German Exam Fall 2004 1 Part One

konformen Abbildung ohne Hinweis auf die abzubildende Menge, so handelt es sich stets um die Abbildung eines Gebietes.

Eine konforme Abbildung $w : G \to G'$ ist wegen $J_w(z) = |w'(z)|^2$ orientierungserhaltend, und im Falle von zwei Jordangebieten G und G' ist es auch die erweiterte Abbildung $w : \overline{G} \to \overline{G'}$ (vgl. 1.6). Liegen die Punkte p_1, p_2, p_3 auf der Randkurve von G und ist p_1, p_2, p_3 die in bezug auf G positive Orientierung des Randes, so muß also $w(p_1)$, $w(p_2)$, $w(p_3)$ die in bezug auf G' positive Orientierung der Randkurve von G' sein. Umgekehrt gilt mit den obigen Bezeichnungen Folgendes:

Sind G und G' Jordangebiete und sind die Orientierungen p_1, p_2, p_3 und q_1, q_2, q_3 beide positiv in bezug auf G bzw. G', so gibt es eine eindeutig bestimmte konforme Abbildung $w : G \to G'$, welche die Randpunkte p_i in die Randpunkte $w(p_i) = q_i$ überführt.

2.3. Viereck und seine Abbildung. Ein *Viereck* besteht aus einem Jordangebiet Q und aus einer Folge z_1, z_2, z_3, z_4 von vier Randpunkten des Gebietes Q. Die Punkte z_i heißen die *Ecken* des Vierecks. Zwei Vierecke werden identifiziert, wenn sie nicht nur als Mengen übereinstimmen, sondern auch hinsichtlich der Reihenfolge ihrer Ecken gleich sind. Im Folgenden werden nur solche Vierecke $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ betrachtet, deren Eckenfolge mit der in bezug auf Q positiven Orientierung übereinstimmt.

Der Einfachheit halber empfiehlt es sich oft, ein Viereck als eine ebene Punktmenge aufzufassen; z. B. sprechen wir von inneren Punkten und von der abgeschlossenen Hülle eines Vierecks. Ist kein Mißverständnis möglich, so kann man ein Viereck auch in derselben Weise wie das entsprechende Jordangebiet bezeichnen.

Der Rand des Vierecks $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ wird durch die Ecken in vier Jordanbogen, die *Seiten* des Vierecks, zerlegt. Die Bogen $\widehat{z_1 z_2}$ und $\widehat{z_3 z_4}$ heißen die *a-Seiten*, die zwei übrigen Bogen die *b-Seiten* von Q.

Unter einem *Homöomorphismus des Vierecks* $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ auf das Viereck $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ wird eine solche topologische Abbildung $w : \overline{Q} \to \overline{Q'}$ verstanden, welche die Punkte z_i in die Punkte $w(z_i) = w_i$ überführt. Ist die Einschränkung von w auf Q dazu konform, so heißt w eine *konforme Abbildung des Vierecks* $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ auf das Viereck $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$. Zwei Vierecke können im Allgemeinen nicht aufeinander konform abgebildet werden, weil die Bilder von drei Randpunkten eine konforme Abbildung schon eindeutig bestimmen. Alle Vierecke teilen sich also in mehrere konforme Äquivalenzklassen auf.

2.4. Konformer Modul eines Vierecks. Aus dem Riemannschen Abbildungssatz folgt, daß jedes Viereck $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ auf ein Viereck $Q'(-1/k, -1, 1, 1/k)$ abgebildet werden kann, wo $0 < k < 1$ und Q'

die obere Halbebene ist. Der Wert von k wird dabei durch $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ eindeutig bestimmt. Aus der klassischen Theorie der elliptischen Integrale ergibt sich weiter, daß die Funktion w,

$$w(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}},$$

das Viereck $Q'(-1/k, -1, 1, 1/k)$ konform auf ein Viereck bezieht, das aus einem Rechteck und seinen Ecken besteht. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, nennen wir ein solches Viereck kurz ein Rechteck.

