1889, ebenfalls durch Verwendung von Mittag-Leffler, für ihre Untersuchung über die Rotation des schweren unsymmetrischen Kreisels den großen Preis der Pariser Akademie erhielt. Sie starb 1891 in Stockholm.

Ihrem Wesen nach ist sie durch ihre mathematischen Arbeiten keineswegs erschöpfend charakterisiert. Vielmehr schrieb sie u. a. Romane und erlebte sie; sie stand schließlich im Mittelpunkte des Interesses der Frauenemanzipation[2]). Es ist deshalb sehr schwer, ein klares Urteil über ihre wissenschaftliche Persönlichkeit zu gewinnen. Auf der einen Seite stehen die Enthusiasten, die ihre Heldin rühmen und preisen, auf der anderen Seite die Zweifler, die eher geneigt sind, ihr Leben und ihre Arbeiten zu verurteilen. Sicherheiten bietet uns keine der beiden Parteien, denn wir wissen ja alle, wie sehr Reklame und zu großes Lob und wieder zu herber Tadel das wahre Bild eines Menschen verzerren. Vielleicht ist am wertvollsten der Nachruf, den ihr Mittag-Leffler in den Acta math., Bd. 16, gewidmet hat.