German Exam (1)

W05

Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelektrons.

Einige Eigenschaften des Diracschen Drehelektrons werden näher analysiert, und zwar die Natur der monochromatischen de Broglie-Wellen, die Transformationseigenschaften der vier ψ-Komponenten, sowie der Energie-Strom-Vektor (dessen Zeitkomponente die Wahrscheinlichkeit ist *).

from here

Einleitung.

I. Herr P. A. M. Dirac hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit ** eine neue Behandlungsweise des quantenmechanischen Einkörperproblems vorgeschlagen, bei der gewisse Mängel der bisherigen relativistischen Einkörper-Gleichung *** auf einfache und befriedigende Weise behoben wurden. Sein Ansatz ermöglichte aber nicht nur die Behebung der genannten (relativistischen) Mängel, er ergab vielmehr auch — wie er l. c. zeigte — ganz von selbst die bekannten Spin-Eigenschaften des Elektrons: nämlich sein mechanisches Drehmoment $\frac{h}{4\pi}$, sowie seine magnetischen Momente $\frac{he}{8\pi mc}$, $\frac{he}{4\pi mc}$ im „inneren" bzw. „äußeren" Felde ****.

to here

Dieser überwältigende Erfolg der Diracschen Theorie läßt wohl kaum Zweifel in der Beziehung, daß mit ihr wesentliche Merkmale des

* Zusatz bei der Korrektur. In einer inzwischen erschienenen Arbeit (Proc. Roy. Soc. **118**, 351, 1928) hat Herr Dirac den erwähnten divergenzfreien Stromvektor gleichfalls aufgestellt. Da unsere Methode von der seinen verschieden ist, und gleichzeitig eine nähere Analyse der relativistischen Transformations-Eigenschaften der ψ gibt, sind die nachfolgenden diesbezüglichen Ausführungen vielleicht doch nicht ohne Interesse.

** Proc. Roy. Soc. **117**, 610, 1928.

*** Nämlich die von Fock, Gordon, Klein, Kudar und Schrödinger aufgestellte Wellengleichung

$$\sum_{k=1}^{4}\left\{\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}-\frac{e}{c}\Phi_k\right)^2+m^2c^2\right\}\psi=0,$$

wobei x_1, x_2, x_3 die drei räumlichen Koordinaten sind und $x_4 = ict$ ist, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 aber das elektromagnetische Viererpotential (Φ_1, Φ_2, Φ_3 reell, Φ_4 rein imaginär). Mit dieser behandelte Gordon den Comptoneffekt, ZS. f. Phys. **40**, 117, 1926; dort wird sie auch näher diskutiert.

**** Vgl. Dirac, l. c., bzw. S. 619, 620, 624.

2

relativistischen Verhaltens von „Massenpunkten" erfaßt sind* (wenn auch noch gewisse, von Dirac mit voller Schärfe hervorgehobene und gleich zu nennende Schwierigkeiten zunächst fortbestehen), und es ist daher wohl angezeigt, sich mit den Konsequenzen derselben im Detail auseinanderzusetzen. Denn die heutige „Transformationstheorie" der Quantenmechanik ist ihrem Wesen nach (im besonderen im ihr zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsbegriff) eine unrelativistische, auf der Idee der objektiven Gleichzeitigkeit beruhende**: es ist daher notwendig festzustellen, wie sie sich unter dem Einfluß eines durch und durch relativistischen Modells vom „Massenpunkt" verwandelt.

Außerdem ist in die Diracsche Theorie ein unangenehmes Erbstück aus der früheren (vgl. Anm.***, S. 868) relativistischen Gleichung mitgekommen: nämlich die Unbestimmtheit des Vorzeichens der Ladung des Elektrons, bzw. der Richtung des Zeitablaufs (diese verursacht es, daß Diracs Wellenfunktion nicht von zwei Wellenfunktionen im Schrödingerschen Sinne — wie es das Auftreten des Spins erfordern würde — gebildet wird, sondern von vier)***. Auch die Rolle dieser Komplikation soll uns beschäftigen, wenn wir auch keineswegs in der Lage sind, sie erschöpfend zu behandeln.

