German exam

Part 1

Spring 2007

Choose one section to translate.

Start at the beginning and go as far as you can in the allotted time.

Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen[1]).

Von

Hans Lewy in Göttingen.

In einer Note in den Göttinger Nachrichten 1927 Heft 2 habe ich einen neuen Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer analytischer Differentialgleichungen in einem Spezialfall ausgeführt. Hier folgt der Beweis des allgemeinen Theorems für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen, der wie jener darauf beruht, die vorgelegte Lösung u einer elliptischen analytischen Differentialgleichung zunächst für komplexe Werte der unabhängigen Variablen x und y zu ermitteln. Diese Fortsetzung ins Komplexe wird hier aufgefaßt als Lösung eines Anfangswertproblems eines „kanonisch-hyperbolischen Systems" von Differentialgleichungen, d. h. eines solchen, wie es z. B. auch zur Lösung des Anfangswertproblems einer hyperbolischen Differentialgleichung verwendet wird. Es wird sodann nachgewiesen, daß in einem vierdimensionalen Gebiet der Variablen x_1, x_2, y_1, y_2 (Real- und Imaginärteile von x und y), das das reelle Ebenenstück $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, in welchem die Lösung u ursprünglich vorliegt, im Inneren enthält, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bezüglich x_1, x_2 und bezüglich y_1, y_2 erfüllt sind. Das bedeutet aber, daß u analytisch von x und y in jenem Gebiet, also auch schon in seinem ursprünglichen Definitionsbereich abhängt.

§ 1.

Charakteristische Differentialgleichungen und Fortsetzung ins Komplexe.

Sei

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

eine analytisch von den Argumenten abhängige Differentialgleichung zweiter

[1]) Bezüglich der älteren Beweise sei auf den Enzyklopädiebericht von Lichtenstein 2 C 12, S. 1320 und auf die jüngst erschienenen Arbeiten von T. Radó, Math. Zeitschr. 25, S. 514 ff., und S. Bernstein, Math. Zeitschr. 28, S. 330 ff., verwiesen.

Ordnung, in der

$$p = u_x, \quad q = u_y, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}$$

wie üblich zur Abkürzung gesetzt sind. Für eine vorgelegte Lösung u sei die Differentialgleichung in einem Gebiet der x, y-Ebene vom elliptischen Typus, d. h. es sei dort

$$4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 > 0,$$

woraus insbesondere $\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ folgt. Man verstehe nun unter den stetigen Funktionen $\varrho_1(x, y)$ und $\varrho_2(x, y)$ die beiden sicher verschiedenen komplexen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial r} \varrho^2 - \frac{\partial F}{\partial s} \varrho + \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

unter den Differentiationsoperatoren $'$ bzw. $`$ die folgenden linearen Kombinationen der Symbole $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$' = \frac{\partial}{\partial x} + \varrho_1 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad ` = \frac{\partial}{\partial x} + \varrho_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dann folgt

$$y' - \varrho_1 x' = 0 \quad \text{und} \quad y` - \varrho_2 x` = 0.$$

Aus dem Bestehen dieser Gleichungen folgen jetzt in bekannter Weise rein algebraisch noch weitere charakterische Differentialgleichungen für die Größen x, y, u, p, q, r, s, t. Diese sowohl wie die beiden schon genannten $y' - \varrho_1 x' = 0$ und $y` - \varrho_2 x` = 0$ lassen sich nach geeigneter Auswahl in die folgende Form setzen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{8} a_{ik} \varphi_k' = 0 \qquad && (i = 1, 2, \ldots, 6), \\ &\sum_{k=1}^{8} a_{ik} \varphi_k` = 0 \qquad && (i = 7, 8), \end{aligned}$$

in der die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$ zur übersichtlicheren Schreibweise für $x, y, \ldots, t$ stehen, die a_{ik} vermöge unserer Voraussetzung über F analytische Funktionen der Argumente $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ sind und wo die Determinante $|a_{ik}|$ nicht verschwindet[2]). Das Nichtverschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ folgt aus

[2]) Eine nähere Begründung findet man bei Hans Lewy, „Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Veränderlichen", Math. Annalen 98, S. 179 ff., und bei K. Friedrichs und Hans Lewy, „Lösung des Anfangswertproblems einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variablen", Math. Annalen 99, S. 200 ff.

den nach der Voraussetzung des elliptischen Charakters erfüllten Ungleichungen

$$4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 \neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial r}\neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}\neq 0.$$

Um die in der Einleitung angekündigte Fortsetzung ins Komplexe auszuführen, werden wir alle Größen φ als Funktionen von vier unabhängigen Variablen $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ angeben, die wir so wählen, daß für $\xi_2=\eta_2=0$ die Ebene ξ_1, η_1 mit der x, y-Ebene zusammenfällt, d. h. so, daß

$$x(\xi_1, 0, \eta_1, 0)=\varphi_1(\xi_1, 0, \eta_1, 0)=\xi_1,$$
$$y(\xi_1, 0, \eta_1, 0)=\varphi_2(\xi_1, 0, \eta_1, 0)=\eta_1$$

ist. Dadurch sind in der Ebene $\xi_2=\eta_2=0$ die sämtlichen φ, die vorher Funktionen von x, y waren, nun als dieselben Funktionen von ξ_1 und η_1 bekannt. Um nun diese $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ als Funktionen der vier Argumente $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ zu bestimmen, greifen wir ein ins Innere des Definitionsbereichs unserer Lösung fallendes Geradenstück $\eta_1=$ konst. unserer ξ_1, η_1-Ebene heraus. Die $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ sind dort also Funktionen von ξ_1. Wir bestimmen jetzt die φ in einer gewissen zweidimensionalen beiderseitigen Umgebung dieses Geradenstückes in einer ξ_1, η_2-Ebene. Wir benutzen zur Fortsetzung in diese das obige System (1) der charakteristischen Differentialgleichungen

$$\sum_k a_{ik}\varphi_k' = 0 \qquad (i=1, \ldots, 6);$$
$$\sum_k a_{ik}\varphi_k^{`} = 0 \qquad (i=7, 8),$$

geben aber den Operatoren nun die Bedeutung[3])

$$(*) \qquad \begin{aligned} {}' &= \frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2} \\ {}^{`} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}. \end{aligned}$$

