German Exam Fall 2006

Translate as much as you can from any of the three sections, starting at the beginning of the text.

Der Begriff der Grenze.

Von

H. Steinhaus in Jaslo (Österreich).

Die Aufgabe, die hier behandelt werden soll, ist, ein möglichst einfaches System von Axiomen anzugeben, mit deren Hilfe man die Begriffe „*Grenze*“ und „*konvergente Folge*“ definieren kann, ohne die ziemlich komplizierten Ungleichungen der üblichen Definitionen einzuführen.*)

Wir werden zeigen, daß die gebräuchliche Definition unseren Axiomen genügt, und daß sie die einzige ist, die es tut; die Hauptsache aber wird in der Untersuchung der *Unabhängigkeit* der Axiome liegen; die gewonnenen Resultate werden zeigen, daß man unser System durch kein einfacheres ersetzen kann. Zu diesem Zweck werden wir „Pseudokonvergenzen“ konstruieren, nach der Methode, die seit den Arbeiten Hilberts über die Grundlagen der Geometrie klassisch geworden ist. Am Schlusse kommt das eigentümliche Verhalten der einfacheren Systeme zur Sprache.

§ 1.

Definitionen.

Wir gehen hier nicht näher auf die übliche Definition der Grenze und der konvergenten Folge ein, wir heben nur hervor, daß wir nur unendliche Folgen behandeln, und ferner, daß wir mit dem heutigen Gebrauch übereinstimmend die „gegen unendlich konvergenten Folgen“ immer als *divergent* bezeichnen werden. Wenn eine Folge

$$\{s_n\} \equiv s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots,$$

die Eigenschaft hat, daß alle ihre Glieder, absolut genommen, kleiner sind, als eine feste Zahl N, werden wir sie als *beschränkt* bezeichnen. Wenn eine Folge $\{s_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{p_n\}$ enthält, so nennen wir den Grenzwert der letzteren eine *Teilgrenze* der Folge $\{s_n\}$. Um Mißver-

*) Wir meinen hier die *logische* Einfachheit und *logische* Kompliziertheit; für die *Anwendungen* bleibt die gebräuchliche Definition immer die einfachste.

ection 1

ständnissen vorzubeugen, erinnern wir noch daran, daß wir uns auf reelle Zahlen beschränken wollen.

Die Worte *konvergent, divergent, Grenzwert* werden in der Folge nur in dem üblichen Sinne gebraucht, ebenso die Schreibweise $a = \lim_{n=\infty} \{a_n\}$.

Wir betrachten nun die Menge Ω aller möglichen Folgen und wählen eine Untermenge M dieser Menge; einer jeden Folge $\{a_n\}$, die zu M gehört, soll eine und nur eine endliche Zahl a entsprechen; a wird dadurch eine Funktion von abzählbar vielen Variablen $a = f[\{a_n\}]$ oder kürzer geschrieben

$$a = f\{a_n\}.$$

Wir unterwerfen die Menge M und die Funktion f gewissen Bedingungen, die wir *Axiome* nennen. Durch diese Bedingungen werden eine oder mehrere Mengen M mit den entsprechenden Funktionen implizit definiert werden: wir sagen, daß wir damit ein *Summationsverfahren* definiert haben.

§ 2.

Die Axiome.

Unser vollständiges System besteht aus den sieben folgenden Axiomen:

1. Wenn eine Folge $\{a_n\}$ zu M gehört, gehört eine jede Teilfolge von $\{a_n\}$ zu M.

2. Wenn $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zu M gehören und $\{b_n\}$ eine Teilfolge der Folge $\{a_n\}$ ist, so ist $f\{a_n\} = f\{b_n\}$.

3. Wenn $\{a_n\}$ zu M gehört, so gehört auch $\{k + a_n\}$ zu M.

4. Wenn $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zu M gehören und $a_n + k = b_n$ ist (für alle n), so ist $f\{b_n\} = k + f\{a_n\}$.

5. Wenn alle a_n positiv sind, so ist $f\{a_n\}$ nicht negativ.

6. Wenn alle a_n negativ sind, so ist $f\{a_n\}$ nicht positiv.

7. Wenn M' eine Menge von Folgen bezeichnet, die mit einer entsprechenden Funktion f' ein den vorhergehenden Axiomen gehorchendes Summationsverfahren definiert, so ist M' entweder mit M identisch, oder eine Untermenge von M.*)

Man sieht unmittelbar, daß man die Bedingungen **1 2 3 4 5 6** erfüllt haben wird, wenn man für M die Menge aller konvergenten Folgen nimmt — diese Menge wollen wir immer mit $\overline{M}$ bezeichnen —, und $f\{a_n\} = \lim_{n=\infty} \{a_n\}$ setzt. Es wird aber auch **7** erfüllt sein. Es sei nämlich Π ein Summationsverfahren, Γ die zugehörige Menge und φ die zugehörige Funktion; wenn Π den Axiomen **1 2 3 4 5 6** gehorcht, so gelten die beiden folgenden Sätze:

*) Ein „Vollständigkeits-Axiom“.

α) Für alle konvergenten, zu Γ gehörenden Folgen $\{a_n\}$ *ist*

$$\varphi\{a_n\} = \lim_{n=\infty}\{a_n\}.$$

Es sei $\alpha = \lim_{n=\infty}\{a_n\}$; $\varphi\{\alpha_n\} - \alpha = \varepsilon$; **3** und **4** geben:

$$\varphi\{\alpha_n - \alpha + \delta\} = \varphi\{\alpha_n\} - \alpha + \delta = \varepsilon + \delta; \quad \varphi\{\alpha_n - \alpha - \delta\} = \varepsilon - \delta.$$

Sei δ eine positive Zahl; die Gleichung $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$ belehrt uns, daß $\{\alpha_n + \delta - \alpha\}$ unendlich viele positive Glieder enthält, und **1 2 5** sagen aus, daß $\varepsilon + \delta = \varphi\{\alpha_n - \alpha + \delta\}$ nicht negativ ist; $\{\alpha_n - \delta - \alpha\}$ hat unendlich viele negative Glieder, und aus **1 2 6** folgt, daß $\varepsilon - \delta = \varphi\{\alpha_n - \delta - \alpha\}$ nicht positiv ist. Da aber δ eine beliebige positive Zahl ist, so folgt

$$\varepsilon = 0, \quad \text{oder} \quad \varphi\{\alpha_n\} = \alpha = \lim\{\alpha_n\} \quad \text{w. z. b. w.}$$

β) Γ kann keine divergenten Folgen enthalten. Eine divergente Folge hat immer wenigstens eine der drei folgenden Eigenschaften: entweder hat sie zwei verschiedene Teilgrenzen, oder sie enthält eine Teilfolge mit positiven Gliedern, die unbegrenzt wachsen, oder eine Teilfolge mit negativen Gliedern, deren absolute Beträge unbegrenzt wachsen. Sei $\{d_n\}$ eine divergente Folge, die zu Γ gehört; enthielte sie zwei Teilfolgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, die gegen *verschiedene* Grenzen konvergierten, so hätten wir:

$$\{a_n\} \text{ und } \{b_n\} \text{ gehören zu } \Gamma \text{ (nach 1)},$$
$$\varphi\{d_n\} = \varphi\{a_n\},\ \varphi\{d_n\} = \varphi\{b_n\} \text{ (nach 2)},$$
$$\varphi\{a_n\} = \lim_{n=\infty}\{a_n\},\ \varphi\{b_n\} = \lim_{n=\infty}\{b_n\} \text{ (nach Satz } \alpha)),$$

was der Voraussetzung $\lim_{n=\infty}\{a_n\} \neq \lim_{n=\infty}\{b_n\}$ widerspricht. Enthielte $\{d_n\}$ eine Teilfolge mit unbegrenzt wachsenden positiven Gliedern, so würden wir setzen $d = \varphi\{d_n\}$; **3** und **4** ergeben dann:

$$-1 = \varphi\{d_n - d - 1\}.$$

Nun enthält $d_n - d - 1$ sicher eine Teilfolge $\{p_n\}$ mit lauter positiven Gliedern; **1** und **2** lassen schließen:

$$\varphi\{p_n\} = \varphi\{d_n - d - 1\} = -1,$$

was dem Axiom **5** widerspricht. Analog erledigt man den dritten Fall. Somit ist β) bewiesen.

Aus diesen Sätzen folgt, daß das der gewöhnlichen Konvergenz entsprechende Summationsverfahren $\bar{\mathrm{S}}$ auch dem Axiom **7** genügt. Denn der Satz β) sagt, daß, wenn ein Summationsverfahren die Axiome **1 2 3 4 5 6** befriedigt, die zugehörige Menge nicht über $\overline{\mathrm{M}}$ hinausreicht. Dies ist aber gerade, was wir beweisen wollten. — Wir wissen jetzt, daß $\bar{\mathrm{S}}$ das System **1 2 3 4 5 6 7** befriedigt. Ist es das einzige Summationsverfahren, welches dieses leistet?

7 sagt uns, daß *nur eine Menge zulässig ist*; da wir aus dem Vorhergehenden wissen, daß diese Menge $\overline{\mathsf{M}}$ ist, folgt die Definition von $\overline{\mathsf{f}}$ (der entsprechenden Funktion) ohne Zweideutigkeit aus **1 2 3 4 5 6** und α). *Die Frage ist also zu bejahen und damit ist die Äquivalenz unseres Axiomsystems mit der gewöhnlichen Definition der konvergenten Folgen und der Grenze erwiesen.*

§ 3.

Die Unabhängigkeit der Axiome.

Zunächst sehen wir, daß das System **1 2 3 4 5 6** nicht genügt, um daraus das der gewöhnlichen Konvergenz entsprechende Summationsverfahren $\overline{\mathsf{S}}$ abzuleiten. Um dies zu zeigen, nehmen wir für M die Menge aller Folgen $\{k\} \equiv k, k, k, \cdots, k, \cdots$ und setzen $f\{k\} = k$. Das so gebildete Summationsverfahren erfüllt **7** nicht, obwohl es **1 2 3 4 5 6** erfüllt. Man kann ebenso leicht zeigen, daß keines der sechs ersten Axiome eine Folge der fünf übrigen ist.

Definieren wir die Menge M als bestehend aus:	und die zugehörige Funktion, wie folgt:
(α) allen Folgen der Form $\left\{k + \frac{1}{2^n}\right\}$,	$f\left\{k + \frac{1}{2^n}\right\} = k$,
(β) allen Folgen $\{a_n\}$,	$f\{a_n\} = a_1$,
(γ) der Folge $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ mit ihren sämtlichen Teilfolgen,	$f = 0$,
(δ) sämtlichen konvergenten Folgen,	$f\{a_n\} = 2\lim\limits_{n=\infty}\{a_n\}$,
(ε) „ „ „	$f\{a_n\} = -1 + \lim\limits_{n=\infty}\{a_n\}$,
(ζ) „ „ „	$f\{a_n\} = +1 + \lim\limits_{n=\infty}\{a_n\}$.

Wir haben damit sechs Summationsverfahren konstruiert und wir überlassen es dem Leser zu verifizieren, daß das Summationsverfahren

(α)	dem	System	**2 3 4 5 6**	genügt,	ohne	**1**	zu	genügen,
(β)	„	„	**1 3 4 5 6**	„	„	**2**	„	„ ,
(γ)	„	„	**1 2 4 5 6**	„	„	**3**	„	„ ,
(δ)	„	„	**1 2 3 5 6**	„	„	**4**	„	„ ,
(ε)	„	„	**1 2 3 4 6**	„	„	**5**	„	„ ,
(ζ)	„	„	**1 2 3 4 5**	„	„	**6**	„	„ .

Gehen wir jetzt zum Axiom **7** über. Sein Inhalt variiert mit den vorhergehenden Axiomen, und man sollte eigentlich schreiben **7 = 7(1 2 3 4 5 6)**, um dieses hervorzuheben. Man kann z. B. nicht a priori behaupten, daß, wenn **1 2 3 4 5 6 7(1 2 3 4 5 6)** erfüllt sind, auch das System **1 2 3 4 5 7(1 2 3 4 5)** erfüllt sei (dieses wäre sogar in unserem Falle falsch). Die Schwierigkeiten, die damit verbunden sind, werden durch den folgenden Satz beseitigt:

Das Summationsverfahren $\bar{\mathsf{S}}$ *genügt keinem der Axiomsysteme* I, II, III, IV, V, VI *der beigefügten Tabelle*

I. **2 3 4 5 6 7(2 3 4 5 6)**
II. **1 3 4 5 6 7(1 3 4 5 6)**
III. **1 2 4 5 6 7(1 2 4 5 6)**
IV. **1 2 3 5 6 7(1 2 3 5 6)**
V. **1 2 3 4 6 7(1 2 3 4 6)**
VI. **1 2 3 4 5 7(1 2 3 4 5)**

Und zwar:

$\bar{\mathsf{S}}$ *genügt nicht dem Systeme*

I., weil man ein Summationsverfahren S^{I} herstellen kann, bei welchem die zugehörige Menge M^{I} aus $\overline{\mathsf{M}}$ und aus allen Folgen $\{a_n\}$ besteht, die die Eigenschaft haben:

$$a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < \cdots,$$

wobei die a_n unbegrenzt wachsen; für diese Folgen definiert man $f^{\mathrm{I}}\{a_n\} = a_1$, während für die $\{c_n\}$, die zu $\overline{\mathsf{M}}$ gehören, $f^{\mathrm{I}}\{c_n\} = \lim\limits_{n=\infty}\{c_n\}$ festgesetzt wird. Man sieht, daß **2 3 4 5 6** für S^{I} gelten, ohne daß M^{I} in $\overline{\mathsf{M}}$ enthalten ist.