Zum Schlusse will ich noch darauf hinweisen, daß ich beim Entstehen dieser Arbeit wesentliche Anregungen in Gesprächen mit Herrn P. Jordan und E. Wigner in Göttingen empfangen habe, denen ich hier wärmstens danken möchte.

continue here

Allgemeines.

Monochromatisch-ebene Wellen in der Diracschen Theorie.

II. Diracs Theorie beruht bekanntlich auf dem folgenden Prinzip: Die alte relativistische Gleichung (ohne Kraftfelder!)

$$\left(p^2 + q^2 + r^2 - \frac{W^2}{c^2} + m^2 c^2\right)\psi = 0$$

* So z. B., daß der Spin jedem materiellen Gebilde, auch dem Proton, aus relativistischen Gründen zukommen muß.

** Man sieht dies schon daran, daß der Wahrscheinlichkeit (der Koordinatenstatistik) $|\psi|^2$ der Transformationstheorie in der Wellentheorie Schrödingers die elektrische Ladungsdichte entspricht — und diese ist keine relativistische Invariante, sondern die Zeitkomponente eines Vektors.

*** Vgl. Dirac, l. c. S. 610.

3

$\left(p, q, r, W\right.$ sind die Impuls- und Energieoperatoren $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\Big)$ ist unbefriedigend, weil sie von zweitem Grade in der Zeit ist, sie kann aber durch die folgende ersetzt werden:

$$\left(\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r + \gamma_4 \frac{W}{ci} + m c i\right)\psi = 0,$$

wenn die $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ solche Operatoren sind, die nicht auf x, y, z, t operieren, und den Gleichungen

$$\gamma_k^2 = 1, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$
$$\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 0, \quad (k \neq l, \quad k, l = 1, 2, 3, 4),$$

genügen. Daher muß es weitere Variablen ζ geben, auf die die γ_k operieren. Wenn ζ nur endlich vieler Werte fähig ist, so sind die γ_k Matrizen mit entsprechend viel Zeilen und Kolonnen — die kleinste Zahl, für die die obigen Bedingungen der γ_k erfüllbar sind, ist aber vier. Somit ist ζ vierwertig, und die γ_k vierdimensionale Matrizen.

Dirac zeigte, daß es solche Systeme γ_k gibt, und zwar im wesentlichen nur eines: wenn γ_k ein solches System ist, so entstehen alle anderen derartigen Systeme γ'_k durch

$$\gamma'_k = A^{-1}\gamma_k A, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

wo A eine beliebige (vierdimensionale) Matrix ist*.

Wenn ein Feld da ist, so sei $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\, \Phi_4 = iV$ das Viererpotential**, dann gewinnt Dirac seine Gleichung aus der feldfreien durch Ersetzen von p, q, r, W mit

$$p - \frac{e}{c}\Phi_1, \quad q - \frac{e}{c}\Phi_2, \quad r - \frac{e}{c}\Phi_3, \quad W - eV,$$

also auf die übliche Art:

$$\left[\gamma_1\left(p - \frac{e}{c}\Phi_1\right) + \gamma_2\left(q - \frac{e}{c}\Phi_2\right) + \gamma_3\left(r - \frac{e}{c}\Phi_3\right) + \gamma_4 \frac{W - eV}{ci} + mci\right]\Phi = 0^{***}.$$

Von dieser Gleichung wollen wir zunächst die monochromatisch-ebenen Wellenlösungen angeben, d. h. die kräftefrei mit gegebenem

* Vgl. Dirac, l. c. § 3.

** $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, V$ reell, für $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ ist V das gewöhnliche elektrostatische Potential.

*** Wenn man $mci\psi$ auf die linke Seite schafft und quadriert, so kommt man nicht, wie im feldfreien Falle, zur früheren relativistischen Gleichung, es treten vielmehr die Spinglieder auf (l. c. S. 619), die dem „äußeren" magnetischen Felde entsprechen.