Man hat hier ein Anfangswertproblem für Funktionen der beiden unabhängigen Variablen ξ_1, η_2 vor sich, dessen Lösbarkeit von mir in der zitierten Arbeit über das hyperbolische Anfangswertproblem bewiesen wurde. Allerdings werden bei dieser Fortsetzung die Funktionen φ möglicherweise komplex werden, da schon für $\xi_2=\eta_2=0$ nicht alle a_{ik} reell sind. Die Bedeutung der a_{ik} für komplexe Werte der φ anzugeben, hat keine Schwierigkeit, da die a_{ik} analytisch von den φ abhängen; wir erklären die a_{ik} für komplexe Werte der φ einfach als analytische Fortsetzungen der

[3]) Wesentlich an dieser Festsetzung der Bedeutung der Operatoren ist nur, daß sie Differentiationen in zwei verschiedenen Richtungen der ξ_1, η_2-Ebene bedeuten und daß keine dieser Richtungen parallel zur „Anfangsgeraden“ $\eta_2=0$ ist.

a_{ik} für reelle Werte der φ. Um nun den zitierten Satz[4]) unmittelbar anzuwenden, zerlege man die Funktionen φ in Real- und Imaginärteile

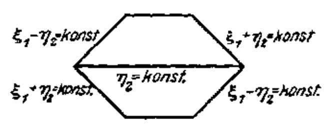
$$\varphi = \bar{\varphi} + i\tilde{\varphi}$$

und benutze zur Fortsetzung das aus dem obigen System durch Aufspaltung nach Real- und Imaginärteil entstehende neue System von doppelt soviel Differentialgleichungen für doppelt soviel Unbekannte. Dabei sind die Anfangswerte der $\bar{\varphi}$ selbstverständlich gleich denen der φ selbst und die der $\tilde{\varphi}$ gleich Null zu nehmen. Das neue System hat natürlich wieder eine Determinante, die für die Anfangswerte nicht verschwindet[5]).

---

[4]) H. Lewy, loc. cit. Im folgenden werden noch die folgenden Eigenschaften von Lösungen eines solchen „kanonisch hyperbolischen" Systems benutzt, die ich hier zusammenstellen möchte:

1. Man kann eine etwa aus zwei kongruenten Trapezen (vgl. Figur) bestehende beiderseitige Umgebung des Geradenstückes $\eta_2 =$ konst. angeben, in der die Funktionen φ existieren und den obigen Differentialgleichungen gehorchen; die Größe der Trapeze hängt dabei, was die Anfangswerte betrifft, nur ab



α) von oberen Schranken der $\left|\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial \eta_2}\right|$, $\left|\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta_2}\right|$ auf dem herausgegriffenen Geradenstück; β) von oberen und unteren Schranken für die $\bar{\varphi}_i$, $\tilde{\varphi}_i$ selbst; γ) von einer unteren Schranke für den Abstand der durch die Anfangswerte φ_i, $\tilde{\varphi}_i$ gegebenen Kurve des 16-dimensionalen $\bar{\varphi}_i$, $\tilde{\varphi}_i$-Raumes vom nächsten singulären Punkt der Funktionen $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8)$ und von der nächsten Nullstelle der Determinante $|a_{ik}|$. Es wird dabei vorausgesetzt daß alle betrachteten Anfangswerte der φ einem genügend kleinen Bereich des φ-Raumes angehören.

2. Sind die Anfangswerte der φ und ihre ersten Ableitungen stetige Funktionen von einem oder mehreren Parametern, so folgt aus dem soeben Gesagten, daß man die Größe der trapezförmigen Umgebung des Geradenstücks für die verschiedenen Werte des Parameters gleichmäßig nach unten abschätzen kann, und zwar durch eine positive Schranke.

3. Stetige n-malige Differenzierbarkeit der φ_i nach den Variablen der Differentialgleichungen und nach Parametern bleibt in der besagten Umgebung des Geradenstücks erhalten, wenn sie fur die Anfangswerte gesichert ist.

Soweit diese Eigenschaften der Lösungen kanonisch hyperbolischer Systeme nicht schon in meiner Arbeit genannt und bewiesen werden, sind sie jedenfalls durch leichte Modifikation des dortigen Existenzbeweises zu erhalten, oder — wie ich dies in Göttinger Vorlesungen ausgeführt habe — indem man völlig analog zu den Methoden verfährt, die zum Beweise der entsprechenden Behauptungen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzt werden. Vgl. auch die Fußnote S. 610.

[5]) Denn sonst würde ein mit der neuen Matrix gebildetes linear homogenes Gleichungssystem eine nicht triviale Lösung besitzen, also auch ein linear homogenes Gleichungssystem mit der alten Matrix, was unmöglich ist, weil dessen Determinante nicht verschwindet.

Das Verfahren der Fortsetzung, das soeben für ein Geradenstück $\eta_1 =$ konst. der Ebene $\xi_2 = \eta_2 = 0$ als Anfangskurve beschrieben wurde, wende man nun auf *alle* parallelen Geradenstücke $\eta_1 =$ konst. dieser Ebene, soweit sie in den Definitionsbereich der Lösung u fallen, an. Man bestimmt so die Funktionen φ in einem dreidimensionalen Gebiet[6]) des $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$-Raumes, nämlich einem solchen, in dem $\xi_2 = 0$ gilt. Dies Gebiet enthält das Ebenenstück der Ebene $\xi_2 = \eta_2 = 0$ im Inneren.

Nunmehr geht man von den sämtlichen Geraden $\xi_1 =$ konst., $\eta_2 =$ konst. des soeben betrachteten dreidimensionalen Gebietes $\xi_2 = 0$ des $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$-Raumes aus und setzt die dort bekannten Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ in ein umgebendes vierdimensionales Raumstück[6]) fort, indem man wieder das System

$$\sum_k a_{ik} \varphi_k' = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 6),$$

$$\sum_k a_{ik} \varphi_k^{\cdot} = 0 \qquad (i = 7, 8)$$

benutzt, jetzt aber den Operatoren die folgende Bedeutung gibt:

$$(**) \qquad \begin{aligned} &= \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial \eta_1}, \\ &= + \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \eta_1}. \end{aligned}$$

§ 2.

Rückkehr zu den alten Variablen.