Durch Zusammensetzung der obigen Abbildungen wird ein beliebiges Viereck auf ein Rechteck konform abgebildet. Eine solche Abbildung wird im Folgenden die *kanonische* Abbildung des Vierecks genannt, und das betreffende Rechteck heißt das kanonische Rechteck des Vierecks.

Jede konforme Äquivalenzklasse von Vierecken enthält also Rechtecke, und alle miteinander ähnlichen Rechtecke gehören offensichtlich zu derselben Klasse. Umgekehrt folgt aus dem Spiegelungsprinzip, daß jede konforme Abbildung zwischen zwei Rechtecken eine Ähnlichkeitstransformation ist.

Alle kanonischen Rechtecke eines festen Vierecks Q haben also dasselbe Seitenverhältnis $a/b = M(Q)$, wo a die Länge der a-Seiten, b die Länge der b-Seiten bezeichnet. Die Zahl $M(Q)$ heißt der (*konforme*) *Modul* von Q. Zwei Vierecke sind also dann und nur dann konform äquivalent, wenn sie denselben Modul besitzen.

Führt man eine Umordnung der Ecken von Q aus, so verhält sich der Modul wie folgt:

$$M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = M(Q(z_3, z_4, z_1, z_2)) = 1/M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1)). \quad (2.1)$$

§ 3. Definition einer quasikonformen Abbildung

3.1. Dilatation eines Vierecks unter einem Homöomorphismus. Es sei G ein Gebiet und w ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von G. Ein Viereck $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, dessen abgeschlossene Hülle in G enthalten ist, wird durch w auf ein Viereck Q' abgebildet. Das Verhältnis $M(Q')/M(Q)$ der Moduln von Q' und Q heißt die *Dilatation* des Vierecks Q unter der Abbildung w.

Die Zahl

$$K(G) = \sup_{\overline{Q} \subset G} \frac{M(Q')}{M(Q)}$$

3

wird die ***maximale Dilatation*** von w im Gebiet G genannt. Da die Dilatationen von $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ und $Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$ wegen (2.1) zueinander reziproke Zahlen sind, ist $K(G)$ wenigstens gleich 1.

Ist w konform, so haben die Vierecke Q und Q' definitionsgemäß denselben Modul. Die Dilatation von Q ist dann also stets gleich 1, und somit ist auch $K(G) = 1$. Andererseits werden wir in 5.1 zeigen, daß die maximale Dilatation eines nichtkonformen, orientierungserhaltenden Homöomorphismus stets größer als 1 ist. $K(G)$ kann deshalb als ein Maß dafür angesehen werden, wie viel die Abbildung in G von der Konformität abweicht.

3.2. Quasikonforme Abbildung. Die quasikonformen Abbildungen können jetzt wie folgt definiert werden:

Definition. *Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus w des Gebietes G heißt quasikonform, wenn seine maximale Dilatation $K(G)$ endlich ist. Ist $K(G) \leqq K < \infty$, so wird w K-quasikonform genannt.*

~~Der im konformen Fall gebrauchten Sprechweise folgend nennen~~ wir einen quasikonformen Homöomorphismus auch *quasikonforme Abbildung*.

Die Forderung, daß eine quasikonforme Abbildung orientierungserhaltend sein soll, bringt gewisse formale Vereinfachungen mit sich. Andererseits gelten die meisten im Folgenden vorkommenden Sätze auch für eine „antiquasikonforme" Abbildung, die sich aus einer quasikonformen Abbildung und aus einer Spiegelung zusammensetzen läßt.

Aus der Definition folgt, daß eine konforme Abbildung 1-quasikonform ist. Wie wir schon erwähnten, wird in 5.1 bewiesen, daß umgekehrt jede 1-quasikonforme Abbildung konform ist.

Wie in der nachfolgenden Darstellung gezeigt wird, gestatten die quasikonformen Abbildungen viele andere, mit der obigen Definition in nicht-trivialer Weise äquivalente Charakterisierungen, die wir als Sätze aussprechen. Die obige Definition, die von Pfluger [1] und Ahlfors [1] herrührt, wird nach dem Vorschlag des ersteren die *geometrische Definition* genannt.