4

Impuls beweglichen Elektronen beschreiben. Dabei wird einiges Licht auf die eingangs erwähnte Schwierigkeit des Ladungsvorzeichens fallen, sowie die dem Spin entsprechende Polarisation der de Brogliewellen (nach C. G. Darwin) in Evidenz gesetzt werden.

end

III. Die Wellenfunktion ψ hängt von den Variablen x, y, z, t und ζ ab:

$$\psi = \psi\,(x\,y\,z\,t;\,\zeta),$$

wo ζ nur der vier Werte 1, 2, 3, 4 fähig ist; wir werden daher die Abhängigkeit von ihm durch einen Index andeuten:

$$\psi\,(x\,y\,z\,t;\,\zeta) = \psi_\zeta\,(x\,y\,z\,t),$$

derart, daß ψ vier gewöhnliche (Raum-Zeitliche) Wellenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ entsprechen. Wir können daher ψ auch als einen von x, y, z, t allein abhängigen Vektor im vierdimensionalen komplexen Raume* auffassen, seine Komponenten sind die $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$.

Im Falle einer monochromatisch-ebenen Welle mit den Impulsen p_0, q_0, r_0, W_0 ist also

$$\psi = \mathfrak{v}\,.\,e^{\frac{2\pi i}{h}(p_0 x + q_0 y + r_0 z + W_0 t)},$$

wo $\mathfrak{v}$ ein (konstanter, komplex-vierdimensionaler) Vektor ist. Wann befriedigt er die kräftefreie Diracsche Gleichung? Es muß offenbar

$$\left(p_0\gamma_1 + q_0\gamma_2 + r_0\gamma_3 + \frac{W_0}{ci}\gamma_4 + m\,c\,i\,1\right)\mathfrak{v} = 0$$

sein, hier handelt es sich aber um ein rein vierdimensional-geometrisches Problem: $p_0, q_0, r_0, \frac{W_0}{ci}, m\,c\,i$ sind gewöhnliche Zahlen, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, 1$ Matrizen**.

Wir führen die Matrizen

$$p_0\gamma_1 + q_0\gamma_2 + r_0\gamma_3 + \frac{W_0}{ci}\gamma_4 + m\,c\,i\,1 = A$$

$$p_0\gamma_1 + q_0\gamma_2 + r_0\gamma_3 - \frac{W_0}{ci}\gamma_4 + m\,c\,i\,1 = B$$

---

* Man hüte sich, diesen mit dem reellen, zufällig auch vierdimensionalen $x\,y\,z\,t$-Raume, der „Welt“, zu verwechseln!

** Wie $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ gewählt werden (unter Wahrung der Bedingungen aus II), ist zunächst gleichgültig, 1 ist die Einheitsmatrix. Wenn wir von Matrizen und Vektoren schlechthin sprechen, so sind stets komplex-vierdimensionale gemeint; wenn $X = \{x_{kl}\}$ eine Matrix und $\mathfrak{v} = v_1, v_2, v_3, v_4$ ein Vektor ist, so ist $X\mathfrak{v} = \mathfrak{w} = w_1, w_2, w_3, w_4$ der Vektor mit den Komponenten $w_k = \sum_{l=1}^{4} x_{kl} v_l$.

1

werden. Der vorhergehende Teil der Untersuchung liefert ein rationales Rechenverfahren, um aus den Koeffizienten $u_1, \ldots, u_{T-1}$ das konstante Glied u_0 zu bestimmen; dabei wird sich für T eine nur von k, n und f abhängige obere Schranke ergeben. Für den gekürzten Nenner N von Q_k wird die Abschätzung

$$N < (f^2 k n)^{f^6 k^2 n^2} \tag{11}$$

herauskommen; auch die hier auftretende Schranke hängt offenbar nur von k, n, f ab. Allein im speziellen Falle $k = 1$, $f = 1$ bei geradem n werden die sich ergebenden beiden oberen Schranken auch noch von der Diskriminante d abhängen; ob dies wirklich notwendig ist, muß dahingestellt bleiben.

start

2. Algebraische Approximation elliptischer Modulformen

Unter einer elliptischen Modulform vom Gewichte λ wird eine in der oberen Halbebene reguläre Funktion $\varphi(z)$ verstanden, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt: Unter den sämtlichen Transformierten

$$\varphi_M(z) = (cz + d)^{-\lambda} \varphi(z^*), \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{12}$$

bei allen Modulsubstitutionen

$$z^* = \frac{az + b}{cz + d}$$

gibt es nur endlich viele verschiedene Funktionen, und keine von ihnen hat in ihrer Fourierschen Reihe ein Glied mit negativem Exponenten. Dabei wird λ als natürliche Zahl oder 0 vorausgesetzt; ferner sei die Anzahl m der verschiedenen Transformierten als Grad von $\varphi(z)$ bezeichnet. Ist $m = 1$, also

$$\varphi_M(z) = \varphi(z)$$

bei allen Modulsubstitutionen, so möge $\varphi(z)$ eine absolute Modulform genannt werden; dafür wird aber im vorliegenden Abschnitt von nun an kurz Modulform gesagt, da keine anderen auftreten.