II., weil man ein Summationsverfahren S^{II} herstellen kann, dessen Menge M^{II} aus $\overline{\mathsf{M}}$ besteht und außerdem aus allen solchen divergenten Folgen, die beschränkt sind und nur zwei endliche Teilgrenzen aufweisen; für die letzteren definiert man die zu S^{II} zugehörige Funktion f^{II} durch die Gleichung $f^{\mathrm{II}}\{d_n\} = d_1$, für die zu $\overline{\mathsf{M}}$ gehörenden Folgen $\{c_n\}$ wird dagegen wieder $f^{\mathrm{II}}\{c_n\} = \lim\limits_{n=\infty}\{c_n\}$ gesetzt; **1 3 4 5 6** gelten für S^{II}, ohne daß M^{II} in $\overline{\mathsf{M}}$ enthalten ist.

III., weil man ein Summationsverfahren S^{III} herstellen kann, wobei die Menge M^{III} aus $\overline{\mathsf{M}}$ besteht und aus allen Folgen der Form $\{2^{\nu_n+1}\}$ — dabei ist $\{\nu_n\}$ eine beliebige Teilfolge von

$$\{n\} = 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots.$$

Man hat zu setzen $f^{\mathrm{III}}\{2^{\nu_n+1}\} = 0$ und $f^{\mathrm{III}}\{c_n\} = \lim\limits_{n=\infty}\{c_n\}$. Ähnliche Schlußfolgerungen wie oben.

IV., weil es ein Summationsverfahren S^{IV} gibt, wobei die Menge M^{IV}

aus $\overline{\mathsf{M}}$ besteht und aus allen Folgen $\{a_n\}$, deren Glieder unbegrenzt wachsen und zwar so, daß

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots;$$

für diese Folgen setzt man dann: $f^{\mathrm{IV}}\{a_n\} = 0$, während für die $\{c_n\}$ aus $\overline{\mathsf{M}}$ die Definition $f^{\mathrm{IV}}\{c_n\} = \lim\limits_{n=\infty}\{c_n\}$ beibehalten wird. Analoge Schlußfolgerungen.

V., weil man ein Summationsverfahren S^{V} findet, dessen Menge M^{V} aus $\overline{\mathsf{M}}$ besteht und aus allen Folgen von der Gestalt $\{k + 2^{\nu_n - 1}\}$ — dabei ist ν_n eine beliebige Teilfolge von $\{n\}$. Man definiert $f^{\mathrm{V}}\{k+2^{\nu_n-1}\} = k$ und $f^{\mathrm{V}}\{c_n\} = \lim\limits_{n=\infty}\{c_n\}$. Schlußfolgerungen wie oben.

VI., weil man ein Summationsverfahren S^{VI} findet, dessen Menge M^{VI} aus $\overline{\mathsf{M}}$ besteht und aus allen Folgen von der Gestalt $\{k - 2^{\nu_n - 1}\}$.*) Man definiert $f^{\mathrm{VI}}\{k - 2^{\nu_n-1}\} = k$, $f^{\mathrm{VI}}\{c_n\} = \lim\limits_{n=\infty}\{c_n\}$. Schlußfolgerungen wie oben.

Diese sechs Beispiele zeigen, daß $\bar{\mathsf{S}}$ keinem von den Systemen I, II, III, IV, V, VI genügt, sie zeigen aber noch mehr; nehmen wir z. B. das System I und streichen noch einige Axiome weg, etwa **2 3 4**; dann bleibt das System **5 6 7(5 6)** übrig; selbstverständlich genügt S^{I} den Axiomen **5 6**, wir wissen aber, daß M^{I} nicht in $\overline{\mathsf{M}}$ enthalten ist, daraus folgt also, daß $\bar{\mathsf{S}}$ das System **5 6 7(5 6)** nicht befriedigt. Dieselben Schlüsse kann man bei allen Systemen wiederholen und kommt dadurch zu dem Resultate, daß $\bar{\mathsf{S}}$ keinem der Axiomsysteme genügt, die aus dem vollständigen Systeme durch Fortlassen von Axiomen bei Beibehaltung von **7** entstehen. Da aber $\bar{\mathsf{S}}$ das einzige Summationsverfahren ist, welches dem vollständigen Systeme genügt, so folgt daraus, daß das vollständige System keine Folge der obengenannten Systeme sein kann. Das, was am Anfang dieses Kapitels gesagt wurde, zeigt andererseits, daß das vollständige System keine Folge derjenigen Systeme sein kann, die **7** nicht enthalten.**) *Damit ist aber die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome bewiesen.*

§ 4.

Ergänzende Bemerkungen.

Es bietet vielleicht einiges Interesse, zu wissen, ob die im vorigen Kapitel genannten Systeme I, II, $\cdots$, VI, überhaupt erfüllbar m. a. W. widerspruchsfrei sind.

*) $\{\nu_n\}$ hat dieselbe Bedeutung wie oben.

**) Dieses ließe sich auch ohne die Beispiele (α), (β), (γ), (δ), (ε), (ζ) aus $S^{\mathrm{I}}, \cdots, S^{\mathrm{VI}}$ ableiten.

Die Antwort ist im Falle des Systems II und des Systems IV bejahend, in allen übrigen Fällen verneinend.

Vereinigen wir zu einer Menge M^{II} alle Folgen überhaupt und definieren $\mathfrak{f}^{\mathrm{II}}\{a_n\} = a_1$, so erhalten wir dadurch ein Summationsverfahren S^{II}, welches allen Axiomen des Systems II entspricht.

Nehmen wir jetzt als Menge M^{IV} dieselbe Menge wie M^{II} und setzen für $\mathfrak{f}^{\mathrm{IV}}\{a_n\}$ durchweg Null, so haben wir ein Summationsverfahren S^{IV} konstruiert, welches dem System IV genügt.

Nehmen wir an, es wäre möglich, das System I zu erfüllen, und es sei S^{I} das gesuchte Summationsverfahren mit seinen Bestandteilen M^{I} und $\mathfrak{f}^{\mathrm{I}}$. S^{I} hat **2 3 4 5 6 7(2 3 4 5 6)** zu erfüllen. Sei Γ_{I} die Menge aller beschränkten divergenten Folgen, die nur zwei Teilgrenzen haben, und sei φ_{I} eine Funktion, die dem arithmetischen Mittel aus diesen zwei Teilgrenzen gleich ist. Γ_{I} mit φ_{I} definieren ein Summationsverfahren Π_{I}, welches **2 3 4 5 6** erfüllt. $\overline{\mathsf{S}}$ erfüllt auch **2 3 4 5 6**. S^{I} erfüllt aber **7(2 3 4 5 6)**, daher muß M^{I} Γ_{I} und $\overline{\mathsf{M}}$ enthalten.*) Es gilt nun der leicht beweisbare *Hilfssatz:* „Wenn ein Summationsverfahren den Axiomen **2 3 4 5 6** genügt und die zugehörige Menge die Menge $\overline{\mathsf{M}}$ enthält, so ist die zugehörige Funktion gleich der gewöhnlichen Grenze für alle zu $\overline{\mathsf{M}}$ gehörenden Folgen. Darnach ist $\mathfrak{f}^{\mathrm{I}}\{1\} = 1$, $\mathfrak{f}^{\mathrm{II}}\{2\} = 2$. Aber $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2}\right\}$ gehört zu Γ_{I}, also a fortiori zu M^{I} und Axiom **2** gibt:

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{I}}\left\{\frac{3+(-1)^n}{2}\right\} = \mathfrak{f}^{\mathrm{I}}\{1\} = 1 = \mathfrak{f}^{\mathrm{I}}\{2\} = 2,$$

ein Widerspruch, der die Unmöglichkeit beweist, I zu erfüllen.

Ganz analog gestaltet sich der Beweis für die Unmöglichkeit, III zu erfüllen. Auch hier konstruiert man ein Summationsverfahren Π_{III}, welches **1 2 4 5 6** befriedigt. Dabei ist Γ_{III} die Folge

$$\left\{1, 2, 1, 2\tfrac{1}{2}, 1, 2\tfrac{1}{4}, 1, 2\tfrac{1}{8}, \cdots\right\}$$

mit ihren sämtlichen Teilfolgen und $\varphi_{\mathrm{III}} = \frac{3}{2}$. Der Hilfssatz bleibt gültig, wenn man in seiner Aussage **3** durch **1** ersetzt, und man bekommt damit (in einer Bezeichnungsweise, die durch Analogie genügend erklärt ist) nach Axiom **2**:

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{III}}\left\{1, 2, 1, 2\tfrac{1}{2}, 1, 2\tfrac{1}{4}, \cdots\right\} = \mathfrak{f}^{\mathrm{III}}\{1\} = 1 = \mathfrak{f}^{\mathrm{III}}\left\{2 + \tfrac{1}{2^n}\right\} = 2,$$

den gesuchten Widerspruch.

---

*) Präzis sollte es heißen: M^{I} muß Γ_{I} und $\overline{\mathsf{M}}$ als *Untermengen* enthalten; es kommen aber nirgends Mengen als *Elemente* vor.

Nehmen wir an, es existiere ein Summationsverfahren S^{V} mit der zugehörigen Menge M^{V} und der Funktion f^{V}, welches $V \equiv \mathbf{123467(12346)}$ befriedigt. Definieren wir eine Menge Γ_{V}, die bestehen soll: aus allen konvergenten Folgen $\{\alpha_n\}$ mit der Eigenschaft $\alpha_n > \lim\limits_{\nu=\infty}\{\alpha_\nu\}$ (für alle n), aus allen konvergenten Folgen $\{\beta_n\}$ mit der Eigenschaft $\beta_n < \lim\limits_{\nu=\infty}\{\beta_\nu\}$, und schließlich aus allen divergenten Folgen $\{\delta_n\}$, die beschränkt sind und aus zwei konvergenten Teilfolgen, einer von der Kategorie $\{\alpha_n\}$ und einer von der Kategorie $\{\beta_n\}$ aufgebaut sind. Die zu Γ_{V} gehörende Funktion φ_{V} sei nun durch folgende Gleichungen erklärt:

$$\varphi_{\mathsf{V}}\{\alpha_n\} = \lim_{n=\infty}\{\alpha_n\} - 1, \quad \varphi_{\mathsf{V}}\{\beta_n\} = \lim_{n=\infty}\{\beta_n\}, \quad \varphi_{\mathsf{V}}\{\delta_n\} = \lim_{n=\infty}\{\beta_n\}$$

($\{\beta_n\}$ bedeutet in der letzten Gleichung diejenige Folge der Kategorie $\{\beta_n\}$, die eine Teilfolge von $\{\delta_n\}$ ist). Damit haben wir ein Summationsverfahren hergestellt, das $\mathbf{12346}$ erfüllt. Aber $\overline{\mathsf{S}}$ tut es auch, infolgedessen muß M^{V} Γ_{V} und $\overline{\mathsf{M}}$ enthalten. Die Folge $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ gehört zu Γ_{V}, und $\mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ hat den bestimmten Wert k. Die Folge $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ gehört zu $\overline{\mathsf{M}}$, und daher hat $\mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ einen bestimmten Wert h. Nun ist die Folge $\left\{\frac{2n+1}{2n}\right\}$ eine Teilfolge von $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$, und die Anwendung der Axiome $\mathbf{12}$ gibt

$$\mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{\frac{2n+1}{2n}\right\} = h.$$

Die Axiome $\mathbf{34}$ geben ihrerseits:

$$\mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{\frac{4n+1}{2n}\right\} = \mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{1 + \frac{2n+1}{2n}\right\} = 1 + h.$$

Nun ist aber $\left\{\frac{4n+1}{2n}\right\}$ eine Teilfolge von $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$, und man hat (nach $\mathbf{12}$)

$$\mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{\frac{4n+1}{2n}\right\} = 1 + h, \quad k = 1 + h.$$

Andererseits ist $\left\{\frac{2n-2}{2n-1}\right\}$ eine Teilfolge der beiden Folgen $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ und $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ zugleich, und man hat (nach $\mathbf{12}$)

$$\mathsf{f}^{\mathsf{V}}\left\{\frac{2n-2}{2n-1}\right\} = h = k,$$

also den Widerspruch

$$h = k.$$

Ebenso beweist man, daß VI nicht erfüllbar ist.