Aus der Definition gehen die folgenden Eigenschaften einer quasikonformen Abbildung sofort hervor:

Die Umkehrung einer K-quasikonformen Abbildung ist K-quasikonform. Eine aus einer K_1-quasikonformen und einer K_2-quasikonformen Abbildung zusammengesetzte Abbildung ist $K_1 K_2$-quasikonform.

3.3. Reguläre quasikonforme Abbildungen. Wir betrachten als Beispiel eine von Grötzsch [2] im Jahre 1928 eingeführte Klasse von Abbildungen, von denen in 3.4 gezeigt wird, daß sie nach der obigen

Part 2

(4)

gehört die entsprechende Aufgabe

$$\boldsymbol{A}^{+} \boldsymbol{x}^{+} = \lambda \boldsymbol{x}^{+} \tag{6b}$$

bei gleichen Eigenwerten λ. Zu einer unzerlegbaren Matrix mit schachbrettartig verteilten Vorzeichen gehört also gleichfalls eine positive Maximalwurzel als Eigenwert mit einem Eigenvektor mit Komponenten von wechselndem Vorzeichen $+ - + \ldots$.

Ein dem Einschließungssatz 2 ähnlicher ist für *hermitesche Matrix* $\boldsymbol{A}$ und die allgemeinere Eigenwertaufgabe

$$\boxed{\boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{D} \boldsymbol{x}} \tag{7}$$

mit positiver Diagonalmatrix $\boldsymbol{D} = \mathrm{Diag}(d_i)$, $d_i > 0$, die sogenannte *Aufgabe der Zwischenstufe* (zwischen der speziellen Aufgabe $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ und der allgemeinen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$) von COLLATZ aufgestellt worden[1]:

Satz 3: *Ist* $\boldsymbol{A}$ *eine hermitesche Matrix und* $\boldsymbol{D}$ *eine reelle positive Diagonalmatrix mit* $d_i > 0$, *bildet man mit einem beliebigen Vektor* $\boldsymbol{u}$ *mit nicht verschwindenden Komponenten* $u_i \neq 0$ *den transformierten Vektor* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ *mit den Komponenten* v_i *und damit die Quotienten*

$$\boxed{q_i = \frac{v_i}{d_i u_i}}, \tag{8}$$

so wird vom kleinsten und größten Quotienten mindestens einer der reellen Eigenwerte λ_j *der Aufgabe Gl. (7) eingeschlossen:*

$$\boxed{q_{min} \leqq \lambda_j \leqq q_{max}}. \tag{9}$$

Über die Nummer des von Gl. (9) eingeschlossenen Eigenwertes wird hier nichts ausgesagt[2]. Wieder kann man diesen Satz zur Eingrenzung eines diesmal beliebigen Eigenwertes λ_j durch passende Wahl von $\boldsymbol{u}$ praktisch verwerten, vgl. Anm. 1.

17.2. Spaltensummenkonstante und stochastische Matrizen

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten Matrizen $\boldsymbol{A}$ auf, bei denen die Spaltensummen

$$\sigma_k = a_{1k} + a_{2k} + \cdots a_{nk}$$

für alle Spalten k gleich sind, $\sigma_k = \sigma$. Für derartige Matrizen gilt

Satz 4: *Eine spaltensummenkonstante quadratische Matrix* $\boldsymbol{A}$ *mit der Spaltensumme* σ *hat den Eigenwert* σ. *Die Matrix* $\boldsymbol{A}^m$ *mit positiv ganzem*

[1] COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben [3], S. 304—309.

[2] Eine Aussage darüber findet man bei F. W. SINDEN: An oscillation theorem for algebraic eigenvalue problems and its applications. Diss. E. T. H. Zürich 1954. Prom. Nr. 2322.