Für den Rang $r_\lambda = r$ der linearen Schar aller Modulformen vom Gewichte λ gilt $r = 0$ bei ungeradem λ und

$$r = \left[\frac{\lambda}{12}\right] \quad (\lambda \equiv 2 \pmod{12}), \qquad r = \left[\frac{\lambda}{12}\right] + 1 \quad (\lambda \not\equiv 2 \pmod{12}) \tag{13}$$

bei geradem λ. Eine Basis ergeben die r Potenzprodukte

$$G_{\alpha\beta} = G_4^\alpha G_6^\beta \qquad (4\alpha + 6\beta = \lambda) \tag{14}$$

mit nicht-negativen, ganzen rationalen α, β und

$$G_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n, \quad G_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i z},$$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k \qquad (k, n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

2

Bei festem λ seien die r Funktionen in (14) mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ bezeichnet, wobei etwa nach wachsenden Werten von α geordnet werde.

Ist

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

eine Reihe nach Potenzen von q, so seien für $t = 0, 1, 2, \ldots$ die Partialsummen

$$\sum_{n=0}^{t-1} a_n q^n = (f)_t$$

gesetzt und Abschnitte von f genannt. Bekanntlich sind nicht nur $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ nach Definition linear unabhängig, sondern bereits die r Abschnitte $(\gamma_k)_r$ $(k = 1, \ldots, r)$. Nimmt man noch die konstante Modulform $\gamma_0 = 1$ vom Gewichte 0 hinzu, so sind aber auch wieder die $r + 1$ Abschnitte $(\gamma_k)_{r+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ linear unabhängig, wie in einer vorangehenden Untersuchung gezeigt worden ist. Es handelt sich weiterhin um eine Verallgemeinerung dieses Resultats.

Es seien m und g gegebene natürliche Zahlen, von denen g gerade ist. Man nehme jetzt $\lambda = lg$ mit $l = 0, 1, 2, \ldots, m$ und bilde die Basiselemente $G_{\alpha\beta}$ für die Modulformen der Gewichte $0, g, 2g, \ldots, mg$, bei denen also jeweils

$$4\alpha + 6\beta = lg \qquad (l = 0, \ldots, m)$$

wird. Ihre Anzahl werde mit $h + 1$ bezeichnet, so daß

$$h + 1 = \sum_{l=0}^{m} r_{lg} = 1 + \sum_{l=1}^{m} r_{lg} \tag{16}$$

wird. Der triviale Fall $h = 0$ tritt nur bei $m = 1$, $g = 2$ ein, und es sei weiterhin $h \geqq 1$. Die $h + 1$ Modulformen $G_{\alpha\beta}$ mögen durchlaufend wieder mit $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_h$ bezeichnet werden, wobei nach wachsendem Gewicht geordnet sei und bei gleichem Gewicht nach wachsenden Werten von α, so daß also $\gamma_0 = 1$ ist und die Bezeichnung für $m = 1$ mit der früheren übereinstimmt. Die Funktionen γ_k $(k = 0, \ldots, h)$ sind wiederum linear unabhängig, und es erhebt sich die Frage nach der kleinsten Zahl t, für welche bereits die $h + 1$ Abschnitte $(\gamma_k)_t$ voneinander linear unabhängig sind. Es ist klar, daß $t \geqq h + 1$ sein muß, und im Falle $m = 1$ ist nach obiger Bemerkung auch genau $t = h + 1$. Allgemein wird die folgende Aussage bewiesen werden.