Ein Hauptpunkt der folgenden Untersuchung ist der Nachweis, daß man anstatt $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ auch x_1, x_2, y_1, y_2 als unabhängige Variabe einführen kann, wenn man sich auf eine hinreichend kleine vierdimensionale Umgebung eines Punktes x, y des ursprünglichen Definitionsbereiches von u beschränkt, was wir natürlich tun wollen. Es genügt dazu wegen der Stetigkeit[7]), das Nichtverschwinden der Determinante

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \eta_1, y_2)}$$

in dem betreffenden Punkte der „Anfangsebene" nachzuweisen. Da dort die $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ bzw. mit den x_1, x_2, y_1, y_2 übereinstimmen, hat man dort die Gleichungen für acht von den in Frage kommenden Ableitungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = 1, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = 0, & \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_1} = 0, & \dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_1} = 0; \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta_1} = 0, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \eta_1} = 0, & \dfrac{\partial y_1}{\partial \eta_1} = 1, & \dfrac{\partial y_2}{\partial \eta_1} = 0. \end{cases}$$

---

[6]) Vgl. die Fußnote [4]).

[7]) Vgl. Anm. [4]).

Spaltet man weiterhin die Funktionen ϱ_1 und ϱ_2, vgl. S. 610, in dem betreffenden Punkte nach Real- und Imaginärteil, also

$$\varrho_1 = \sigma_1 + i\,\sigma_2, \qquad \varrho_2 = \sigma_1 - i\,\sigma_2, \qquad \sigma_2 \neq 0,$$

so liefern die Gleichungen $y' - \varrho_1 x' = 0$ und $y' - \varrho_2 x' = 0$ in den verschiedenen Bedeutungen (*) und (**) der Differentiationsoperatoren die folgenden vier Gleichungen (unter Benutzung von (2))

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial \eta_2} + i\,\dfrac{\partial y_2}{\partial \eta_2} - (\sigma_1 + i\,\sigma_2)\left(1 + \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta_2} + i\,\dfrac{\partial x_2}{\partial \eta_2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \eta_2} + i\,\dfrac{\partial y_2}{\partial \eta_2} - (\sigma_1 - i\,\sigma_2)\left(-1 + \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta_2} + i\,\dfrac{\partial x_2}{\partial \eta_2}\right) = 0; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_2} + i\,\dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_2} - 1 - (\sigma_1 + i\,\sigma_2)\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + i\,\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_2} + i\,\dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_2} + 1 - (\sigma_1 - i\,\sigma_2)\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + i\,\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Die ersten beiden liefern durch Subtraktion

$$2\,\sigma_1 + 2\,i\,\sigma_2\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} + i\,\frac{\partial x_2}{\partial \eta_2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} + i\,\frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = +\,i\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = 0; \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Weiter erhält man

$$\frac{\partial y_1}{\partial \eta_2} + i\,\frac{\partial y_2}{\partial \eta_2} = \frac{(\sigma_1 + i\,\sigma_2)(\sigma_2 + i\,\sigma_1)}{\sigma_2} = \frac{i\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2}; \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \eta_2} = 0; \qquad \frac{\partial y_2}{\partial \eta_2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2}.$$

Ähnlich entsteht aus den Gleichungen (4) durch Subtraktion

$$2 + 2\,i\,\sigma_2\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + i\,\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right) = 0; \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + i\,\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{i}{\sigma_2}; \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = 0, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\sigma_2},$$

woraus dann

$$\frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} + i\,\frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} = 1 + \frac{(\sigma_1 + i\,\sigma_2)\cdot i}{\sigma_2} = i\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} = 0, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

folgt. Die Matrix der Ableitungen der $x_1\,x_2\,y_1\,y_2$ nach den $\xi_1\,\xi_2\,\eta_1\,\eta_2$ sieht also in dem ins Auge gefaßten Punkte der Anfangsebene $\xi_2 = \eta_2 = 0$ so aus:

	x_1	x_2	y_1	y_2
ξ_1	1	0	0	0
ξ_2	0	$\dfrac{1}{\sigma_2}$	0	$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$
η_1	0	0	1	0
η_2	0	$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$	0	$\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2}$

Wie man sieht, ist die Determinante ungleich null, nämlich gleich 1; man kann also in einer vierdimensionalen Umgebung des betreffenden Punktes der x, y-Ebene die x_1, x_2, y_1, y_2 als neue Koordinaten einführen.

Allgemein werden die Differentiationssymbole nach $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ lineare Kombinationen derer nach x_1, x_2, y_1, y_2. Schreibt man

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}=A_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B_1\frac{\partial}{\partial y_1}+C_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+D_1\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\right),$$

so wird aus $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)(y_1+i\,y_2)-\varrho_1\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)(x_1+i\,x_2)=0$ wegen der Tatsache, daß der Operator $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_1}$ null ergibt, wenn er auf eine analytische Funktion von $x_1+i\,x_2$ (hier $x_1+i\,x_2$ selbst) ausgeübt wird, und wegen der entsprechenden Tatsache für den Operator $\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}$

$$B_1-\varrho_1 A_1=0,$$

und A_1 ist ungleich null, weil sonst der Operator (5) nicht reell sein kann, außer wenn C_1 und D_1 auch verschwinden; das ist aber unmöglich, weil nicht $\frac{\partial}{\partial \xi_1}=-\frac{\partial}{\partial \eta_2}$ ist.

Man findet demnach

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}=A_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\varrho_1 A_1\frac{\partial}{\partial y_1}+C_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+D_1\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\right),$$

und ähnlich

$$(7)\qquad -\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}=A_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\varrho_2 A_2\frac{\partial}{\partial y_1}+C_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+D_2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\right),$$

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial \xi_2}-\frac{\partial}{\partial \eta_1}=E_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\varrho_1 E_1\frac{\partial}{\partial y_1}+G_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+H_1\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\right),$$

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial \xi_2}+\frac{\partial}{\partial \eta_1}=E_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\varrho_2 E_2\frac{\partial}{\partial y_1}+G_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+H_2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\right).$$

Alle diese Größen $A_1, C_1, D_1, \ldots, H_2$ sind nichts weiter als lineare Kombinationen der Differentialquotienten der x_1, x_2, y_1, y_2 nach den $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$; z. B. ist offenbar

$$\begin{aligned}
i\,C_1&=\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)x_2, & i\,D_1&=\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)y_2,\\
i\,C_2&=\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)x_2, & i\,D_2&=\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)y_2,\\
i\,G_1&=\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}-\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)x_2, & i\,H_1&=\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}-\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)y_2,\\
i\,G_2&=\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}+\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)x_2, & i\,H_2&=\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}+\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)y_2,
\end{aligned}$$

und es ist außerdem wichtig, nochmals hervorzuheben, daß A_1, A_2, E_1, E_2 sämtlich ungleich null sind.