Was kann man aber über die Axiomsysteme sagen, die noch weniger Axiome enthalten (wie z. B. **23457(2345)**)? Man kommt durch ähnliche Überlegungen wie oben zu dem Satze, daß *alle Axiomsysteme, die* 2, 4 *und* 7 *zugleich enthalten, widerspruchsvoll sind; alle anderen sind widerspruchsfrei.* Nur das vollständige System bildet eine Ausnahme von dieser Regel.

Für die Betrachtungen des § 3 sind mir Bemerkungen des Herrn K. Jantzen von Nutzen gewesen, was ich nicht versäumen möchte, hier zu erwähnen.

München, 5. Juni 1910.

Elem. Math. 53 (1998) 139 – 148
0013-6018/98/040139-10 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Wie der Beweis der Vermutung von Baudet gefunden wurde

Bartel Leendert van der Waerden

Artin, Schreier und ich gingen im Jahr 1926 öfter im Curiohaus in Hamburg essen und unterhielten uns dabei über mathematische und andere Fragen. Einmal erzählte ich ihnen über eine Vermutung des früh verstorbenen holländischen Mathematikers Baudet. Sie lautete:

Teilt man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ *in zwei Klassen ein, so enthält mindestens eine dieser Klassen eine arithmetische Progression von* l *Gliedern, wobei* l *eine beliebig grosse vorgegebene Zahl ist.*

Nach dem Essen gingen wir in Artins Zimmer im damaligen Mathematischen Institut an der Rothenbaumchaussee und überlegten uns gemeinsam vor der Wandtafel an Hand von kleinen Kreidezeichnungen wie man wohl die Vermutung beweisen könnte. Wir stellten allerlei Überlegungen an und hatten ein paar Einfälle, die der Überlegung eine neue Richtung gaben und schliesslich zur Lösung führten.

Die Psychologie des Findens in der Mathematik ist eine schwierige Sache. Die meisten Mathematiker publizieren nur ihre Endergebnisse mit möglichst kurzen Beweisen, aber sie verraten uns nicht, wie sie darauf gekommen sind. Auch erinnern sie sich nachträglich

Wir drucken hier einen Beitrag von B.L. van der Waerden ab, der in Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 28 (1965), 6–15 erschienen ist. Eine davon nur geringfügig abweichende Version wurde bereits vorher in El. Math. 9 (1954), 49–56 veröffentlicht und von dort in ein Sammelheft *Einfall und Überlegung* übernommen, das 1954 beim Birkhäuser Verlag erschienen ist (Nachdruck 1968, 1973). Wir haben uns hier für die erstgenannte Version entschieden, weil sie offensichtlich das nur wenig überarbeitete Vortragsmanuskript reproduziert. So lassen sich hier auch charakteristische Eigenheiten des Vortragsstils von van der Waerden erkennen. – Wir danken der Schriftleitung der Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg für die Erlaubnis zu diesem Nachdruck. *ust*

*) Als Vortrag gehalten in der Universität Hamburg auf einer Gedenkfeier anlässlich des Todestages von Emil Artin am 19. Dezember 1963.

section 2

nicht an alles, was ihnen durch den Kopf gegangen ist. Es fällt uns schwer, die eigenen vorbereitenden Überlegungen so wiederzugeben, dass auch andere sie verstehen. Die kurzen Andeutungen, in denen man mit sich selbst spricht, lassen sich ohne Präzisierung und Erläuterung nicht mitteilen, und durch die Präzisierung werden die Gedanken geändert.

Im Fall unseres Gespräches über die Vermutung von Baudet liegen aber die Bedingungen für die Wiedergabe viel günstiger. Denn alle Gedanken, die sich bei uns bildeten, wurden sofort ausgesprochen und durch Zeichnungen an der Tafel verdeutlicht. Wir veranschaulichten die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ der beiden Klassen durch äquidistante Kreidestriche auf zwei parallelen Geraden. Was ausgesprochen und gezeichnet wird, kann man viel besser festhalten und reproduzieren als blosse Gedanken. Also ein idealer Fall, um den Prozess des Findens zu analysieren, soweit er sich im bewussten Denken abspielt, und die bewussten Überlegungen abzugrenzen gegen die mysteriösen "Einfälle", die uns manchmal plötzlich ins Bewusstsein treten.

Wenn nur eine zweigliedrige Progression verlangt wird ($l = 2$), so braucht man nicht alle Zahlen $1, 2, \ldots$ zu betrachten, sondern es genügt, sich auf die Zahlen $1, 2, 3$ zu beschränken. Wenn diese auf zwei Klassen verteilt werden, so müssen zwei zur gleichen Klasse gehören. Das ist klar.

Auch im Fall $l = 3$ braucht man nicht alle Zahlen zu betrachten, sondern man kann sich auf die Zahlen von 1 bis 9 beschränken. Teilt man diese in zwei Klassen ein, so liegt in einer dieser Klassen stets eine dreigliedrige arithmetische Progression $a, a + b, a + 2b$, wie man durch Aufzählen der möglichen Fälle leicht zeigt. Die Zahlen von 1 bis 8 kann man wohl in zwei Klassen teilen, ohne dass man eine dreigliedrige Progression erhält, z.B. so: 1, 2, 5, 6 in der ersten, 3, 4, 7, 8 in der zweiten Klasse. Die Zahl 9 gerät dann aber in eine Zwangslage. Steckt man sie in die erste Klasse, so hat man die Progression 159, andernfalls die Progression 789. Ähnlich in allen anderen Fällen. Das hatte ich mir schon vor der Zusammenkunft mit Artin und Schreier überlegt.

Schreier stellte nun die Frage, ob die Vermutung von Baudet ganz allgemein (wie in den Fällen $l = 2$ und $l = 3$) sich dahin verschärfen liesse, dass immer nur ein endlicher Abschnitt der Zahlenreihe in Betracht gezogen werden muss, mit anderen Worten, ob es eine Schranke $N = N(l)$ gibt, so dass bereits bei der Einteilung der Zahlen von 1 bis N in zwei Klassen eine von diesen Klassen eine l-gliedrige Progression enthält. Die Frage war nicht schwer zu beantworten. Wenn die Vermutung von Baudet überhaupt richtig ist, so überlegten wir uns, dann gibt es auch ein solches N. Eine bekannte mengentheoretische Sohlussweise, das "Diagonalverfahren", führt zu diesem Ergebnis. Man schliesst etwa so:

Gesetzt, es gäbe kein solches N, dann würde es für jedes N eine Klasseneinteilung E_N der Zahlen von 1 bis N geben, in der keine Klasse eine l-gliedrige Progression enthält. Es gäbe also eine Folge E_1, $E_2, \ldots$ von solchen Klasseneinteilungen. Die Zahl 1 liegt bei allen diesen Einteilungen in einer der beiden Klassen. Also muss sie unendlich oft in der gleichen (ersten oder zweiten) Klasse liegen. Es gibt also eine unendliche Teilfolge $E_1', E_2', \ldots$. von Klasseneinteilungen, bei denen die Zahl 1 immer in der gleichen, etwa in der i_1-ten Klasse liegt.

In den Einteilungen $E_2', E_3', \ldots$ hat auch die Zahl 2 ihren Platz in der ersten oder zweiten Klasse. Also muss es eine unendliche Teilfolge $E_2'', E_3'', \ldots$ geben, bei denen 2 immer in der gleichen, etwa in der i_2-ten Klasse liegt.

So weiter schliessend, findet man für jedes n eine Teilfolge $E_n^{(n)}$, $E_{n+1}^{(n+1)}, \ldots$ von Klasseneinteilungen, in denen die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ alle in den gleichen Klassen liegen, nämlich 1 in der i_1-ten, 2 in der i_2-ten, ..., n in der i_n-ten.

Nun bildet man eine "Diagonal-Klasseneinteilung" E der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$, bei der 1 in der i_1-ten, 2 in der i_2-ten Klasse liegt, usw. Die Zahl n liegt bei dieser Klasseneinteilung in der gleichen Klasse wie in der Einteilung $E_n^{(n)}$. Daher der Name Diagonalverfahren.

In der Einteilung E würde es unter den gemachten Annahmen keine l-gliedrige arithmetische Progression geben, deren Glieder alle derselben Klasse angehören. Wenn es sie gäbe, würde nämlich eine der Einteilungen $E_n^{(n)}$ bereits eine solche Progression enthalten, entgegen der gemachten Annahme. So kommen wir zu einem Widerspruch, also muss die gemachte Annahme falsch gewesen sein.

Auf Grund dieser Bemerkung von Schreier versuchten wir nun, den Satz in der verschärften Form mit der Schranke $N(l)$ zu beweisen. Da die Fälle $l = 2$ und $l = 3$ schon erledigt waren, so konnten wir versuchen, einen Schluss von $l - 1$ auf l durchzuführen. Artin bemerkte dazu, dass die finite Verschärfung für die vollständige Induktion nur von Vorteil sein kann. Wenn man für $l - 1$ die Existenz einer Schranke $N(l - 1)$ voraussetzen kann, so hat man mehr Möglichkeiten, für l etwas zu beweisen.

Artin machte sodann die Bemerkung, dass die Vermutung, wenn sie für zwei Klassen allgemein richtig ist, auch für k Klassen gelten muss. Es sei zum Beispiel $k = 4$. Dann kann man die Klassen zunächst zu zwei und zwei zusammennehmen. So erhält man eine gröbere Einteilung in nur zwei Klassen. In einer dieser beiden muss eine arithmetische Progression von $N(l)$ Gliedern liegen. Die Glieder dieser Progression kann man von l bis $N(l)$ numerieren. Diese Nummern erscheinen nun wieder in zwei Klassen der feineren Klasseneinteilung eingeteilt, und nach dem Satz, den wir für zwei Klassen als richtig angenommen haben, muss in einer dieser Klassen eine Progression von l Gliedern liegen.

So kommt man von zwei auf vier Klassen, genau so von vier auf acht Klassen usw. Die Klassenzahl kann also beliebig gross sein.

Wir versuchten nun, den Satz durch vollständige Induktion nach l zu beweisen. Für $l = 2$ hat man das sogenannte *"Schubfachprinzip"*: Wenn $k + 1$ Dinge auf k Schubfächer verteilt werden, so muss eines der Fächer mindestens zwei Dinge enthalten. Ein sehr nützliches Prinzip, das Dirichlet in der Zahlentheorie mit Erfolg angewandt hat.

Artin erwartete – und der Erfolg hat ihm recht gegeben –, dass die Verallgemeinerung von zwei auf k Klassen für die Induktion von Vorteil sein würde. Man kann nämlich, so meinte er, nun versuchen, die Vermutung für ein beliebiges k und für die Länge l zu beweisen, unter der Induktionsvoraussetzung, dass sie für alle k und für die Länge $l - 1$ schon bewiesen sei.

Diese zunächst etwas unbestimmte Überlegung wurde im weiteren Verlauf der Diskussion, in der Hauptsache durch Artin, folgendermassen verschärft. Es soll etwa die Vermutung für zwei Klassen und für Progressionen der Länge l bewiesen werden. Sind alle ganzen Zahlen in zwei Klassen eingeteilt, so sind zum Beispiel die Tripel aufeinanderfolgender Zahlen automatisch in acht Klassen eingeteilt, denn die drei Zahlen des Tripels können unabhängig voneinander in Klasse 1 oder 2 liegen, und das gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten. Man kann nun diese Zahlentripel durchnumerieren, etwa indem man jeweils die Anfangszahl des Tripels als Nummer nimmt, so dass Tripel Nummer n aus den Zahlen n, $n+1$ und $n+2$ besteht. Die Nummern erscheinen dann in acht Klassen eingeteilt, und auf diese acht Klassen kann man unbedenklich die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Dasselbe gilt, wenn man "Blöcke" von mehr als drei aufeinanderfolgenden Zahlen betrachtet. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es unter genügend vielen aufeinanderfolgenden Blöcken eine $(l-1)$-gliedrige arithmetische Progression von Blöcken. Das "Muster" der Verteilung der Zahlen auf die Klassen, das wir in einem dieser Blöcke vorfinden, wiederholt sich genau so in allen $l-1$ Blöcken der Progression. Vielleicht, so meinte Artin, geben diese sich wiederholenden Muster uns die Mittel zur Konstruktion einer l-gliedrigen Folge. Ausserdem enthalten die Blöcke selbst, wenn sie genügend lang sind, $(l-1)$-gliedrige arithmetische Progressionen von Zahlen einer Klasse. Auch diese können zur Konstruktion benutzt werden.