Satz 1. *Es ist*

$$t < \tfrac{1}{2} m^5 g^3. \tag{17}$$

Im Falle $m = 1$ liefern (13) und (16) die Abschätzungen

$$r_0 = 1, \quad r_g \leqq \left[\frac{g}{12}\right] + 1 \leqq \frac{g}{2}, \quad h + 1 \leqq \frac{g}{2} + 1 < \frac{1}{3} g^3,$$

3

wonach wegen $t = h + 1$ die schwächere Aussage (17) folgt. Auch im Falle $m > 1$ ist die in (17) gegebene obere Schranke von t nicht die bestmögliche. Im Verlaufe der Untersuchung werden sich bessere Abschätzungen von t ergeben, die aber kompliziertere Gestalt haben und doch nicht zum genauen Werte von t als Funktion von m und g führen. Die wirkliche Bestimmung von t für $m > 1$ bleibt als schwieriges Problem offen.

~~Die Aussage von Satz 1 kann in eine~~ andere Form gebracht werden, indem man die Determinanten

$$D = D(l_0, l_1, \ldots, l_h) \tag{18}$$

von $h + 1$ Reihen einführt, die sich aus den Koeffizienten von q^{l_ν} ($\nu = 0, \ldots, h$; $0 \leqq l_0 < l_1 < \cdots < l_h$) in den Fourierschen Reihen der Funktionen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_h$ bilden lassen. Bei jedem festen $l_h = n - 1 \geqq h$ mögen diese D als Abschnittsdeterminanten der Ordnung n bezeichnet werden; es sind ganze rationale Zahlen, und es sei d_n ihr größter gemeinsamer Teiler für alle Ordnungen $\leqq n$. Dabei möge $d_n = \infty$ gesetzt werden, wenn alle D mit $l_h < n$ den Wert 0 haben. Die lineare Unabhängigkeit von $\gamma_0, \ldots, \gamma_h$ besagt, daß d_n für alle genügend großen n endlich ist; nach der obigen Definition tritt das genau für alle $n \geqq t$ ein, und Satz 1 liefert eine obere Abschätzung für den kleinsten Wert t von n. Die folgende Aussage gibt eine Abschätzung von d_t selber.

Satz 2. *Es ist*

$$d_t < (mg)^{\gamma^5 g^2}. \tag{19}$$

Auch bei dieser Ungleichung ist auf eine schärfere, aber kompliziertere Schranke verzichtet worden. Der Beweis von Satz 2 wird sich leicht aus den zu Satz 1 führenden Überlegungen ergeben. Beim Beweise von Satz 1 wird die funktionentheoretische Natur der γ_k eine Rolle spielen, sowie außerdem der arithmetische Charakter der Fourierschen Koeffizienten, die nämlich sämtlich ganz rational sind.

Sind $A = A(q)$ und $B = B(q)$ zwei bei $q = 0$ reguläre analytische Funktionen der komplexen Variablen q, so wird in üblicher Weise durch die Formel $A \prec B$ ausgedrückt, daß in den Entwicklungen nach Potenzen von q die Reihe für A durch die für B majorisiert wird. Zur Abkürzung wird noch

$$\gamma = \sqrt[4]{1440\,\zeta(3)} \tag{20}$$

gesetzt, wonach $1 < \gamma < 7$ ist.

Hilfssatz 1. *Es ist*

$$\gamma_k \prec (\gamma(1-q)^{-1})^{mg} \qquad (k = 1, \ldots, h). \tag{21}$$

Beweis. Für die in (15) erklärte Summe $\sigma_k(n)$ gilt die Abschätzung

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k = n^k \sum_{d \mid n} d^{-k} < n^k \zeta(k) \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

This is a rather old text (by Riemann), containing one of the most famous sentences in mathematics. Here are a few clues translating old German to modern German.

Theil= Teil (Mittheilung=Mitteilung, Bestandtheil=Bestandteil)
Function=Funktion
convergiren= konvergieren
Werth=Wert (Unstetigkeitswerth=Unstetigkeitswert, einwerthig=einwertig)
That=Tat

(3) (Zu Seite 139.) Den in §. 25 angeregten Gedankengang haben J. Tho
(Journal für Mathematik Bd. 66, 71, 75), Fuchs (ebenda Bd. 73) und F. Kl
(Mathematische Annalen Bd. 36) weiter verfolgt.

