

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I¹⁾.

Von Kurt Gödel in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)²⁾ einerseits, das Zermelo-Fraenkel'sche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre³⁾ andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt⁴⁾, die sich aus den Axiomen nicht

¹⁾ Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

²⁾ A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

³⁾ Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden. — Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 83, Abh. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 98.

⁴⁾ D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: \neg (nicht), \vee (oder), (x) (für alle), $=$ (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als $+$ (Addition), \cdot (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe (x) sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

entscheiden lassen. Dieser Umstand liegt nicht etwa an der speziellen Natur der aufgestellten Systeme, sondern gilt für eine sehr weite Klasse formaler Systeme, zu denen insbesondere alle gehören, die aus den beiden angeführten durch Hinzufügung endlich vieler Axiome entstehen⁶⁾, vorausgesetzt, daß durch die hinzugefügten Axiome keine falschen Sätze von der in Fußnote⁴⁾ angegebenen Art beweisbar werden.

Wir skizzieren, bevor wir auf Details eingehen, zunächst den Hauptgedanken des Beweises, natürlich ohne auf Exaktheit Anspruch zu erheben. Die Formeln eines formalen Systems (wir beschränken uns hier auf das System PM) sind äußerlich betrachtet endliche Reihen der Grundzeichen (Variable, logische Konstante und Klammern bzw. Trennungspunkte) und man kann leicht genau präzisieren, welche Reihen von Grundzeichen sinnvolle Formeln sind und welche nicht⁷⁾. Analog sind Beweise vom formalen Standpunkt nichts anderes als endliche Reihen von Formeln (mit bestimmten angebbaren Eigenschaften). Für metamathematische Betrachtungen ist es natürlich gleichgültig, welche Gegenstände man als Grundzeichen nimmt, und wir entschließen uns dazu, natürliche Zahlen⁸⁾ als solche zu verwenden. Dementsprechend ist dann eine Formel eine endliche Folge natürlicher Zahlen⁹⁾ und eine Beweisfigur eine endliche Folge von endlichen Folgen natürlicher Zahlen. Die metamathematischen Begriffe (Sätze) werden dadurch zu Begriffen (Sätzen) über natürliche Zahlen bzw. Folgen von solchen¹⁰⁾ und daher (wenigstens teilweise) in den Symbolen des Systems PM selbst ausdrückbar. Insbesondere kann man zeigen, daß die Begriffe „Formel“, „Beweisfigur“, „beweisbare Formel“ innerhalb des Systems PM definierbar sind, d. h. man kann z. B. eine Formel $F(v)$ aus PM mit einer freien Variablen v (vom Typus einer Zahlenfolge) angeben¹¹⁾, so daß $F(v)$ inhaltlich interpretiert besagt: v ist eine beweisbare Formel. Nun stellen wir einen unentscheidbaren Satz des Systems PM, d. h. einen Satz A , für den weder A noch $\text{non-}A$ beweisbar ist, folgendermaßen her:

⁶⁾ Dabei werden in PM nur solche Axiome als verschieden gezählt, die aus einander nicht bloß durch Typenwechsel entstehen.

⁷⁾ Wir verstehen hier und im folgenden unter „Formel aus PM“ immer eine ohne Abkürzungen (d. h. ohne Verwendung von Definitionen) geschriebene Formel. Definitionen dienen ja nur der kürzeren Schreibweise und sind daher prinzipiell überflüssig.

⁸⁾ D. h. wir bilden die Grundzeichen in eindeutiger Weise auf natürliche Zahlen ab. (Vgl. die Durchführung auf S. 179.)

⁹⁾ D. h. eine Belegung eines Abschnittes der Zahlenreihe mit natürlichen Zahlen. (Zahlen können ja nicht in räumliche Anordnung gebracht werden.)

¹⁰⁾ m. a. W.: Das oben beschriebene Verfahren liefert ein isomorphes Bild des Systems PM im Bereich der Arithmetik und man kann alle metamathematischen Überlegungen ebenso gut an diesem isomorphen Bild vornehmen. Dies geschieht in der folgenden Beweisskizze, d. h. unter „Formel“, „Satz“, „Variable“ etc. sind immer die entsprechenden Gegenstände des isomorphen Bildes zu verstehen.

¹¹⁾ Es wäre sehr leicht (nur etwas umständlich), diese Formel tatsächlich hinzuschreiben.