Für das Folgende wesentlich sind die Werte der $C_1, D_1, C_2, D_2, G_1, G_2$ H_1, H_2 in der Anfangsebene $x_2 = y_2 = 0$. Man hat dort unter Benutzung unserer Differentiationstafel.

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
i\,C_1 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, & i\,D_1 &= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_2},\\
i\,C_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, & i\,D_2 &= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_2},\\
i\,G_1 &= \frac{1}{\sigma_2}, & i\,H_1 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2},\\
i\,G_2 &= \frac{1}{\sigma_2}, & i\,H_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.
\end{aligned}
$$

§ 3.

In der Anfangsebene gelten nun die charakteristischen Differentialgleichungen (1) in dreierlei Form, entsprechend den drei Bedeutungen des Operators $'$ bzw. $`$. Die erste auf S. 610 erwähnte Bedeutung von $'$ bzw. $`$ lautete

$$
\begin{aligned}
' &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_1 \frac{\partial}{\partial y_1},\\
` &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_2 \frac{\partial}{\partial y_2},
\end{aligned}
$$

die zweite war die von (*), die dritte die von (**). Man subtrahiere nun von dem System (1) in der zweiten Bedeutung das mit A_1 bzw. A_2 multiplizierte der ersten Bedeutung und erhält so unter Berücksichtigung von (6) und (7) und von (10)

$$
\sum_{k=1}^{8} a_{ik}\left[\frac{\sigma_1}{i\,\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{i\,\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right]\varphi_k = 0\,,
$$

wobei der Index i von 1 bis 8 läuft. Aus dem Nichtverschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ in der Anfangsebene folgt nunmehr

$$
(11)\qquad \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right]\varphi_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 8).
$$

Ähnlich folgert man, wenn man das charakteristische System in seiner ersten Bedeutung mit E_1 bzw. E_2 multipliziert und von dem charakteristischen System in der dritten Bedeutung (**) abzieht und wiederum die Werte (10) der Koeffizienten G_1, G_2, H_1, H_2 in der Anfangsebene heranzieht:

$$
(11)\qquad \left[\frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right]\varphi_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 8).
$$

Für jedes einzelne φ_k nun stellen die beiden Gleichungen (10) und (11) zwei Gleichungen dar, aus denen wegen des Nichtverschwindens von

$$\begin{vmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, & \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_2} \\ \frac{1}{\sigma_2} & \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \end{vmatrix} = -1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\varphi_k = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\varphi_k = 0$$

folgt. (Das darf nicht verwundern, denn die Bedeutung der Operatoren ′ bzw. ˋ war natürlich dementsprechend festzulegen.)

Somit ist das Erfülltsein der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der Anfangsebene $x_2 = y_2 = 0$, oder um in der Sprache der $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ zu reden, in der Ebene $\xi_2 = \eta_2 = 0$ gesichert. Wir weisen zunächst ihre Gültigkeit in jenem dreidimensionalen Raumstück $\xi_2 = 0$ nach, in das wir zuerst vermöge der Bedeutung (*) der Operatoren ′ bzw. ˋ fortgesetzt haben. Wir setzen zur Abkürzung

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Wir dividieren die Gleichungen des charakteristischen Systems in der besagten Bedeutung bzw. durch A_1 und A_2, die ja beide nicht verschwinden (vgl. S. 615) und wenden auf das so umgeformte System die Operatoren ∇_x und ∇_y an. Da die a_{ik} analytisch von den $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ abhängen, ist

$$\nabla_x a_{ik} = \sum_l \frac{\partial a_{ik}}{\partial \varphi_l}\nabla_x \varphi_l,$$

$$\nabla_y a_{ik} = \sum_l \frac{\partial a_{ik}}{\partial \varphi_l}\nabla_y \varphi_l.$$

(In diesen Gleichungen wird in der komplexen Differenzierbarkeit der a_{ik} zum einzigen wesentlichen Male die analytische Abhängigkeit der Differentialgleichung $F = 0$ von ihren Argumenten benutzt.) Weiter ist beispielsweise

$$\nabla_x \frac{\varphi_k'}{A_1} = \nabla_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{C_1}{A_1}\nabla_x + \frac{D_1}{A_1}\nabla_y\right)\varphi_k$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{C_1}{A_1}\nabla_x + \frac{D_1}{A_1}\nabla_y\right)\nabla_x\varphi_k$$

$$+ \nabla_x\frac{C_1}{A_1}\nabla_x\varphi_k + \nabla_x\frac{D_1}{A_1}\nabla_y\varphi_k + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1}\cdot\sum_{l=1}^{8}\frac{\partial\varrho_1}{\partial\varphi_l}\nabla_x\varphi_l$$

$$= \frac{1}{A_1}\cdot(\nabla_x\varphi_k)' + \nabla_x\frac{C_1}{A_1}\nabla_x\varphi_k + \nabla_x\frac{D_1}{A_1}\nabla_y\varphi_k + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1}\sum_{l=1}^{8}\frac{\partial\varrho_1}{\partial\varphi_l}\nabla_x\varphi_l.$$

Wir sehen also, daß die Anwendung des Operators ∇_x auf das durch A_1 bzw. A_2 dividierte Differentialgleichungssystem zu dem folgenden Differentialgleichungssystem führt:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\sum_k a_{ik}(\nabla_x\varphi_k)' + \sum_k (b_{ik}\nabla_x\varphi_k + c_{ik}\nabla_y\varphi_k) = 0 \qquad (i=1,\ldots,6),\\ &\sum_k a_{ik}(\nabla_x\varphi_k)^{\backprime} + \sum_k (b_{ik}\nabla_x\varphi_k + c_{ik}\nabla_y\varphi_k) = 0 \qquad (i=7,8). \end{aligned}$$