Wir versuchten nun, da im Fall $l=2$ der Satz sicher richtig ist, von $l=2$ auf $l=3$ zu schliessen, und zwar nahmen wir zunächst zwei Klassen an (ohne Rücksicht darauf, dass dieser Fall schon vorher durch direkte Aufzählung aller Fälle erledigt war). Wir zeichneten die Zahlen als kleine Querstriche im waagrechten Abstand 1 auf zwei waagrechten Linien, die die beiden Klassen darstellen sollten.

Unter je drei aufeinanderfolgenden Zahlen muss es nach der Induktionsvoraussetzung, das heisst in diesem Fall nach dem Schubfachprinzip zwei geben, die derselben Klasse angehören, etwa der ersten. Setzen wir nun die arithmetische Progression, die mit diesen beiden Strichen anfängt, fort, so können wir annehmen, dass der dritte Strich nicht mehr der ersten Klasse angehört (sonst wären wir ja schon fertig), sondern der zweiten. Somit ergibt sich das Bild der Figur 1. Soweit wurden alle Überlegungen von uns gemeinsam angestellt. Ich überlegte mir nun weiter folgendes.

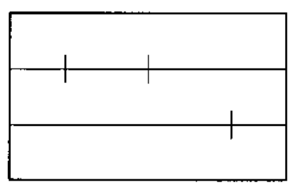

Fig. 1

In jedem Block von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen muss ein Muster von der Art der Figur 1 vorkommen, denn unter den ersten drei Zahlen des Blockes muss es schon zwei geben, die derselben Klasse angehören und diese zweigliedrige Progression kann dann innerhalb des Blockes zu einer dreigliedrigen Progression fortgesetzt werden.

Solche Muster wiederholen sich. Denn die Blöcke von fünf Zahlen sind ja in $2^5 = 32$ Klassen eingeteilt, und unter 33 aufeinanderfolgenden Blöcken[1)] muss es nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei gleiche geben. So ergibt sich das Bild der Figur 2, wobei der waagrechte Abstand zwischen dem Anfang des ersten und des zweiten Blockes höchstens 32 beträgt.

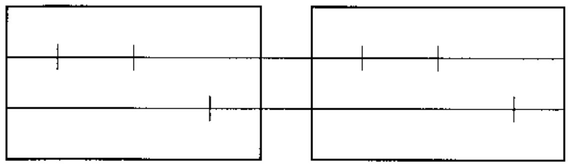

Fig. 2

Das gibt aber immer noch keine dreigliedrige Progression. Um eine solche zu erhalten, habe ich den zweiten Block von fünf Zahlen noch einmal um dieselbe Strecke verschoben und die dreigliedrige Progression betrachtet, die aus den angestrichenen Zahlen durch diese Verschiebung entsteht.

Die dritte Zahl dieser verschobenen Progression hat nun keinen Ausweg mehr. Entweder sie gehört in die erste Klasse: dann gibt es dort die arithmetische Progression a, a, a, oder sie gehört in die zweite Klasse: dann gibt es die Progression b, b, b in der zweiten Klasse (Fig. 3).

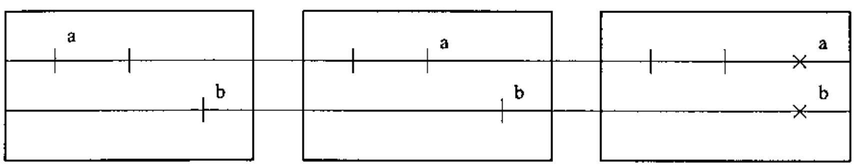

Fig. 3

Dieser Beweis galt zunächst nur für den bereits früher erledigten Fall $k = 2$, $l = 3$. Trotzdem hatte ich, als ich ihn vorbrachte, das sichere Gefühl, nun den allgemeinen Beweis in Händen zu haben.

Artin und Schreier glaubten es noch nicht. Da führte ich ihnen den analogen Beweis für den nächst höheren Fall $k = 3$, $l = 3$ vor.

In diesem Fall kann man zunächst genau dieselbe Überlegung anstellen (mit Blöcken zu sieben statt zu fünf und mit Abstand 3^7 statt 2^5), aber nun hat die dritte Zahl im dritten Block wohl einen Ausweg. Sie kann in die dritte Klasse hinein, und man erhält das in Figur 4 dargestellte Muster.

In jedem grossen Block von $3^7 + 3^7 + 7 = h$ aufeinanderfolgenden Zahlen gibt es ein solches Muster. Nun zerfallen die grossen Blöcke in 3^h Klassen. Unter je $3h + 1$

1) "Aufeinanderfolgend" soll heissen: jeweils um Eins verschoben.

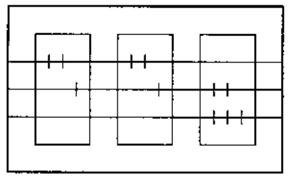

Fig. 4

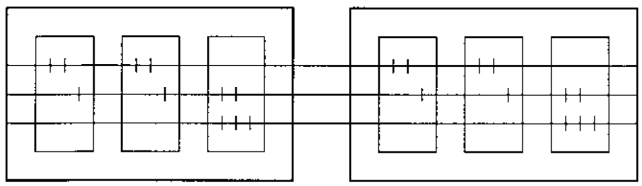

Fig. 5

aufeinanderfolgenden grossen Blöcken gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei gleiche. In diese zeichne man die kleinen Blöcke hinein, und man erhält das Bild der Figur 5.

Jetzt verschiebe man den grossen Block, und man erhält dann an der Stelle der verschobenen Zahl c entweder eine Progression a, a, a in der ersten Klasse oder eine Progression b, b, b in der zweiten oder c, c, c in der dritten (Figur 6).

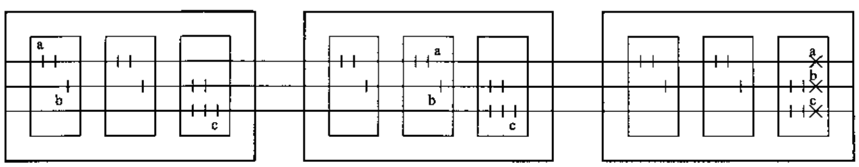

Fig. 6

Jetzt war es allen Beteiligten klar, dass für $l = 3$ das Beweisverfahren sich auf beliebige k übertragen lässt. Aber Artin und Schreier wollten nun noch den Fall $l = 4$ sehen.

Ich nahm zunächst wieder zwei Klassen an. Nach dem bereits Bewiesenen gibt es unter genügend vielen, sagen wir n aufeinanderfolgenden Zahlen eine dreigliedrige Progression, deren Terme alle einer Klasse angehören. Setzt man die Progression fort, so wird der vierte Term der anderen Klasse angehören (sonst wären wir ja schon fertig). Alle vier Zahlen gehören einem Block von g aufeinanderfolgenden Zahlen an, wobei g das grösste Ganze aus

$$n + \frac{n-1}{2} \tag{1}$$

ist. In jedem solchen Block kommt also das in Figur 7 abgebildete Muster vor.

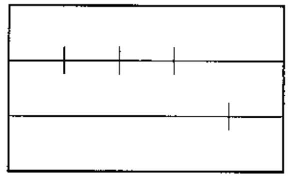

Fig. 7

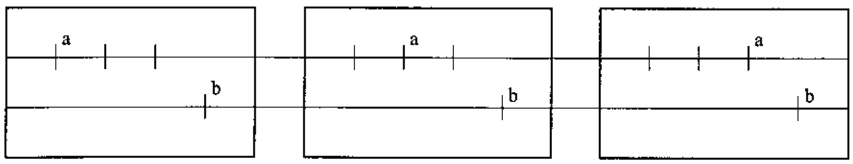

Fig. 8

Die Blöcke von der Länge g sind in 2^g Klassen eingeteilt. Unter genügend vielen, sagen wir $n(3, 2^g)$ aufeinanderfolgenden Blöcken gibt es also drei Blöcke in arithmetischer Progression, die derselben Klasse angehören. Das Muster im ersten Block wiederholt sich genau so im zweiten und dritten (Figur 8).

Fügt man nun noch einen vierten Block hinzu, so erhält man wieder zwangsläufig eine arithmetische Progression a, a, a, a oder b, b, b, b.

Nachdem ich das ausgeführt hatte, war es uns allen dreien klar, dass es genau so weitergeht, dass man auch für beliebige l nacheinander alle Fälle $k = 2, 3, \ldots$ erledigen und so den Schluss von $l - 1$ auf l allgemein vollziehen kann.

Der Beweis, den ich im "Nieuw Archief voor Wiskunde" 15, 212 (1927) dargestellt habe, ist die genaue Ausführung des hier anschaulich erläuterten Gedankenganges. Dem vorhin gebildeten Ausdruck (1), der allgemein so lautet:

$$n + \left[\frac{n-1}{l-2}\right] \tag{2}$$

entspricht im "Nieuw Archief" beim Schluss von $l - 1$ auf l der Ausdruck

$$n(l-1, k) + \left[\frac{n(l-1, k) - 1}{l-2}\right] . \tag{3}$$

Der Beweis, den Chintschin in seinem sehr schönen Büchlein[2)] bringt, ist nicht wesentlich von meinem Beweis verschieden; nur nimmt Chintchin statt (2) einfach $2n$. Weiter betrachtet er statt aufeinanderfolgender Blöcke solche, die nebeneinanderstehen und sich

2) A.J. Chintchin: Drei Perlen der Zahlentheorie (Russisch 1947; Deutsch 1951, Akademie-Verlag, Berlin; Englisch 1952). Einen kürzeren Beweis eines allgemeineren Satzes gab E. Witt in: Mathematische Nachrichten 6, S. 201 (1952).

berühren, wie $(a, \ldots, a+b-1)$ und $(a+b, \ldots, a+2b-1)$, wodurch die Abschätzungen etwas gröber werden.

Ich will nun versuchen, die von Artin, Schreier und mir angestellten Überlegungen etwas näher zu analysieren und zu untersuchen, an welchen Stellen neue Einfälle den bewussten Überlegungen eine neue Richtung gaben.

Am Anfang stand ein Einfall von Schreier. Er fragte: Wäre es nicht möglich, der Vermutung von Baudet eine finite Verschärfung zu geben, indem man sich auf einen endlichen Abschnitt der Zahlenreihe beschränkt? Die Frage lag auf der Hand, denn in den Beispielen $l = 2$ und $l = 3$ war die finite Verschärfung schon gegeben. Der Beweis auf Grund des Diagonalverfahrens, der oben wiedergegeben wurde, war für jeden von uns dreien eine reine Routine-Angelegenheit, da wir alle drei mit diesem Verfahren vertraut waren. Aber der Einfall von Schreier bestimmte die Richtung, die unsere Überlegungen jetzt nahmen.

Dass wir eine Induktion nach l versuchen wollten, war nur natürlich. Dass die finite Verschärfung die Induktion erleichtern würde, war zu erwarten.

Der nächste wesentliche Schritt wurde von Artin gemacht. Er hatte den Einfall, den Satz von 2 auf k Klassen zu verallgemeinern. Veranlasst wurde dieser Einfall wahrscheinlich durch die Überlegung, dass im Fall einer zweigliedrigen Progression die Verallgemeinerung auf k Klassen evident richtig ist (Schubfachprinzip).

Der oben dargestellte Beweis, dass die Vermutung von Baudet, wenn sie für zwei Klassen richtig ist, auch für k Klassen richtig sein muss, stammt von Artin. In diesem Beweis steckt eine Idee, die nachher in meinem Beweis der verschärften Vermutung von Baudet eine zentrale Rolle spielen sollte, nämlich: Wenn die Vermutung für den Abschnitt von 1 bis N richtig ist, so ist sie auch für jede N-gliedrige arithmetische Progression richtig, da man die Glieder dieser Progression ja von 1 bis N numerieren kann.

Bei einem Schluss von $l-1$ auf l ist es immer vorteilhaft, wenn man für $l-1$ möglichst viel voraussetzen kann und für l möglichst wenig zu beweisen sich vornimmt. Im Sinne dieser Überlegung nahmen wir für $l-1$ die Richtigkeit der Vermutung, also die Existenz von $N(l-1, k)$ für alle k an und versuchten zunächst für den nächsthöheren Wert l und für ein einziges k, z.B. für $k = 2$, die Existenz von $N(l, k)$ zu beweisen. Um die Gedanken zu bestimmen, nahmen wir zunächst $l = 3$ an, weil hier der genaue Wert

$$N(l-1, k) = N(2, k) = k + 1$$

nach dem Schubfachprinzip bekannt war. Damit war der Plan des Beweises vorgezeichnet.

Wir betrachteten also zunächst den Fall $k = 2$, $l = 3$. Durch direkte Aufzählung aller Möglichkeiten war dieser Fall zwar früher schon erledigt, aber wir suchten einen Beweisgedanken, der sich vielleicht auf höhere Fälle übertragen lassen würde. "Immer mit den ganz einfachen Beispielen anfangen", pflegte Hilbert zu sagen.