*Exponenten m ist wieder spaltensummenkonstant mit Spaltensumme und Eigenwert σ^m. Ist **A** nichtsingulär, so ist auch A^{-1} spaltensummenkonstant mit Spaltensumme und Eigenwert $1/\sigma$.* —

*Summe und Produkt zweier spaltensummenkonstanter quadratischer Matrizen **A**, **B** sind wieder spaltensummenkonstant, und für die Spaltensummen der einzelnen Matrizen gilt*

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{A+B} &= \sigma_A + \sigma_B \\ \sigma_{AB} = \sigma_{BA} &= \sigma_A \cdot \sigma_B \end{aligned}}. \qquad \begin{aligned}(10a)\\(10b)\end{aligned}$$

Die erste Aussage folgt mit einem Vektor $\mathbf{s}' = (1, 1, \ldots, 1)$, der sich als Eigenvektor von $\boldsymbol{A}'$ erweist beim Eigenwert σ:

$$\boldsymbol{A}'\mathbf{s} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{n1} \\ a_{12} + \cdots + a_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma\mathbf{s}.$$

σ ist also Eigenwert zu $\boldsymbol{A}'$ und damit auch zu $\boldsymbol{A}$. Dann folgt σ^2 als Eigenwert und Spaltensumme bei gleichem Eigenvektor für $\boldsymbol{A}^2$ usf. Ebenso folgt aus $\boldsymbol{A}'\mathbf{s} = \sigma\mathbf{s} : \frac{1}{\sigma}\mathbf{s} = \boldsymbol{A}^{-1\prime}\mathbf{s}$. — Gl. (10a) ist unmittelbar einzusehen. Gl. (10b) sieht man so: Mit den Zeilenvektoren $\boldsymbol{a}^i$ von $\boldsymbol{A}$ und den Spalten $\boldsymbol{b}_k$ von $\boldsymbol{B}$ wird $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{b}_k)$ und damit die k-te Spaltensumme von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}_k + \cdots + \boldsymbol{a}^n\boldsymbol{b}_k \\ &= a_{11}b_{1k} + \cdots + a_{1n}b_{nk} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{n1}b_{1k} + \cdots + a_{nn}b_{nk} \\ \hline &= \sigma_A(b_{1k} + \cdots + b_{nk}) = \sigma_A \cdot \sigma_B. \end{aligned}$$

Die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1] auftretenden spaltensummenkonstanten Matrizen sind reell und nicht negativ mit Spaltensumme 1: die Elemente jeder Spalte stellen Wahrscheinlichkeiten $a_{ik} \geqq 0$ dar, deren Summe 1 ergibt. Die Matrix besitzt, wie aus den Sätzen 1, 2 und 4 folgt, die Maximalwurzel $\lambda_1 = \sigma = 1$ als einfachen Eigenwert. Von besonderem Interesse ist hier nun der Fall, daß die Matrizenpotenzen $\boldsymbol{A}^\nu$ mit wachsendem ν gegen eine Matrix $\boldsymbol{A}^\infty$ konvergieren, die lauter gleiche Spalten besitzt. Wir zeigen dazu den folgenden

[1] Schulz, G.: Grenzwertsätze für die Wahrscheinlichkeiten verketteter Ereignisse. Deutsche Math. Bd. 1 (1936), S. 665—699.

6

Satz 5: *Ist A eine nicht negative unzerlegbare Matrix konstanter Spaltensumme $\sigma = 1$ und sind sämtliche Eigenwerte λ_i von A mit Ausnahme der Maximalwurzel $\lambda_1 = 1$ dem Betrage nach* ***kleiner*** *als* 1:

$$\boxed{\lambda_1 = 1\,, \quad |\lambda_i| < 1} \qquad \text{für } i = 2, 3, \ldots, n, \tag{11}$$

so konvergiert die Folge der Matrizenpotenzen A^ν mit wachsendem ν gegen eine wiederum spaltensummenkonstante Matrix, deren Spalten sämtlich miteinander übereinstimmen:

$$\boxed{A^\nu \to A^\infty} \qquad \text{für } \nu \to \infty \tag{12}$$

$$\boxed{A^\infty = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a})}\,. \tag{13}$$