Eine ähnliche Anwendung des Operators ∇_y bewirkt die Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\sum_k a_{ik}(\nabla_y\varphi_k)' + \sum_k (d_{ik}\nabla_x\varphi_k + e_{ik}\nabla_y\varphi_k) = 0 \qquad (i=1,\ldots,6),\\ &\sum_k a_{ik}(\nabla_y\varphi_k)^{\backprime} + \sum_k (d_{ik}\nabla_x\varphi_k + e_{ik}\nabla_y\varphi_k) = 0 \qquad (i=7,8). \end{aligned}$$

Dieses System von 16 Differentialgleichungen für die 16 Funktionen $\nabla_x\varphi_k$, $\nabla_y\varphi_k$ ist ein kanonisch hyperbolisches System mit nichtverschwindender Determinante. Die Determinante ist nämlich gleich $|a_{ik}|^2$. Wir haben in den Ausdrücken $\nabla_x\varphi_k$, $\nabla_y\varphi_k$ Lösungen eines Anfangswertproblems dieses Systems vor uns, nämlich eines solchen, dessen Anfangswerte sämtlich null sind. Eine Lösung dieses Problems wird

$$\nabla_x\varphi_k \equiv 0, \qquad \nabla_y\varphi_k \equiv 0,$$

wie aus der Homogenität der Differentialgleichungen folgt. Aus dem für diese Systeme gültigen Eindeutigkeitssatze[8]) folgt nunmehr, daß es nur diese Lösung gibt, also daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in dem betrachteten dreidimensionalen Gebiet gelten.

Ganz ebenso beweist man nunmehr die Gleichungen

$$\nabla_x\varphi_k \equiv 0, \qquad \nabla_y\varphi_k \equiv 0$$

in dem zu betrachtenden vierdimensionalen Gebiet, indem man sich erinnert, daß die Fortsetzung der φ_k in dieses erfolgte, indem man von allen Geraden $\xi_1 =$ konst., $\eta_2 =$ konst. des obigen dreidimensionalen Gebietes ausging. Auf diesen sind aber die $\nabla_x\varphi_k \equiv 0$, $\nabla\varphi_k \equiv 0$, wie eben bewiesen. Eine analoge Schlußweise führt nun zu der Behauptung.

Damit ist der Nachweis des analytischen Charakters der vorgelegten Lösung unserer Differentialgleichung beendet.

---

[8]) Ein solcher Eindeutigkeitssatz steht in meiner zitierten Abhandlung. Es läßt sich die Eindeutigkeit schon unter schwächeren Voraussetzungen als den dort angegebenen beweisen, wenn man die in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen üblichen Methoden benutzt; vgl. hierzu auch O. Perron, „Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungen im reellen Gebiet", Math. Zeitschr. 27, S. 549 ff., sowie Haar, C. R. 187 (2. 6. 1928), und meine anfangs zitierte Abhandlung in den Göttinger Nachrichten 1927, S. 184 ff. Hier liegen die Dinge wegen der Linearität der Differentialgleichungen übrigens besonders einfach.

§ 4.

Zum Schluß noch ein Wort über die *Differenzierbarkeitsvoraussetzungen*, denen die vorgelegte Lösung $u(x, y)$ gehorchen muß. Zur Fortsetzung in den vierdimensionalen Raum ist es hinreichend, die Funktionen φ in der reellen Anfangsebene als zweimal stetig differenzierbar vorauszusetzen. Die Funktionen φ sind dann überall zweimal stetig nach den Argumenten differenzierbar und der im vorigen Paragraphen benutzte Eindeutigkeitssatz bezieht sich dann auf stetig differenzierbare Funktionen $V_x \varphi_l$, $V_y \varphi_l$ (vgl. hierzu die Anmerkung S. 618). Wir unterlassen es, zu untersuchen, wie weit unsere Voraussetzungen, die damit eine *viermalige stetige Differenzierbarkeit von u* bedeuten, gemildert werden können, ohne die Einfachheit des Gedankenganges zu beeinträchtigen.

Übrigens lassen sich die Überlegungen dieser Arbeit auf die Differentialgleichungen höherer Ordnung und auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Variablen verallgemeinern.

(Eingegangen am 23. 10. 1928.)

Part 2

Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe

Von HEINZ HOPF, Zürich

Einleitung

Es ist bekannt, daß die erste Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^1$ eines Komplexes K durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K bestimmt ist: sie ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach der Kommutatorgruppe[1]). In dieser Arbeit wird der Einfluß von $\mathfrak{G}$ auf die zweite Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^2$ untersucht.

a) $\mathfrak{B}^2$ ist, wie man schon an trivialen Beispielen sehen kann, nicht durch $\mathfrak{G}$ bestimmt; es wird aber folgendes festgestellt: *Jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ ist durch einen bestimmten algebraischen Prozeß eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ zugeordnet, die im allgemeinen nicht die Nullgruppe*[2]) *ist; wenn $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe eines Komplexes K und wenn $\mathfrak{S}^2$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}^2$ ist, die aus denjenigen Homologieklassen besteht, welche stetige Bilder von Kugelflächen enthalten, so ist*

$$\mathfrak{B}^2 / \mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}_1^* \ .$$

Die zweite Bettische Gruppe besitzt also $\mathfrak{G}_1^*$ als homomorphes Bild, und sie kann daher, wenn die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ gegeben ist, „nicht zu klein" sein. Ist z. B. $\mathfrak{G}$ eine freie Abelsche Gruppe vom Range p, so erweist sich $\mathfrak{G}_1^*$ als freie Abelsche Gruppe vom Range $\frac{p(p-1)}{2}$; für einen Komplex mit dieser Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist mithin die zweite Bettische Zahl mindestens gleich $\frac{p(p-1)}{2}$.

Die „untere Schranke" $\mathfrak{G}_1^*$ für die mit $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppe verträglichen zweiten Bettischen Gruppen kann nicht verbessert werden; zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen) gibt es nämlich einen Komplex K, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt und in dem jedes Kugelbild homolog 0, also $\mathfrak{S}^2 = 0$ ist; dann ist $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}_1^*$.

Die allgemeine Theorie dieser Zusammenhänge wird im § 2 dargestellt;

[1]) *Seifert-Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934), § 48. — Statt „Homologiegruppe" (l. c.) sage ich „Bettische Gruppe".