Der nächste entscheidende Einfall stammte von Artin. Wir können die Induktionsvoraussetzung, so sagte Artin, nicht nur auf Zahlen, sondern auch auf Blöcke von aufeinanderfolgenden Zahlen anwenden; denn auch diese sind in Klassen eingeteilt. Die Anzahl der

Klassen ist zwar grösser (k^n für Blöcke von n aufeinanderfolgenden Zahlen), aber das schadet nichts, da wir die Induktionsvoraussetzung ja für alle k zur Verfügung haben.

Durch den Einfall von Artin war die Wiederholbarkeit eines ganzen Blockmusters gesichert und wir konnten die Figur 2 zeichnen, die im ersten Block zwei Zahlen der ersten und eine der zweiten Klasse in arithmetischer Progression zeigt, im zweiten Block die entsprechenden Zahlen in denselben Klassen.

Die Figur 2 zeigt immer noch keine dreigliedrige Progression in einer Klasse. Wie könnte man sie erhalten? Wir schauten die Striche auf der Tafel einige Zeit schweigend an. Auf einmal hatte ich einen Einfall, begleitet von dem sicheren Gefühl: Das ist die Lösung. Ich verschob den zweiten Block der Fig. 2 noch einmal um dieselbe Strecke und erhielt so die Figur 3, in der die dritte Zahl des dritten Blockes in eine Zwangslage gerät, ähnlich wie die Zahl 9 in der früheren Überlegung in eine Zwangslage geraten war.

Der Einfall lag eigentlich ganz nahe. Die einzige Zahl in Fig. 3, die sowohl mit zwei Zahlen a, a der ersten Klasse als mit zwei Zahlen b, b der zweiten Klasse je eine arithmetische Progression a, a, a oder b, b, b bildet, ist die dort angekreuzte dritte Zahl des dritten Blockes.

Das Bemerkenswerteste an diesem Einfall war das Gefühl der vollkommenen Sicherheit, das ihn begleitete. Das gleiche Gefühl der Sicherheit hatte auch Poincaré als ihm beim Einsteigen in einen Omnibus plötzlich eine mathematische Idee einfiel, "ohne dass irgend etwas in seinen früheren Gedanken diese Idee vorbereitet hatte"[3]. Ich glaube, viele Mathematiker haben ähnliche Erinnerungen an plötzliche Einfälle, deren Herkunft sie nicht bestimmen können. Oft sind diese Einfälle von einem Gefühl der Sicherheit begleitet, das allerdings auch trügen kann.

Ich hatte also in diesem Fall die intuitive Überzeugung, dass genau dieselbe Beweismethode, die ich im Fall $k = 2$, $l = 3$ an der Tafel vorführte, auch in allen höheren Fällen zum Ziel führen würde.

Wie diese Überzeugung sich im Unbewussten bilden konnte, das weiss ich nicht. Ich glaube aber, erklären zu können, warum Artin und Schreier nicht so sicher waren, auch nachdem ich ihnen den Fall $k = 2$, $l = 3$ erklärt hatte. Sie sahen nur das Ergebnis: das Vorhandensein der Progression a, a, a in der ersten oder b, b, b in der zweiten Klasse. Ich aber hatte eine Methode gefunden, diese Progressionen zu bilden, und ich hatte das bestimmte Gefühl, dass diese Methode auch auf die höheren Fälle anwendbar sein würde.

Es ist, wie wenn einer Äpfel von einem Baum pflückt. Wenn man einen Apfel gepflückt hat und ein anderer hängt etwas höher, so kann es sein, dass man selbst weiss, dass man mit etwas mehr Anstrengung den andern Apfel auch noch erreichen kann, während ein Zuschauer, der nur sieht, dass man den einen Apfel gerade erreicht hat, darüber im Zweifel ist. Man hat eben nicht nur den Apfel, sondern auch das Gefühl der Bewegungen, die man ausgeführt hat, um ihn zu pflücken.

Das Gefühl, dass eine Beweismethode noch weiter reicht, ist manchmal trügerisch. Oft stellt sich nachher heraus, dass in den höheren Fällen eine neue Schwierigkeit auftaucht.

3) J. Hadamard: Psychology of Invention in the Mathematical Field. Siehe auch B.L. van der Waerden: Einfall und Überlegung; Birkhäuser, Basel 1954.

Trotzdem gehören solche Ahnungen über die Tragweite von Beweismethoden zu den nützlichsten Wegweisern bei der mathematischen Forschung.

Jetzt habe ich Ihnen alles erzählt, was mir von jener denkwürdigen Stunde, in der wir drei gemeinsam eine "Perle" gefunden haben, noch in Erinnerung ist. Es war eine meiner schönsten Stunden.

Van der Waerden publizierte den Beweis der Vermutung von Baudet erstmals in Nieuw Arch. Wisk. 15 (1927), 212–216. In der Literatur wurde das Resultat in der Folge als Satz von van der Waerden angesprochen. Nach Richard Rado (siehe Math. Z. 36 (1933), 424–480; Proc. London Math. Soc. (II) 48 (1945), 122–160) und Walter Deuber (siehe Math. Z. 133 (1973), 109–123) lässt sich das Resultat in einen wesentlich allgemeineren Rahmen stellen. Rado betrachtete in seinen beiden Arbeiten homogene lineare Gleichungssysteme (mit rationalen Koeffizienten), welche die Eigenschaft haben, dass bei jeder Zerlegung der natürlichen Zahlen in endlich viele Klassen in mindestens einer Klasse eine Lösung existiert. Solche Gleichungssysteme, die er *partitionsregulär* nannte, konnte Rado auf erstaunlich einfache Weise charakterisieren und zeigen, dass sich die Aussage des Satzes von van der Waerden auf die Lösbarkeit eines partitionsregulären Gleichungssystems zurückführen lässt. Aus Rado's Charakterisierung partitionsregulärer Gleichungssysteme ergibt sich darüberhinaus das folgende überraschende Resultat: *Bei einer Zerlegung der natürlichen Zahlen in endlich viele Klassen gibt es mindestens eine Klasse, in der jedes partitionsreguläre Gleichungssystem lösbar ist.* Walter Deuber hat in seiner Dissertation unter der Leitung von Ernst Specker eine daran anschliessende Vermutung von Rado beweisen können: Es sei S eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, welche die Eigenschaft hat, dass in ihr jedes partitionsreguläre Gleichungssystem lösbar ist. Zerlegt man S in endlich viele Klassen, so ist in mindestens einer dieser Klassen wiederum jedes partitionsreguläre Gleichungssystem lösbar.
ust

Math. Annalen, Bd. 124, S. 77—86 (1951).

Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.

Von

FRIEDRICH HIRZEBRUCH in Münster (Westf.).

Einleitung.

0. 1. Eine komplexe Mannigfaltigkeit $M^{(n)}$[1]) ist eine topologische Mannigfaltigkeit von $2n$ (reellen) Dimensionen, die mit lokalen Systemen komplexer Koordinaten so überdeckt ist, daß der Übergang von einem System zu einem anderen in einem gemeinsamen Existenzbereich durch (komplex)-analytische Funktionen mit von 0 verschiedener Funktionaldeterminate erfolgt. Es ist sinnvoll, von regulären, meromorphen Funktionen in einer komplexen Mannigfaltigkeit, von analytischen Abbildungen einer komplexen Mannigfaltigkeit in eine andere usw. zu sprechen, da alle diese Begriffe nicht von speziellen komplexen Koordinatensystemen abhängen. Jede komplexe $M^{(n)}$ ist durch die komplexen Koordinatensysteme in natürlicher Weise orientiert (vgl. zu 0.1. HOPF[2])).

0. 2. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten heißen analytisch äquivalent, wenn sie topologisch und analytisch aufeinander abgebildet werden können. Wir sagen auch: Analytisch äquivalente komplexe Mannigfaltigkeiten $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$ bestimmen auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M^{(n)} = M_1^{(n)} = M_2^{(n)}$ dieselbe komplexe Struktur. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$, die nicht analytisch äquivalent sind, aber homöomorph sind, bestimmen auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M^{(n)} = M_1^{(n)} = M_2^{(n)}$ verschiedene komplexe Strukturen.

0. 3. H. HOPF hat die Frage gestellt, welche orientierbaren $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch Einführung komplexer Koordinatensysteme zu einer komplexen Mannigfaltigkeit gemacht werden können und diese Frage z. B. für die Sphären S^4 und S^8 im verneinenden Sinne beantwortet[3]). Für $n = 1$ gilt bekanntlich: Alle orientierbaren Flächen können zu komplexen Mannigfaltigkeiten (= RIEMANNschen Flächen) gemacht werden. An diese Fragestellung von H. HOPF schließt sich die folgende Fragestellung an: Zu einer vorgegebenen $2n$-dim. orientierbaren Mannigfaltigkeit M^{2n} sollen alle möglichen komplexen Strukturen angegeben werden, anders formuliert: es sollen alle Äquivalenzklassen von analytisch äquivalenten komplexen Mannigfaltigkeiten angegeben werden, die zu M^{2n} homöomorph sind. In dieser Arbeit wird ein spezieller Beitrag zu dieser Fragestellung gegeben.

0. 4. Für $n = 1$ und für die geschlossenen Flächen M^2 vom Geschlecht > 0 wird die in 0. 3. angegebene Fragestellung mit Hilfe der Theorie der „Moduln" behandelt. Die einzigen einfach zusammenhängenden orientierbaren

[1]) Obere Indices ohne Klammern: reelle Dimensionen, in Klammern: „komplexe" Dimensionen.

[2]) HOPF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays Presented to R. COURANT, S. 167—185, New York 1948.

[3]) Ein allgemeineres Resultat für die Sphären S^{2n} in A. KIRCHHOFF: C. R. Acad. Sci. Paris **225**, 1258 (1947).

ection 3

Flächen M^2 sind die Sphäre S^2 und die gewöhnliche Ebene E^2. Für S^2 gibt es genau eine komplexe Struktur: die RIEMANNsche Zahlenkugel. Für E^2 gibt es genau zwei komplexe Strukturen: die (offene) z-Ebene und das Innere des Einheitskreises.

0. 5. Wir spezialisieren die in 0. 3. angegebene Fragestellung jetzt folgendermaßen: zu einer vorgegebenen (orientierbaren) *einfach zusammenhängenden geschlossenen* 4-dim. Mannigfaltigkeit M^4 sollen alle möglichen komplexen Strukturen angegeben werden. Diese Fragestellung ist meines Wissens z. B. unbeantwortet für $M^4 = P^{(2)}$ (= komplex-projektive Ebene).

0. 6. In dieser Arbeit wird zu der spezialisierten Fragestellung 0. 5. der folgende spezielle Beitrag geliefert. Für jedes natürliche $n \geq 0$ wird eine geschlossene komplexe Mannigfaltigkeit Σ_n angegeben. Σ_n ist gefasert mit der Faser S^2 und dem Basisraum S^2, und zwar so, daß die Fasern analytische Flächen in Σ_n sind und daß die Faserabbildung eine analytische Abbildung von Σ_n auf die als Basisraum auftretende RIEMANNsche Zahlenkugel S^2 ist. Für $n \equiv m \pmod 2$ sind Σ_n, Σ_m fasertreu homöomorph. Σ_0 ist das cartesische Produkt $S^2 \times S^2$ von zwei RIEMANNschen Zahlenkugeln. Σ_1 ist als topologische Mannigfaltigkeit topologische Summe $P^{(2)} + P^{(2)}$, 2. Art, von zwei Exemplaren der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ (vgl. 2.5.). Für $n \neq m$ sind Σ_n, Σ_m nicht analytisch äquivalent. Es werden damit durch die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n (n gerade) unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für $S^2 \times S^2$ und durch Σ_n (n ungerade) für $P^{(2)} + P^{(2)}$ angegeben. $S^2 \times S^2$ und $P^{(2)} + P^{(2)}$ sind geschlossen und einfach zusammenhängend. Es wird nicht die Aufgabe gelöst, alle komplexen Strukturen für $S^2 \times S^2$ (bzw. $P^{(2)} + P^{(2)}$) anzugeben. — Der Beweis, daß Σ_n, Σ_m ($n \neq m$, $n \equiv m \pmod 2$) nicht analytisch äquivalent sind, wird mit Hilfe der folgenden Tatsache geführt: Zwei analytische Flächen in einer geschlossenen komplexen $M^{(2)}$, die sich höchstens in isolierten Punkten schneiden, haben eine nicht negative Schnittzahl. Die durch diese analytischen Flächen repräsentierten (ganzzahligen) Homologieklassen haben daher ebenfalls eine nicht negative Schnittzahl. Mit Hilfe dieser Tatsache gelingt nämlich der Nachweis, daß sich die homöomorphen komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n, Σ_m ($n \neq m$) in der Repräsentierbarkeit der 2-dimensionalen Homologieklassen durch analytische Flächen unterscheiden.