Die Spalte $\boldsymbol{a}$ dieser Grenzmatrix ist gleich dem zu $\lambda_1 = 1$ gehörigen auf Spaltensumme 1 normierten Eigenvektor von A:

$$\boxed{A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}}\,. \tag{14}$$

Die letzte Gleichung ist wegen (13) gleichbedeutend mit

$$A A^\infty = A^\infty\,. \tag{15}$$

Die Matrix A^∞ besitzt außer dem Eigenwert $\lambda_1 = \sigma = 1$ als Matrix vom Range 1 den $(n-1)$-fachen Eigenwert $\lambda = 0$. — Wir gehen nun aus von dieser durch Gl. (14) definierten Matrix A^∞ und bilden mit ihr die Matrix

$$B = A - A^\infty, \tag{16}$$

für die wegen Gl. (15) gilt

$$\left.\begin{array}{l} B^2 = A^2 - A^\infty \\ B^3 = A^3 - A^\infty \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Dann läßt sich zeigen, daß B die Eigenwerte

$$0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\,, \tag{18}$$

also die der Matrix A mit Ausnahme von $\lambda_1 = 1$ besitzt, d. h. aber lauter Eigenwerte vom Betrage < 1. Die Eigenvektoren der transponierten Matrizen $A', A^{\infty\prime}$ und B' sind die gleichen. Zunächst ist nämlich mit dem Vektor $\boldsymbol{s}' = (1, 1, \ldots, 1)$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{s}' A = \boldsymbol{s}' & \lambda_A = 1 \\ \boldsymbol{s}' A^\infty = \boldsymbol{s}' & \lambda_{A^\infty} = 1 \\ \hline \boldsymbol{s}'(A - A^\infty) = \boldsymbol{s}' B = \boldsymbol{o}\,, & \lambda_B = 0\,. \end{array}$$

7

Ist nun $\lambda \neq \lambda_1$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{y}$ zugehöriger Eigenvektor von $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{y}'$, so erhalten wir durch Rechtsmultiplikation mit $\boldsymbol{A}^\infty$ wegen (15)

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\infty = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}^\infty = \lambda \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}^\infty$$

und, hieraus wegen $\lambda \neq 1$: $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}^\infty = \boldsymbol{o}$. $\boldsymbol{y}$ ist also auch Eigenvektor zu $\boldsymbol{A}^\infty$ mit einem Eigenwert 0. Dann aber folgt aus

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}^\infty = \boldsymbol{o} \\ \hline \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\infty) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{B} = \lambda \boldsymbol{y}' . \end{array}$$

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ besitzt also die Eigenwerte (18), deren Beträge sämtlich < 1 sind. Für eine solche Matrix aber konvergiert, wie wir später sehen werden (§ 20.3), die geometrische Matrizenreihe

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^3 + \cdots,$$

das heißt es geht

$$\boldsymbol{B}^\nu = \boldsymbol{A}^\nu - \boldsymbol{A}^\infty \to \boldsymbol{O} \quad \text{für} \quad \nu \to \infty ,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

17.3. Schachbrettmatrizen

Hierunter verstehen wir Matrizen, deren Plätze schachbrettartig von Nullelementen und von im allgemeinen nichtverschwindenden Elementen besetzt sind. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Diagonalelemente von Null verschiedene oder Nullelemente sind.

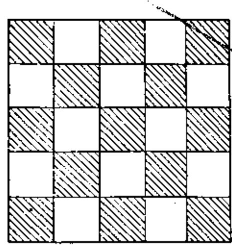

Abb. 17.1. Schachbrettmatrix, 1. Art

I. Diagonalelemente nicht durchweg Null, Abb. 17.1

Durch Vertauschen der Zeilen und entsprechendes Vertauschen der Spalten, wobei die Eigenwerteigenschaften erhalten bleiben, geht die n-reihige Ausgangsmatrix $\boldsymbol{A}$ über in die Form

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

mit der s-reihigen quadratischen Untermatrix $\boldsymbol{A}_1$ und der $(n-s)$-reihigen $\boldsymbol{A}_2$. Dabei ist

$$s = n - s = \frac{n}{2} \qquad \text{für gerades } n$$

$$s = \frac{n+1}{2}, \quad n - s = \frac{n-1}{2} = s - 1 \qquad \text{für ungerades } n .$$