[2]) Die Nullgruppe, oft kurz mit 0 bezeichnet, ist die Gruppe, die nur ein Element enthält.

der § 3 enthält spezielle Folgerungen und Beispiele. Im § 1, der rein gruppentheoretischen Inhalt hat, wird die Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ eingeführt.

b) Der § 4 handelt von dem Einfluß der Fundamentalgruppe auf die Schnitt-Eigenschaften der Zyklen in einer n-dimensionalen (geschlossenen und orientierbaren) Mannigfaltigkeit M^n. Es stellt sich heraus: *Diese Eigenschaften, soweit es sich um Schnitte zwischen je einem* $(n-1)$*-dimensionalen und einem zweidimensionalen Zyklus, sowie um Schnitte zwischen je zwei* $(n-1)$*-dimensionalen Zyklen handelt, sind rein algebraisch durch die Fundamentalgruppe bestimmt.*

Zum Beispiel ergibt sich: wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe ist, so sind die genannten Schnitte sämtlich homolog 0; wenn $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe ist, so ist der Schnitt zweier $(n-1)$-dimensionaler Zyklen nur dann homolog 0, wenn die beiden Zyklen linear abhängig im Sinne der Homologien sind.

Die Beschränkung auf Mannigfaltigkeiten ist übrigens nicht nötig; zieht man nämlich die neuere Produkt-Theorie in Komplexen heran[3]), so bleiben die angedeuteten Sätze gültig, wenn man die Schnitte zwischen $(n-1)$-dimensionalen und zweidimensionalen Zyklen durch die Čech-Whitneyschen Produkte zwischen eindimensionalen Kozyklen und zweidimensionalen Zyklen sowie die Schnitte zwischen zwei $(n-1)$-dimensionalen Zyklen durch die Kolmogoroff-Alexanderschen Produkte zwischen zwei eindimensionalen Kozyklen ersetzt; die Produkte selbst sind im ersten Fall eindimensionale Zyklen, im zweiten Fall zweidimensionale Kozyklen (aus diesen Formulierungen sieht man übrigens, daß es berechtigt ist, auch die oben genannten Schnitte, bei denen $(n-1)$-dimensionale Zyklen auftreten, zu den Eigenschaften eindimensionaler und zweidimensionaler Gebilde zu rechnen).

c) Falls eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit M^3 vorliegt, so kommt zu den Beziehungen zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}^2$, die in den §§ 2 und 4 festgestellt werden, noch die durch den Poincaréschen Dualitätssatz ausgedrückte Beziehung sowie, für die Schnitt-Eigenschaften, die Gleichheit $n-1=2$ hinzu. Diese verschiedenartigen Beziehungen sind im allgemeinen nicht miteinander verträglich, und daher sind die Gruppen $\mathfrak{G}$, die als Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten auftreten, starken Einschränkungen unterworfen. Derartige Bedingungen sind in dem kurzen § 5 zusammengestellt. Als Anwendung ergibt sich

[3]) Zusammenfassende Darstellung: *H. Whitney*, On products in a complex, Annals of Math. 39 (1938), 397—432.

ein neuer Beweis für den Satz von Reidemeister: Die einzigen Abelschen Gruppen, welche als Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten auftreten, sind die zyklischen Gruppen und das direkte Produkt von drei unendlich-zyklischen Gruppen.[4])

d) Sowohl für den Aufbau der allgemeinen Theorie als auch für die Behandlung von Beispielen sind gruppentheoretische Überlegungen notwendig, die mir auch vom gruppentheoretischen Standpunkt aus nicht uninteressant zu sein scheinen. Besonders wichtig ist die Bildung von „höheren Kommutatorgruppen", die in der neueren Gruppentheorie eine Rolle spielen[5]): ist $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{F}$, so verstehe man unter $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ die Gruppe, welche von allen Kommutatoren $x\,r\,x^{-1}\,r^{-1}$ erzeugt wird, für die $x \in \mathfrak{F}$, $r \in \mathfrak{R}$ ist; speziell ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ die Kommutatorgruppe und $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$ die zweite Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$. Die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, die in unserem unter a) genannten Hauptsatz auftritt, ist folgendermaßen zu bestimmen: wenn $\mathfrak{G}$ homomorphes Bild einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ und wenn $\mathfrak{R}$ der Kern dieses Homomorphismus ist[6]) — ein solcher Homomorphismus liegt immer vor, wenn $\mathfrak{G}$ durch Erzeugende und Relationen gegeben ist —, so ist

$$\mathfrak{G}_1^* \cong (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}) / \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \; .$$

Eine Grundlage für unsere Untersuchungen ist der gruppentheoretische Satz, daß die durch diese Formel gegebene Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ nicht von der speziellen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ als Bild von $\mathfrak{F}$, sondern nur von $\mathfrak{G}$ selbst, also nicht von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{R}$, sondern nur von der Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ abhängt.

Das folgende Beispiel zeigt, von welcher Art die gruppentheoretisch-topologischen Zusammenhänge sind, mit denen man es zu tun hat. $\mathfrak{G}$ sei durch Erzeugende $E_1, \ldots, E_m$ gegeben, zwischen denen eine einzige Relation $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ besteht; man betrachte das Element $r = R(e_1, \ldots, e_m)$ der von freien Erzeugenden $e_1, \ldots, e_m$ erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$; es gelten die folgenden beiden Sätze: (I) Dann und nur dann gibt es einen Komplex K, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und dessen zweite Bettische Gruppe 0 ist, wenn r nicht in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ enthalten oder

---

[4]) *K. Reidemeister*, Kommutative Fundamentalgruppen, Monatshefte f. Math. u. Ph. 43 (1936), 20—28.

[5]) Zur Orientierung über die bei uns auftretenden Begriffe aus der Gruppentheorie: *W. Magnus*, Allgemeine Gruppentheorie (Enzyklopädie d. math. Wiss. I 1, 9; Leipzig-Berlin 1939), Nr. 4 (besonders p. 17) und Nr. 14.