0. 7. Wir werden weiter zeigen, daß die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n als algebraische Flächen, und zwar als Regelflächen auftreten und daß Σ_n, Σ_m als algebraische Flächen betrachtet birational äquivalent sind. Σ_n (n beliebig) ist mit der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ birational äquivalent.

Zusammenfassung: In bezug auf *topologische* Äquivalenz (Homöomorphie) gehören die Mannigfaltigkeiten Σ_n zwei Äquivalenzklassen an. In bezug auf *analytische* Äquivalenz sind sie paarweise verschieden. In bezug auf *birationale* Äquivalenz gehören sie einer einzigen Äquivalenzklasse an.

1. Zusammenstellung von Hilfssätzen.

1. 1. Es werden im folgenden nur Homologiegruppen mit ganzen Zahlen als Koeffizienten betrachtet. BETTIsche Gruppe: Homologiegruppe mit ganzzahligen Koeffizienten bei Vernachlässigung der Torsion. Falls, wie in den von uns zu betrachtenden Fällen, keine Torsion vorhanden ist, fallen ganzzahlige Homologiegruppe und BETTIsche Gruppe zusammen. Eine Basis der

BETTIschen Gruppe heißt BETTIsche Basis. In einer 4-dimensionalen geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit, deren 2. BETTIsche Zahl p sei, ist in bezug auf eine 2-dim. BETTIsche Basis $(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ die quadratische Matrix $\mathfrak{S} = (s_{ik}) = (\zeta_i \circ \zeta_k)$ definiert. ($\alpha \circ \beta$ = Schnittzahl von α mit β.) $\mathfrak{S}$ ist symmetrisch, ganzzahlig, und es ist $|\mathfrak{S}| = \pm 1$. Die ganzzahligen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{S}$, $\tilde{\mathfrak{S}}$ ($|\mathfrak{S}| = \pm 1$, $|\tilde{\mathfrak{S}}| = \pm 1$) heißen äquivalent, wenn es eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $\tilde{\mathfrak{S}} = \pm \mathfrak{A} \mathfrak{S} \mathfrak{A}'$. Zwei homöomorphe 4-dim. Mannigfaltigkeiten besitzen Schnittmatrizen derselben Äquivalenzklasse.

1.2. $M^{(2)}$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit. (u, v) sei ein lokales Koordinatensystem, das in einer Umgebung U des Punktes P zulässig ist. ($P \in M^{(2)}$, $P = (0,0)$). In U seien durch $f(u, v) = 0$, $g(u, v) = 0$ (f, g in U regulär) zwei analytische Flächenstücke F, G gegeben, die in U nur den Punkt P gemeinsam haben, d. h. $f(u, v) = g(u, v) = 0$ genau dann, wenn $u = v = 0$. Die Schnittzahl von F mit G in P ist topologisch definiert. Sie ist kommutativ und stets größer als 0. Andeutung der topologischen Definition der Schnittzahl: (vgl. v. D. WAERDEN[4]) S. 349).

Die Orientierung von U, F, G ist durch die komplexe Struktur eindeutig bestimmt. F, G können in U stetig so verschoben werden, daß die verschobenen Flächenstücke sich in evtl. mehreren Punkten einfach schneiden. Die Anzahl dieser Punkte hängt nur von F, G ab und ist die Schnittzahl von F mit G in P.

1.3. In einer komplexen Mannigfaltigkeit $M^{(2)}$ seien zwei geschlossene irreduzible analytische Flächen F_1, F_2 gegeben. F_1, F_2 schneiden sich höchstens in isolierten Punkten. Die Anzahl der Schnittpunkte ist endlich. Die Zyklen F_1, F_2 repräsentieren ganzzahlige 2-dim. Homologieklassen von $M^{(2)}$, deren Schnittzahl gleich der Summe der lokal definierten Schnittzahlen in den isolierten Schnittpunkten von F_1, F_2 ist, also nach 1.2. nicht negativ ist. Es ergibt sich hieraus: Ist die Schnittzahl einer 2-dim. Homologieklasse von $M^{(2)}$ mit sich selbst negativ, so kann diese Homologieklasse höchstens durch eine irreduzible geschlossene analytische Fläche repräsentiert werden.

1.4. Wir benutzen im folgenden meistens die Terminologie der Funktionentheorie, manchmal und zwar hauptsächlich im letzten Abschnitt aber die der algebraischen Geometrie, die die algebraischen Gebilde ihrer komplexen Dimension gemäß benennt. Eine algebraische Kurve ist eine analytische Fläche im Sinne der Terminologie der Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen, eine Gerade ist eine analytische Ebene. Durch diese Bemerkung werden Mißverständnisse wohl ausgeschlossen.

2. Topologische Untersuchung der Mannigfaltigkeiten Σ_n.

Σ_n, Σ_m sind dann und nur dann homöomorph, wenn $n \equiv m \pmod 2$.

2.1. $P^{(n)}$ bezeichne den projektiven Raum von n komplexen Dimensionen. $(x) = (x_0, x_1, x_2)$ seien homogene Koordinaten für $P^{(2)}$, $(y) = (y_1, y_2)$ seien homogene Koordinaten für $P^{(1)}$. ($P^{(1)}$ ist eine zweidimensionale Sphäre = RIEMANNsche Zahlenkugel S^2). Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ werde das durch die Gleichung $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$ im cartesischen Produkt $P^{(2)} \times P^{(1)}$ gegebene Nullstellengebilde mit Σ_n bezeichnet. Da Σ_n zusammenhängend ist und die

[4]) VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann. **102**, S. 337—362 (1929).

Einbettung von Σ_n in $P^{(2)} \times P^{(1)}$ frei von (algebraischen) Singularitäten ist, ist Σ_n eine komplexe Mannigfaltigkeit.

2. 2. Σ_0 ist das cartesische Produkt $P^{(1)} \times P^{(1)}$ mit der üblichen komplexen Struktur. (Σ_0 ist der „Raum der Funktionentheorie", s. OSGOOD[5])). Σ_0 ist homöomorph zu $S^2 \times S^2$.

2. 3. Durch $\varphi_n(x, y) = x$, $(x, y) \in \Sigma_n$, wird eine analytische Abbildung φ_n von Σ_n auf $P^{(2)}$ bestimmt. Durch $x_1 = x_2 = 0$ ist in Σ_n eine analytische Fläche T_n singularitätenfrei eingebettet. T_n ist ein $P^{(1)}$. Der Punkt $(1, 0, 0)$ von $P^{(2)}$ werde mit Q bezeichnet. Es ist $\varphi_n(T_n) = Q$. Wenn $n = 1$, dann gilt speziell folgendes: φ_1 bildet $\Sigma_1 - T_1$ topologisch und analytisch auf $P^{(2)} - \{Q\}$ ab. Man kann daher anschaulich sagen: Σ_1 entsteht aus $P^{(2)}$ durch „Herausstechen" von Q und „Einsetzen" von T_1.

2. 4. Die Inversion I von $P^{(2)}$: $I(x_0, x_1, x_2) = (|x_1|^2 + |x_2|^2, x_1\overline{x_0}, x_2\overline{x_0})$ ist eine topologische Abbildung vom Grade -1 von $P^{(2)} - \{Q\} - E$ auf sich. (E: die „unendlichferne" Ebene $x_0 = 0$.) Auf Σ_1 übertragen wird I zur Abbildung $\varphi_1^{-1} I \varphi_1$, die sich zu einer topologischen Selbstabbildung I' von Σ_1 vom Grade -1 erweitern läßt. Es ist $I' \varphi^{-1}(E) = T_1$. Die durch T_1, $\varphi^{-1}(E)$ repräsentierten ganzzahligen zweidimensionalen Homologieklassen von Σ_1 sollen mit τ_1, ε_1 bezeichnet werden. Es ist $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_1 \circ \tau_1 = 0$; da I' vom Grade -1 ist, gilt $\tau_1 \circ \tau_1 = -1$.

2. 5. Aus 2. 3. und 2. 4. erkennt man: Σ_1 ist die topologische Summe 2. Art von zwei in natürlicher Weise orientierten Exemplaren von $P^{(2)}$[6]). Zur topologischen Summenbildung werde folgendes bemerkt: Für zwei orientierte Mannigfaltigkeiten M^n und $\tilde{M}^n$ ist die topologische Summe (1. Art bzw. 2. Art) so definiert: Aus M^n und $\tilde{M}^n$ wird je eine kleine Kugel ausgebohrt. Die beiden so entstehenden, durch in bestimmter Weise orientierte $(n-1)$-Sphären S^{n-1} bzw. $\tilde{S}^{n-1}$ berandeten Mannigfaltigkeiten werden „aufeinandergeklebt", indem man S^{n-1} topologisch mit Umkehr der Orientierung (1. Art), bzw. mit Erhaltung der Orientierung (2. Art) auf $\tilde{S}^{n-1}$ abbildet und entsprechende Punkte identifiziert. Jede der beiden Summenmannigfaltigkeiten ist wieder orientierbar. Ihre topologische Struktur hängt nur von M^n und $\tilde{M}^n$ ab. Die Summe 2. Art kann so orientiert werden, daß ihre Orientierung mit der von M^n übereinstimmt und der von $\tilde{M}^n$ entgegengesetzt ist.

2. 6. Da Σ_1 nach 2. 5. topologische Summe $P^{(2)} + P^{(2)}$ (2. Art) ist, kann die Homologiestruktur von Σ_1 (ganzzahlige Koeffizienten) so bestimmt werden: (H für Homologiegruppe, $\dotplus$ für direkte Summe im Sinne der Gruppentheorie). Es ist $H^k(\Sigma_1) = 0$ für $k = 1{,}3$ und $H^2(\Sigma_1) = (\tau_1) \dotplus (\varepsilon_1)$, wo (τ_1), (ε_1) die durch τ_1 bzw. ε_1 erzeugten unendlichen zyklischen Gruppen sind.

(τ_1, ε_1) ist eine ganzzahlige 2-dimensionale Homologiebasis für Σ_1 mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (vgl. 2. 4.).

2. 7. Zu Σ_0 gehört die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrizen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind nicht äquivalent. Σ_0 und Σ_1 sind daher nicht homöomorph.

2. 8. π_n sei diejenige Abbildung von Σ_n auf $P^{(1)}$, die den Punkt $(x, y) \in \Sigma_n$ auf den Punkt $(y) \in P^{(1)}$ abbildet (2. 1.). π_n ist eine Faserabbildung von Σ_n auf $P^{(1)}$. Jede Faser ist ein $P^{(1)}$, also durch stereographische Projektion homöo-

[5]) OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1., 2. Aufl., S. 56, (1929).
[6]) Vgl. z. B. M. RUEFF: Compositio Math. 6 (1938), insbes. S. 185.

morph zu S^2. Es gilt: Σ_n ist eine gefaserte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Faser S^2 und dem Basisraum S^2. (In Analogie zur Gruppentheorie schreiben wir: $\Sigma_n/S^2 = S^2$.) Σ_n ist sogar ein sphere bundle im Sinne von STEENROD[7]).

Beweis: P_i $(i = 1, 2)$ sei das durch $y_i \neq 0$ gegebene Gebiet von $P^{(1)}$, (P_i ist mit der gewöhnlichen offenen Ebene E^2 homöomorph). $P^{(1)}$ sei ein weiteres Exemplar des $P_*^{(1)}$ mit den homogenen Koordinaten (ξ_0, ξ_1). Es sei $h(r) = (1 + r^n)^{-1}$. Durch $w''(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left(\xi_0, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\right), \xi_1 h\left(\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\right)\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n; y_1, y_2\right)$ wird eine fasertreue topologische Abbildung w'' von $P_*^{(1)} \times P_2$ auf $\pi_n^{-1}(P_2)$ gegeben. Entsprechend wird durch $w'(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left(\xi_0, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_2}{y_1}\right|\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_2}{y_1}\right|\right); y_1, y_2\right)$ eine fasertreue topologische Abbildung w' von $P_*^{(1)} \times P_1$ auf $\pi_n^{-1}(P_1)$ bestimmt. Für $(y_1, y_2) \in P_1 \cap P_2$, d. h. $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, ist $w_n = (w'')^{-1} w'$ die durch $w_n(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left(\xi_0, \xi_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n \left|\frac{y_1}{y_2}\right|^n; y_1, y_2\right)$ bestimmte Drehung von $P_*^{(1)}$. Die orthogonale Struktur von Σ_n wird durch die orthogonale Struktur von $P_*^{(1)}$ gegeben, welche durch stereographische Projektion von $P_*^{(1)}$ auf die RIEMANNsche $\frac{\xi_1}{\xi_0}$-Zahlenkugel oder gleichwertig durch das sphärische Linienelement $\frac{|d z|}{1+|z|^2}$ $\left(z = \frac{\xi_1}{\xi_0}\right)$ bestimmt wird.