(4) (Zu Seite 142.) Ueber die Form der algebraischen Function f mögen noch ein
Bemerkungen folgen. Ist n der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Grössen
und g_ν, so ist die $n$te Potenz von f eine einwerthige Function sowohl von (s, z)
von sämmtlichen Grössenpaaren (σ, ζ) und folglich f die $n$te Wurzel aus ei
rationalen Function. Diese rationale Function muss als Function von (z, s) so
stimmt werden, dass sie für die p Grössenpaare (σ, ζ) unendlich von der n
Ordnung wird, und dass von den np Punkten, für welche sie unendlich k
wird, ebenfalls je n zusammenfallen.

Ist l irgend eine Function von (z, s), welche an den Querschnitten dieselb
Factoren erlangt, wie f, und bezeichnet l_μ den Werth dieser Function für
Werthenpaar (σ_μ, ζ_μ), so ist $f \cdot l^{-1}\, l_1\, l_2 \ldots l_p$ eine rationale Function φ
(z, s) und sämmtlichen Grössen (σ, ζ); also:

$$f = \frac{\varphi l}{l_1\, l_2 \ldots l_p}.$$

[Bemerkung aus den in Riemann's Nachlass befindlichen Entwürfen zur v
stehenden Abhandlung.]

(1)

(Riemann)

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie
[d]urch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden
[la]ssen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich
[vo]n der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache
[d]urch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Prim-
[za]hlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss
[un]d Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen
[M]ittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von
[E]uler gemachte Bemerkung, dass das Product

start

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

[we]nn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden.
[Di]e Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese
[be]iden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne
[ic]h durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von
[s] grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig blei-
[be]nder Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

[er]hält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

2

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2\sin \pi s\, \Pi(s-1)\,\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist. (1)

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n\,2\pi i$ aber ist $= (-n\,2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

$$2\sin \pi s\, \Pi(s-1)\,\zeta(s) = (2\pi)^s\, \Sigma n^{s-1}\left((-i)^{s-1} + i^{s-1}\right),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1-s$ verwandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum\frac{1}{n^s}$

3

einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\,\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x}\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

setzt,

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

oder da

$$2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right), \text{ (Jacobi, Fund. S. 184) *)}$$

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - (tt + \tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)\,x^{-\frac{3}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx$$

oder auch

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}\,x^{-\frac{1}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln. Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log\zeta(s) = -\Sigma\log(1-p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t) = 0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

*) Jacobi's gesammelte Werke Bd. I. S. 235.

$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d \log \xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werth von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ un deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruch theil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) gleich $\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$; diese Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegende Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der Tha etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerding ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, so kann man $\log \xi(t)$ durch

$$\Sigma \log \left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

ausdrücken; denn da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Grösse t mit t nur wie $\log \frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t \log t$; er unterscheidet sich also von $\log \xi(t)$ um eine Function von tt, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und mit tt dividirt für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Werth durch Einsetzung von $t = 0$ bestimmt werden kann.

Mit diesen Hülfsmitteln lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl, wenn aber x eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ grösser, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log \xi(s) = -\Sigma \log(1 - p^{-s}) = \Sigma p^{-s} + \frac{1}{2} \Sigma p^{-2s} + \frac{1}{3} \Sigma p^{-3s} + \cdots$$

$$p^{-s} \text{ durch } s \int_p^\infty x^{-s-1} dx, \; p^{-2s} \text{ durch } s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \ldots$$

erhält man

$$\frac{\log \xi(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx,$$

nn man

$$F(x) + \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

urch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a + bi$ von wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} d \log x$$

ilt, so kann man mit Hülfe des Fourier'schen Satzes die Function h urch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ eell ist und

$$g(a + bi) = g_1(b) + i g_2(b),$$

n die beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x) x^{-a} \cos(b \log x) \, d \log x,$$

$$i g_2(b) = -i \int_0^\infty h(x) x^{-a} \sin(b \log x) \, d \log x.$$

Wenn man beide Gleichungen mit

$$(\cos(b \log y) + i \sin(b \log y)) \, db$$

multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man in beiden uf der rechten Seite nach dem Fourier'schen Satze $\pi h(y) y^{-a}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und mit $i y^a$ multiplicirt,

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt. (*)

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Aenderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig allgemein