[6]) Der „Kern" eines Homomorphismus ist das Urbild des Eins-Elementes der Bildgruppe.

wenn $r = 1$ ist. — (II) M^n sei eine Mannigfaltigkeit mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; dann und nur dann gibt es in M^n zwei $(n-1)$-dimensionale Zyklen, deren Schnitt nicht homolog 0 ist, wenn r in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, aber nicht in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ enthalten ist.

e) Nachdem man ziemlich befriedigende Sätze über den Einfluß der Fundamentalgruppe auf die zweite Bettische Gruppe gewonnen hat, wird man fragen, ob ähnliches nicht auch für die höheren Bettischen Gruppen möglich sei. Die oben erwähnte Rolle, welche die Kugelbilder spielen, gibt einen Fingerzeig, in welcher Richtung man derartige Verallgemeinerungen zu suchen haben wird: der Begriff des Kugelbildes ist der Grundbegriff der Homotopie-Theorie von Hurewicz, und auch die übrigen Begriffe und Beziehungen, die im § 2 auftreten — insbesondere der Begriff des „Homotopie-Randes" eines zweidimensionalen Komplexes —, scheinen mir in den Ideenkreis von Hurewicz zu gehören[7]); übrigens ergeben sich auch einige direkte Berührungen mit Resultaten dieser Theorie (Nr. 12 b, e). Ich halte es daher für wahrscheinlich, daß die in der vorliegenden Arbeit festgestellten Beziehungen zwischen $\mathfrak{G}$ einerseits, $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{S}^2$ andererseits in allgemeineren, uns noch unbekannten Beziehungen enthalten sind, die zwischen den ersten k Homotopiegruppen einerseits, der $(k+1)$-ten Bettischen und der $(k+1)$-ten Homotopiegruppe andererseits bestehen. Jedenfalls lassen sich der erwähnte Begriff des Homotopie-Randes und seine Haupt-Eigenschaften auf höhere Dimensionszahlen übertragen; wichtig für derartige Verallgemeinerungen dürfte der Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe und den höheren Homotopiegruppen sein, auf den Eilenberg aufmerksam gemacht hat[8]).

Wenn man dagegen die Homotopiegruppen nicht heranzieht, sondern ausschließlich die Fundamentalgruppe und die Bettischen Gruppen — also die klassischen Invarianten von Poincaré — untersucht und in diesem Rahmen die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zwischen diesen Gruppen stellt, so ist hierauf zu antworten, daß diese Beziehungen sich auf die Dimensionszahlen 1 und 2 beschränken; wenn nämlich $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}^3, \ldots, \mathfrak{B}^n$ willkürlich vorgegebene Gruppen sind — mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen, die $\mathfrak{B}^r$ Abelsch —, so gibt es, wie man leicht sieht, immer einen Komplex K mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$

[7]) *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam: (I) vol. 38 (1935), 112—119; (II) vol. 38 (1935), 521—528; (III) vol. 39 (1936), 117—126; (IV) vol. 39 (1936), 215—224.

[8]) *S. Eilenberg*, On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fundamenta Math. 32 (1939), 167—175.

und den Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^r$. [9]) In diesem Sinne sind also Verallgemeinerungen unserer Sätze nicht möglich.

§ 1. Eine Gruppen-Konstruktion

1. Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger bekannter Tatsachen. Γ sei eine Menge von Elementen $\alpha, \beta, \ldots$. Jedem geordneten Paar (α, β) sei eine „Summe" $\alpha + \beta \in \Gamma$, jedem α sei ein „Inverses" $-\alpha \in \Gamma$ zugeordnet; statt $\beta + (-\alpha)$ schreiben wir auch $\beta - \alpha$. Dann verstehen wir unter einer „Restklassengruppe" von Γ folgendes:

Γ ist in zueinander fremde Klassen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$ zerlegt; zwischen diesen ist eine Addition erklärt, durch welche die Gesamtheit der Klassen zu einer Gruppe wird; diese Addition ist mit der Addition in Γ auf folgende natürliche Weise verknüpft:

$$\begin{aligned} &\text{aus } \alpha \in \bar{\alpha},\ \beta \in \bar{\beta} \text{ folgt } \alpha + \beta \in \bar{\alpha} + \bar{\beta}\,; \\ &\text{aus } \alpha \in \bar{\alpha} \text{ folgt } -\alpha \in -\bar{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Jede Restklassengruppe läßt sich folgendermaßen erzeugen. Γ wird durch eine Abbildung q homomorph auf eine Gruppe $\mathfrak{Q}$ abgebildet, d. h. so, daß [10])

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha) \cdot q(\beta) \quad , \quad q(-\alpha) = q(\alpha)^{-1} \tag{1'}$$

ist; die Restklassen sind die Urbildmengen der einzelnen Elemente von $\mathfrak{Q}$; die Summe $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ zweier Restklassen ist durch die Vorschrift $q(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = q(\bar{\alpha}) \cdot q(\bar{\beta})$ bestimmt; so entsteht eine mit $\mathfrak{Q}$ isomorphe Restklassengruppe von Γ.

Unter dem „Kern" einer Restklassengruppe verstehen wir diejenige Restklasse, welche das Null-Element der Gruppe darstellt; oder in der Sprache der Homomorphismen: diejenige Klasse, welche durch q auf die Eins von $\mathfrak{Q}$ abgebildet wird.

Mit Hilfe von (1) oder von (1') bestätigt man leicht folgende Tatsache: Zwei Elemente α, β von Γ sind dann und nur dann in derselben Rest-

[9]) Andeutung: Es gibt einen Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ (*Seifert-Threlfall*, l. c. [1]), 180, Aufgabe 3); der Komplex K' seiner zweidimensionalen Simplexe hat auch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; es gibt ferner einen Komplex K'' mit der Fundamentalgruppe 0 und den Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^3, \ldots, \mathfrak{B}^n$ (*Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), 266, Nr. 9); man füge K' und K'' in einem Punkt aneinander.

[10]) Im allgemeinen schreiben wir beliebige Gruppen multiplikativ, Abelsche Gruppen oft additiv; daß wir Γ additiv schreiben, obwohl die Summenbildung i. a. nicht kommutativ ist, wird sich im „Anhang" rechtfertigen (im Hinblick auf das distributive Gesetz der dort behandelten Produktbildung).

Part 3

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

Bernhard Riemann

[Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.]