2.9. Aus dem Beweis zu 2.8. erkennt man: Die gefaserte Mannigfaltigkeit Σ_n kann so konstruiert werden: S sei auf $P^{(1)}$ gegeben durch $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| = 1$, E' durch $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| \leq 1$ und E'' durch $\left|\frac{y_1}{y_2}\right| \leq 1$. S als Rand von E' werde mit S', S als Rand von E'' werde mit S'' bezeichnet. Σ_n entsteht durch „Verklebung" aus den cartesischen Produkten $P_*^{(1)} \times E'$, $P_*^{(1)} \times E''$, indem man durch w_n den Rand $P_*^{(1)} \times S'$ auf $P_*^{(1)} \times S''$ fasertreu topologisch abbildet und entsprechende Punkte identifiziert.

2.10. Nach STEENROD[7]) gibt es genau zwei Typen von sphere bundles A mit $A/S^2 = S^2$. Es entsteht die Frage, wie sich die gefaserten Mannigfaltigkeiten Σ_n auf diese beiden Typen verteilen. Die Antwort lautet: Wenn $n \equiv m \pmod 2$, dann lassen sich Σ_n und Σ_m fasertreu topologisch aufeinander abbilden, und zwar so, daß die Fasern von Σ_n orthogonal auf die Fasern von Σ_m abgebildet werden. Σ_n, Σ_m repräsentieren dasselbe sphere bundle. Für gerades n ist also Σ_n fasertreu homöomorph zu $\Sigma_0 = S^2 \times S^2$, und es handelt sich um die triviale Faserung des cartesischen Produktes. Für ungerades n ist Σ_n fasertreu homöomorph zu Σ_1. Da Σ_1 nicht zu $S^2 \times S^2$ homöomorph ist (2.7.), werden die beiden Typen von sphere bundles A mit $A/S^2 = S^2$ durch Σ_0 und Σ_1 repräsentiert.

Beweis: Es sei $n > m$ und $n - m$ gerade. Die Behauptung, daß Σ_n, Σ_m dasselbe sphere bundle repräsentieren, ergibt sich so: Γ_3 sei der Raum der orthogonalen Drehungen von $P_*^{(1)}$, der bekanntlich zum 3-dimensionalen reellen projektiven Raum homöomorph ist. Die Abbildung w_k von $P_*^{(1)} \times S'$ auf $P_*^{(1)} \times S''$ bei der Konstruktion von Σ_k (2.9.) bestimmt einen Weg W_k in Γ_3. Da $n - m$ gerade, ist der Weg W_{n-m} in Γ_3 nullhomotop. Es gibt daher eine fasertreue, topologische, auf den Fasern orthogonale Abbildung von $P_*^{(1)} \times E'$ auf sich, die für $P_*^{(1)} \times S'$ mit w_{n-m} übereinstimmt. Σ_n, bzw. Σ_m entsteht durch Identifizierung von $P_*^{(1)} \times S'$ und $P_*^{(1)} \times S''$ mittels der Abbildung w_n bzw. w_m. Nun ist aber $w_n = w_m w_{n-m}$.

[7]) STEENROD, N.E.: Classification of sphere bundles, Ann. of Math. 45, S. 294—311 (1944).

2. 11. Es werde noch eine spezielle fasertreue topologische Abbildung von $\Sigma_0 = P^{(1)} \times P^{(1)}$ auf Σ_n (n gerade) angegeben. (u_1, u_2; v_1, v_2) seien Koordinaten für $P^{(1)} \times P^{(1)}$, die in u_1, u_2 und v_1, v_2 homogen sind. Folgende Abbildung von $P^{(1)} \times P^{(1)}$ *in* $P^{(2)} \times P^{(1)}$ ist eine fasertreue topologische Abbildung von $P^{(1)} \times P^{(1)}$ *auf* Σ_n (n gerade).

$$\begin{array}{lll} y_1 = v_1 & x_0 = (|v_1|^n + |v_2|^n)\,(v_1^{\frac{n}{2}}\, u_1 + v_2^{\frac{n}{2}}\, u_2) & \\ & x_1 = & v_2^n\,(-\bar{v}_2^{\frac{n}{2}}\, u_1 + \bar{v}_1^{\frac{n}{2}}\, u_1) \\ y_2 = v_2 & & \\ & x_2 = & v_1^n\,(-\bar{v}_2^{\frac{n}{2}}\, u_1 + \bar{v}_1^{\frac{n}{2}}\, u_1)\,. \end{array}$$

Die Fasern $\frac{v_2}{v_1} = \text{const}$ von $P^{(1)} \times P^{(1)}$ sind mit einer orthogonalen Struktur versehen. Die Fasern von Σ_n sind nach 2.8. ebenfalls mit einer orthogonalen Struktur versehen. Man kann leicht nachrechnen, daß die angegebene Abbildung auf den einzelnen Fasern orthogonal ist.

3. Die Mannigfaltigkeiten Σ_n sind als komplexe Mannigfaltigkeiten paarweise verschieden.

3. 1. $\varphi_1^{-1}\varphi_n$ ist eine analytische Abbildung von $\Sigma_n - T_n$ auf $\Sigma_1 - T_1$ (vgl. 2.3.), die sich zu einer analytischen Abbildung $\tilde{\varphi}_n$ von Σ_n auf Σ_1 erweitern läßt. Es ist $\tilde{\varphi}_n(T_n) = T_1$. Wenn Σ_n durch $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$ und Σ_1 durch $\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 = 0$ gegeben ist (vgl. 2. 1.), dann wird $\tilde{\varphi}_n$ durch $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{y}_1 = y_1^n$, $\tilde{y}_2 = y_2^n$ gegeben. Σ_n ist eine n-blättrige verzweigte Überlagerung von Σ_1 mit der zugehörigen Überlagerungsabbildung $\tilde{\varphi}_n$[8]).

3. 2. Es werde gesetzt $E_n = \varphi_n^{-1}(E)$ (vgl. 2.4. E: die „unendlich ferne" Ebene $x_0 = 0$ von $P^{(2)}$). Durch E_n, T_n werden ganzzahlige 2-dim. Homologieklassen ε_n, τ_n von Σ_n repräsentiert, ν_n sei die Homologieklasse der Fasern von Σ_n. Man beachte, daß E_n, T_n und die Fasern als analytische Flächen von Σ_n in natürlicher Weise orientiert sind. T_n, E_n sind Schnittflächen der Faserung von Σ_n. — Der zu $\tilde{\varphi}_n$ gehörige Hopfsche Umkehrungshomomorphismus[9]) des Homologieringes von Σ_1 in den von Σ_n werde mit φ_n^* bezeichnet.

Es ist $\tilde{\varphi}_n^{-1}(T_1) = T_n$, $\tilde{\varphi}_n^{-1}(E_1) = E_n$ und $\varphi_n^*(\tau_1) = \tau_n$, $\varphi_n^*(\varepsilon_1) = \varepsilon_n$, $\varphi_n^*(\nu_1) = n\,\nu_n$. Es folgt $\tau_n \circ \tau_n = \varphi_n^*(\tau_1) \circ \varphi_n^*(\tau_1) = \varphi_n(\tau_1 \circ \tau_1) = \varphi_n^*(-\text{Punkt}) = -n$ und ebenso $\varepsilon_n \circ \varepsilon_n = n$. Die Schnittzahl 1 ist dabei als die durch einen Punkt repräsentierte 0-dimensionale Homologieklasse aufzufassen. Es ist $\tau_n \circ \nu_n = \varepsilon_n \circ \nu_n = 1$. Zu (τ_n, ν_n) gehört die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ihre Determinante ist -1. Daher bilden (τ_n, ν_n) eine (ganzzahlige) 2-dim. Homologiebasis. Aus $\varepsilon_n \circ \tau_n = 0$, $\varepsilon_n \circ \nu_n = 1$ berechnet man: $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$.

3. 3. Wir können zusammenfassend sagen: Σ_n besitzt eine 2-dim. Homologiebasis (τ_n, ν_n) mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Homologieklassen τ_n, ν_n und $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$ werden durch irreduzible analytische Flächen repräsentiert. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

---

[8]) Für ungerades n gibt $\tilde{\varphi}_n$ eine stetige Abbildung von $P^{(2)} + P^{(2)}$ auf sich vom Grade n an, eine stetige Selbstabbildung von einem Grade $k \equiv 2 \pmod 4$ gibt es nicht. Vgl.[6]), S. 185.

[9]) Hopf, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, J. ang. Math. 163, 71—88 (1930). Vgl. auch die bei Rueff[6]) angegebene Literatur.

1. *n gerade*

$\left(\nu_n, \tau_n + \frac{n}{2}\nu_n\right)$ ist ebenfalls eine 2-dim. Homologiebasis. Die zugehörige Schnittmatrix ist $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (vgl. 2.7., 2.10.).

2. *n ungerade*

$\left(\tau_n + \frac{n+1}{2}\nu_n, \tau_n + \frac{n-1}{2}\nu_n\right)$ ist eine Basis mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (vgl. 2.6., 2.10.).

3.4. Aus den in 3.3. zusammengestellten Tatsachen läßt sich der folgende Satz ableiten:

Die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n, Σ_m $(n \neq m)$ lassen sich nicht topologisch und analytisch aufeinander abbilden, d. h. Σ_n, Σ_m sind als komplexe Mannigfaltigkeiten verschieden.

Beweis: Da die Schnittmatrizen unter 3.3. Fall 1 und 2 nicht äquivalent sind, genügt es, die folgende Kontraposition zu beweisen: Wenn Σ_n, Σ_m topologisch und analytisch aufeinander abbildbar sind, wobei $n \equiv m \pmod 2$ und $m \neq 0$ sein soll, dann ist $n = m$. Wir kommen nun zum Beweis dieser Kontraposition:

Σ_n, Σ_m lassen sich als zwei Exemplare derselben komplexen Mannigfaltigkeit $M^{(2)}$ auffassen. In $M^{(2)}$ führen wir nach 3.3. eine feste 2-dimensionale Homologiebasis (ξ, η) mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ im Fall 1, bzw. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ im Fall 2, ein.

In $M^{(2)}$ gibt es 2-dim. Homologieklassen $\tau_n, \nu_n, \varepsilon_n, \tau_m, \nu_m, \varepsilon_m$, die durch analytische Flächen repräsentiert werden. Diese analytischen Flächen sind irreduzibel. Zwei von ihnen sind deshalb identisch, oder schneiden sich in isolierten Punkten. Es folgt hieraus:

$$(*)\quad \tau_n \circ \varepsilon_m \geq 0,\ \tau_m \circ \varepsilon_n \geq 0,\ \nu_n \circ \tau_m \geq 0,\ \nu_n \circ \varepsilon_m \geq 0.$$

(Beweis: Da die jeweils zum Schnitt gebrachten Homologieklassen sicher verschieden sind, weil ihre Selbstschnittzahlen verschieden sind, können die repräsentierenden analytischen Flächen nicht identisch sein. Vgl. 0.6)

Fall 1. *n, m gerade.*

(ξ, η) ist eine Basis mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

τ_n, ν_n lassen sich darstellen in der Form:

$\tau_n = a\,\xi + b\,\eta$

$\nu_n = c\,\xi + d\,\eta$ (a, b, c, d ganze Zahlen), es muß gelten:

$$\begin{pmatrix}-n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2ab & ad+bc\\ ad+bc & 2cd\end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt: entweder $c = 0$ oder $d = 0$.

Ist $c = 0$, so ist $a = e$, $d = e$, $b = -e\frac{n}{2}$ $\quad (e = \pm 1)$

Ist $d = 0$, so ist $b = e'$, $c = e'$, $a = -e'\frac{n}{2}$ $(e' = \pm 1)$

Es ist also: (man beachte die Gleichung $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$),

$$(1)\quad \begin{aligned}\nu_n &= e\,\eta\\ \tau_n &= e\left(\xi - \frac{n}{2}\eta\right)\\ \varepsilon_n &= e\left(\xi + \frac{n}{2}\eta\right)\end{aligned} \quad\text{oder}\quad (2)\quad \begin{aligned}\nu_n &= e'\,\xi\\ \tau_n &= e'\left(-\frac{n}{2}\xi + \eta\right)\\ \varepsilon_n &= e'\left(\frac{n}{2}\xi + \eta\right).\end{aligned}$$

Entsprechend gilt: $(e'' = \pm 1,\ e''' = \pm 1)$

$$(3)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e''\,\eta \\ \tau_m &= e''\left(\xi - \frac{m}{2}\eta\right) \\ \varepsilon_m &= e''\left(\xi + \frac{m}{2}\eta\right) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (4)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e'''\,\xi \\ \tau_m &= e'''\left(-\frac{m}{2}\xi + \eta\right) \\ \varepsilon_m &= e'''\left(\frac{m}{2}\xi + \eta\right). \end{aligned}$$

Wenn „(2) und (3)“, so ist $\nu_n \circ \tau_m = -e'\,e''\,\frac{m}{2}$ und $\nu_n \circ \varepsilon_m = e'\,e''\,\frac{m}{2}$, also $\nu_n \circ \tau_m$ oder $\nu_n \circ \varepsilon_m$ negativ. Das steht im Widerspruch zu (*). „(2) und (3)“ trifft daher nicht zu. Ebenso wird „(1) und (4)“ zum Widerspruch geführt. Es gilt daher: „(1) und (3)“ oder „(2) und (4)“. Nach evtl. Umbenennung von ξ in η und η in ξ können wir annehmen, daß „(1) und (3)“ gilt. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \tau_n \circ \varepsilon_m &= e\,e''\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right) \\ \varepsilon_n \circ \tau_m &= e\,e''\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) \end{aligned} \qquad \tau_n \circ \varepsilon_m = -\varepsilon_n \circ \tau_m\,.$$

Aus (*) folgt weiter $\tau_n \circ \varepsilon_m = \varepsilon_n \circ \tau_m = 0$, d. h. $n = m$.