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch die Interesse, welches *Gauss* und *Dirichlet* demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von *Euler* gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = i \int\limits_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n\,2\pi i$ aber ist $= (-n\,2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1-s$ verwandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

setzt,

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

oder da

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right), \text{ (Jacobi, Fund. S. 184)}$$

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2}+ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - (tt+\tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx$$

oder auch

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln.

Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t)=0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d\log\xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) gleich $\left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t)=0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha)=0$, so kann man $\log\xi(t)$ durch

$$\sum\log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0)$$

ausdrücken; denn da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Grösse t mit t nur wie $\log\frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t\log t$; er unterscheidet sich also von $\log\xi(t)$ um eine Function von tt, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und mit tt dividirt für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Werth durch Einsetzung von $t=0$ bestimmt werden kann.

Mit diesen Hülfsmitteln lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl, wenn aber x eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ grösser, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert,

$$F(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \tfrac{1}{2}\sum p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

$$p^{-s} \text{ durch } s\int_p^\infty x^{-s-1}\,ds, \quad p^{-2s} \text{ durch } s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,ds, \ldots,$$

so erhält man

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)x^{-s-1}\,dx,$$

wenn man

$$F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a + bi$ von s, wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)x^{-s}\,d\log x$$

gilt, so kann man mit Hülfe des *Fourier*'schen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ reell ist und

$$g(a+bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

in den beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x.$$

Wenn man beide Gleichungen mit

$$(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y))\,db$$

multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem *Fourier*'schen Satze $\pi h(y)y^{-\alpha}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und mit iy^α multiplicirt,

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s\,ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt.

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Aenderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig allgemein

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s \, ds.$$

Für $\log \zeta$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum^{\alpha} \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann ins Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, weshalb es zweckmässig ist, die Gleichung vorher durch partielle Integration in

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s \, ds$$

umzuformen.

Da

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim \left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2} \log m \right),$$

für $m = \infty$, also

$$-\frac{d\frac{1}{s} \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_1^{\infty} \frac{d\frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

so erhalten dann sämmtliche Glieder des Ausdruckes für $f(x)$ mit Ausnahme von

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss} \log \xi(0) x^s \, ds = \log \xi(0)$$

die Form

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s \, ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta}=\frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

und, wenn der reelle Theil von s grösser als der reelle Theil von β ist,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s\,ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int\limits_{\infty}^{x}x^{\beta-1}\,dx,$$

oder

$$=\int\limits_{0}^{x}x^{\beta-1}\,dx,$$

je nachdem der reelle Theil von β negativ oder positiv ist. Man hat daher

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds\\ &= \int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{ const. im ersten}\end{aligned}$$

und

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{ const. im zweiten Falle.}$$

Im ersten Falle bestimmt sich die Integrationsconstante, wenn man den reellen Theil von β negativ unendlich werden lässt; im zweiten Falle erhält das Integral von 0 bis x um $2\pi i$ verschiedene Werthe, je nachdem die Integration durch complexe Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht, und wird, auf jenem Wege genommen, unendlich klein, wenn der Coefficient von i in dem Werthe von β positiv unendlich wird, auf letzterem aber, wenn dieser Coefficient negativ unendlich wird. Hieraus ergiebt sich, wie auf der linken Seite $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ zu bestimmen ist, damit die Integrationsconstante wegfällt.

Durch Einsetzung dieser Werthe in den Ausdruck von $f(x)$ erhält man

$$f(x) = Li(x) - \sum^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log \xi(0),$$

wenn in $\sum^{\alpha}$ für α sämmtliche positiven (oder einen positiven reellen Theil enthaltenden) Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, ihrer Grösse nach geordnet, gesetzt werden. Es lässt sich, mit Hülfe einer genaueren Discussion der Function ξ, leicht zeigen, dass bei dieser Anordnung der Werth der Reihe

$$\sum \left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$$

mit dem Grenzwerth, gegen welchen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds} x^s\,ds$$

bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b convergirt, übereinstimmt; durch veränderte Anordnung aber würde sie jeden beliebigen reellen Werth erhalten können.

Aus $f(x)$ findet sich $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

sich ergebenden Gleichung

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

worin für m der Reihe nach die durch kein Quadrat ausser 1 theilbaren Zahlen zu setzen sind und μ die Anzahl der Primfactoren von m bezeichnet.

Beschränkt man $\sum^{\alpha}$ auf eine endliche Zahl von Gliedern, so giebt die Derivirte des Ausdrucks für $f(x)$ oder, bis auf einen mit wachsendem x sehr schnell abnehmenden Theil,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum^{\alpha}\frac{\cos(\alpha\log x)x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

einen angenäherten Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen + der halben Dichtigkeit der Primzahlquadrate + $\frac{1}{3}$ von der Dichtigkeit der Primzahlcuben u. s. w. von der Grösse x.

Die bekannte Näherungsformel $F(x) = Li(x)$ ist also nur bis auf Grössen von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$ richtig und giebt einen etwas zu grossen Werth; denn die nicht periodischen Glieder in dem Ausdrucke von $F(x)$ sind, von Grössen, die mit x nicht in's Unendliche wachsen, abgesehen:

$$Li(x) - \tfrac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}Li(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7}Li(x^{\frac{1}{7}}) + \cdots$$

In der That hat sich bei der von *Gauss* und *Goldschmidt* vorgenommenen und bis zu $x =$ drei Millionen fortgesetzten Vergleichung von $Li(x)$ mit der Anzahl der Primzahlen unter x diese Anzahl schon vom ersten Hunderttausend an stets kleiner als $Li(x)$ ergeben, und zwar wächst die Differenz unter manchen Schwankungen allmählich mit x. Aber auch die von den periodischen Gliedern abhängige stellenweise Verdichtung und Verdünnung der Primzahlen hat schon bei den Zählungen die Aufmerksamkeit erregt, ohne dass jedoch hierin eine Gesetzmässigkeit bemerkt worden wäre. Bei einer etwaigen neuen Zählung würde es interessant sein, den Einfluss der einzelnen in dem Ausdrucke für die Dichtigkeit der Primzahlen enthaltenen periodischen Glieder zu verfolgen. Einen regelmässigeren Gang als $F(x)$ würde die Function $f(x)$ zeigen, welche sich schon im ersten Hundert sehr deutlich als mit $Li(x) + \log \xi(0)$ im Mittel übereinstimmend erkennen lässt.