Fall 2. *n, m ungerade.* Der Beweis verläuft analog:

(ξ, η) ist eine Basis mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

τ_n, ν_n lassen sich darstellen in der Form:

$\tau_n = a\,\xi + b\,\eta$

$\nu_n = c\,\xi + d\,\eta$ (a, b, c, d ganze Zahlen), und es gilt:

$$\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & a c - b d \\ a c - b d & c^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt: Entweder $c = d$, oder $c = -d$.

$$\text{Ist } c = d, \text{ so ist } c = d = e,\ a - b = e,\ a + b = -e\,n,$$
$$a = -e\,\frac{n-1}{2}\,,\ b = -e\,\frac{n+1}{2} \qquad (e = \pm 1).$$

Ist $c = -d$, so ist $c = -e'$, $d = e'$, $a = e'\,\frac{n-1}{2}$, $b = -e'\,\frac{n+1}{2}$ $(e' = \pm 1)$.

Es ist also: (man beachte $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$)

$$(1)\quad \begin{aligned} \nu_n &= e\,(\xi + \eta) \\ \tau_n &= -e\left(\frac{n-1}{2}\xi + \frac{n+1}{2}\eta\right) \\ \varepsilon_n &= e\left(\frac{n+1}{2}\xi + \frac{n-1}{2}\eta\right) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (2)\quad \begin{aligned} \nu_n &= e'\,(-\xi + \eta) \\ \tau_n &= e'\left(\frac{n-1}{2}\xi - \frac{n+1}{2}\eta\right) \\ \varepsilon_n &= e'\left(-\frac{n+1}{2}\xi + \frac{n-1}{2}\eta\right). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt: $(e'' = \pm 1,\ e''' = \pm 1)$

$$(3)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e''\,(\xi + \eta) \\ \tau_m &= -e''\left(\frac{m-1}{2}\xi + \frac{m+1}{2}\eta\right) \\ \varepsilon_m &= e''\left(\frac{m+1}{2}\xi + \frac{m-1}{2}\eta\right) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (4)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e'''\,(-\xi + \eta) \\ \tau_m &= e'''\left(\frac{m-1}{2}\xi - \frac{m+1}{2}\eta\right) \\ \varepsilon_m &= e'''\left(-\frac{m+1}{2}\xi + \frac{m-1}{2}\eta\right). \end{aligned}$$

Wenn „(2) und (3)“, so ist $\nu_n \circ \tau_m = e'\,e''\,m$ und $\nu_n \circ \varepsilon_m = -e'\,e''\,m$, also $\nu_n \circ \tau_m$ oder $\nu_n \circ \varepsilon_m$ negativ. Das steht im Widerspruch zu (*). Ebenso wird „(1) und (4)“ zum Widerspruch geführt. Es gilt daher: „(1) und (3)“ oder „(2) und (4)“.

Nach einer evtl. erlaubten Umbenennung von ξ in $-\xi$ und $-\xi$ in ξ können wir annehmen, daß „(1) und (3)" gilt, es folgt dann:

$$\tau_n \circ \varepsilon_m = -\varepsilon_n \circ \tau_m = e\, e'' \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right).$$

Aus (*) folgt $\tau_n \circ \varepsilon_m = \varepsilon_n \circ \tau_m = 0$, d. h. $n = m$.

3.5. Wir wollen unser Resultat nochmals zusammenfassen: Die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n (n gerade) stellen unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für die (einfach zusammenhängende, geschlossene) topologische Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^2$ dar.

Die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n (n ungerade) stellen unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für die (ebenfalls einfach zusammenhängende und geschlossene) topologische Summe 2. Art zweier Exemplare der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ dar.

Die 2. Bettischen Zahlen dieser topologischen Mannigfaltigkeiten $S^2 \times S^2$ und $P^{(2)} + P^{(2)}$ sind beide gleich 2. Es bleibt die Frage offen, ob es einfach zusammenhängende, geschlossene, 4-dim. Mannigfaltigkeiten mit der 2. Bettischen Zahl 1 gibt, die verschiedene komplexe Strukturen zulassen. Meines Wissens ist nicht bekannt, ob $P^{(2)}$ verschiedene komplexe Strukturen zuläßt.

4. Die birationale Äquivalenz der Mannigfaltigkeiten Σ_n mit der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$[10]).

4.0. $M^{(2)}$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Q \in M^{(2)}$. Die von Q verschiedenen Punkte von $M^{(2)}$ und die analytischen Flächenelemente (= komplexe Linienelemente) von $M^{(2)}$ in Q lassen sich in natürlicher Weise als Punkte einer neuen komplexen Mannigfaltigkeit $M_Q^{(2)}$ auffassen. Die analytischen Flächenelemente von $M^{(2)}$ in Q lassen sich als Punkte einer komplex-projektiven Geraden (= Riemannsche Zahlenkugel) auffassen, die Trägersphäre des Punktes Q genannt und mit T_Q bezeichnet werde. $M_Q^{(2)}$ entsteht, anschaulich gesagt, aus $M^{(2)}$ durch „Herausstechen" von Q und darauf folgendes „analytisches Einsetzen" von T_Q. Die Mannigfaltigkeit Σ_1 (vgl. 2. 3.) entsteht durch Einsetzen einer Trägersphäre aus $P^{(2)}$[11]).

4.1. Das cartesische Produkt $P^{(2)} \times P^{(1)}$ (vgl. 2.1.) kann singularitätenfrei als algebraische Mannigfaltigkeit in den $P^{(5)}$ eingebettet werden. Durch $z_{ik} = x_i\, y_k$ ($i = 0, 1, 2$; $k = 1, 2$; z_{ik} homogene Koordinaten des $P^{(5)}$) wird eine eineindeutige Parameterdarstellung dieser algebraischen Mannigfaltigkeit gegeben. Σ_n ist damit singularitätenfrei als algebraische Fläche im $P^{(5)}$ eingebettet. Diese algebraische Fläche werde in den $P^{(3)}$ projiziert. (z_1, z_2, z_3, z_4) seien homogene Koordinaten für $P^{(3)}$. Wir setzen: $z_1 = z_{21} = x_2\, y_1$, $z_2 = z_{12} = x_1\, y_2$, $z_3 = z_{02} = x_0\, y_2$, $z_4 = z_{01} = x_0\, y_1$. Diese Gleichungen stellen eine eindeutige Abbildung ψ_n von Σ_n (gegeben durch $x_1\, y_1^n - x_2\, y_2^n = 0$) auf die algebraische Fläche Σ_n^* (gegeben durch $z_1\, z_3^{n+1} - z_2\, z_4^{n+1} = 0$) dar. Die Gerade $z_3 = 0$, $z_4 = 0$ von Σ_n^* werde mit E_n^* bezeichnet. Durch $x_0 = 0$ wird in Σ_n die Gerade E_n bestimmt (vgl. 3. 2.). Man überzeugt sich leicht, daß ψ_n eine ein-

[10]) Man beachte 1. 4.

[11]) Dieser Einsetzungsprozeß ist aus der algebraischen Geometrie bekannt. Die Nützlichkeit dieses Prozesses für die Untersuchung komplexer Mannigfaltigkeiten ist von Herrn H. Hopf in Vorträgen und Gesprächen wiederholt betont worden. Man vgl. auch Behnke, H. und Stein, K., Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. 124, 1—16 (1951), Nr. 3.

eindeutige Abbildung von $\Sigma_n - E_n$ auf $\Sigma_n^* - E_n^*$ ist und daß $\psi_n(E_n) = E_n^*$. Die Abbildung ψ_n wird für $x_0 = 0$, d. h. für E_n, gegeben durch: $z_1 = y_1^{n+1}$, $z_2 = y_2^{n+1}$. Es folgt: Σ_n entsteht aus der algebraischen Fläche Σ_n^*, indem man jeden Punkt der $(n+1)$-fachen Geraden $z_3 = 0$, $z_4 = 0$, abgesehen von den „Verzweigungspunkten" $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 0)$, in $n+1$ verschiedene Punkte „auflöst". Σ_n (als algebraische Fläche im $P^{(5)}$ aufgefaßt) und die algebraische Fläche Σ_n^* im $P^{(3)}$ sind birational äquivalent. Σ_n^* ist eine „windschiefe Fläche" $(n+2)$-ter Ordnung mit einer $(n+1)$-fachen Geraden (vgl. zum Folgenden NOETHER[13]), insbesondere S. 195).

4.2. Die Fasern von Σ_n werden durch ψ_n auf die Geraden abgebildet, die das Ebenenbüschel $z_3 y_1 - z_4 y_2 = 0$ aus Σ_n^* herausschneidet. Q sei ein von den Verzweigungspunkten verschiedener Punkt der $(n+1)$-fachen Geraden; wir projizieren Σ_n^* von Q auf eine nicht durch Q gehende Ebene $\tilde{P}^{(2)}$. Diese Projektion ϱ_n stellt eine birationale Beziehung zwischen Σ_n^* und $\tilde{P}^{(2)}$ her. Die algebraischen Flächen Σ_n im $P^{(5)}$ sind also alle mit der Ebene $\tilde{P}^{(2)}$ birational äquivalent.

4.3. Die birationale Beziehung zwischen Σ_n und $\tilde{P}^{(2)}$ soll etwas näher untersucht werden. $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ seien die $n+1$ Punkte von Σ_n, in die der Punkt Q von Σ_n^* „aufgelöst" wird, d. h. $\psi_n(Q_i) = Q$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. $\varrho_n \psi_n$ ist eine eindeutige Abbildung von $\Sigma_n - \{Q_1, \ldots, Q_{n+1}\}$ in $\tilde{P}^{(2)}$. Die durch Q_i gehende Faser von Σ_n wird auf einen einzigen Punkt A_i von $\tilde{P}^{(2)}$ abgebildet, E_n entspricht der vielfachen Geraden von Σ_n^* und geht in einen einzigen Punkt B von $\tilde{P}^{(2)}$ über. Die Punkte A_i liegen auf einer Geraden von $\tilde{P}^{(2)}$, auf der B nicht liegt. In Q_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ werde die Trägersphäre T_{Q_i} (vgl. 4.0.) eingesetzt. Die entstehende Mannigfaltigkeit werde mit $\Sigma_{n,Q}$ bezeichnet. $\varrho_n \psi_n$ bildet $\Sigma_{n,Q}$ eindeutig auf $\tilde{P}^{(2)}$ ab, und zwar T_{Q_i} auf die Verbindungsgerade $A_i B$. In den Punkten A_i und B von $\tilde{P}^{(2)}$ mögen die Trägersphären T_{A_i}, T_B eingesetzt werden. Die entstehende Mannigfaltigkeit werde mit $\tilde{P}^{(2)}_{A,B}$ bezeichnet. $\varrho_n \psi_n$ läßt sich als eineindeutige analytische Abbildung von $\Sigma_{n,Q}$ auf $\tilde{P}^{(2)}_{A,B}$ auffassen.

4.4. Die in 4.3. angegebenen Beziehungen lassen sich so formulieren: Σ_n kann folgendermaßen erhalten werden. In der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ werden in $n+1$ Punkten A_i, die auf einer Geraden liegen, und in einen Punkt B, der nicht auf dieser Geraden liegt, die Trägersphären eingesetzt. Man erhält eine Mannigfaltigkeit $P^{(2)}_{A,B}$. Die Verbindungsgeraden $A_i B$ verhalten sich in $P^{(2)}_{A,B}$ wie eingesetzte Trägersphären. Nimmt man sie aus $P^{(2)}_{A,B}$ heraus und schließt durch jeweils einen einzigen Punkt wieder ab, dann erhält man Σ_n.

---

[13]) NOETHER, M.: Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen. Math. Ann. 3, S. 161–227 (1871).

(Eingegangen am 7. April 1951.)