Eine Formel aus PM mit genau einer freien Variablen, u. zw. vom Typus der natürlichen Zahlen (Klasse von Klassen) wollen wir ein Klassenzeichen nennen. Die Klassenzeichen denken wir uns irgendwie in eine Folge geordnet¹¹⁾, bezeichnen das n -te mit $R(n)$ und bemerken, daß sich der Begriff „Klassenzeichen“ sowie die ordnende Relation R im System PM definieren lassen. Sei α ein beliebiges Klassenzeichen; mit $[\alpha; n]$ bezeichnen wir diejenige Formel, welche aus dem Klassenzeichen α dadurch entsteht, daß man die freie Variable durch das Zeichen für die natürliche Zahl n ersetzt. Auch die Tripel-Relation $\alpha = [y; z]$ erweist sich als innerhalb PM definierbar. Nun definieren wir eine Klasse K natürlicher Zahlen folgendermaßen:

$$n \in K \equiv \overline{Bew} [R(n); n]^{11a)} \quad (1)$$

(wobei $Bew x$ bedeutet: x ist eine beweisbare Formel). Da die Begriffe, welche im Definiens vorkommen, sämtlich in PM definierbar sind, so auch der daraus zusammengesetzte Begriff K , d. h. es gibt ein Klassenzeichen S ¹²⁾, so daß die Formel $[S; n]$ inhaltlich gedeutet besagt, daß die natürliche Zahl n zu K gehört. S ist als Klassenzeichen mit einem bestimmten $R(q)$ identisch, d. h. es gilt

$$S = R(q)$$

für eine bestimmte natürliche Zahl q . Wir zeigen nun, daß der Satz $[R(q); q]$ ¹³⁾ in PM unentscheidbar ist. Denn angenommen der Satz $[R(q); q]$ wäre beweisbar, dann wäre er auch richtig, d. h. aber nach dem obigen q würde zu K gehören, d. h. nach (1) es würde $\overline{Bew} [R(q); q]$ gelten, im Widerspruch mit der Annahme. Wäre dagegen die Negation von $[R(q); q]$ beweisbar, so würde $n \in K$, d. h. $Bew [R(q); q]$ gelten. $[R(q); q]$ wäre also zugleich mit seiner Negation beweisbar, was wiederum unmöglich ist.

Die Analogie dieses Schlusses mit der Antinomie Richard springt in die Augen; auch mit dem „Lügner“ besteht eine nahe Verwandtschaft¹⁴⁾, denn der unentscheidbare Satz $[R(q); q]$ besagt ja, daß q zu K gehört, d. h. nach (1), daß $[R(q); q]$ nicht beweisbar ist. Wir haben also einen Satz vor uns, der seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet¹⁵⁾. Die eben auseinandergesetzte Beweismethode

¹¹⁾ Etwa nach steigender Gliedersumme und bei gleicher Summe lexikographisch.

^{11a)} Durch Überstreichen wird die Negation bezeichnet.

¹²⁾ Es macht wieder nicht die geringsten Schwierigkeiten, die Formel S tatsächlich hinzuschreiben.

¹³⁾ Man beachte, daß „ $[R(q); q]$ “ (oder was dasselbe bedeutet „ $[S; q]$ “) bloß eine metamathematische Beschreibung des unentscheidbaren Satzes ist. Doch kann man, sobald man die Formel S ermittelt hat, natürlich auch die Zahl q bestimmen und damit den unentscheidbaren Satz selbst effektiv hinschreiben.

¹⁴⁾ Es läßt sich überhaupt jede epistemologische Antinomie zu einem derartigen Unentscheidbarkeitsbeweis verwenden.

¹⁵⁾ Ein solcher Satz hat entgegen dem Anschein nichts Zirkelhaftes an sich, denn er behauptet zunächst die Unbeweisbarkeit einer ganz bestimmten Formel (nämlich der q -ten in der lexikographischen Anordnung bei einer bestimmten Einsetzung), und erst nachträglich (gewissermaßen zufällig) stellt sich heraus, daß diese Formel gerade die ist, in der er selbst ausgedrückt wurde.

läßt sich offenbar auf jedes formale System anwenden, das erstens inhaltlich gedeutet über genügend Ausdrucksmittel verfügt, um die in der obigen Überlegung vorkommenden Begriffe (insbesondere den Begriff „beweisbare Formel“) zu definieren, und in dem zweitens jede beweisbare Formel auch inhaltlich richtig ist. Die nun folgende exakte Durchführung des obigen Beweises wird unter anderem die Aufgabe haben, die zweite der eben angeführten Voraussetzungen durch eine rein formale und weit schwächere zu ersetzen.

Aus der Bemerkung, daß $[R(q); q]$ seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß $[R(q); q]$ richtig ist, denn $[R(q); q]$ ist ja unbeweisbar (weil unentscheidbar). Der im System PM unentscheidbare Satz wurde also durch metamathematische Überlegungen doch entschieden. Die genaue Analyse dieses merkwürdigen Umstandes führt zu überraschenden Resultaten, bezüglich der Widerspruchsfreiheitsbeweise formaler Systeme, die in Abschn. 4 (Satz XI) näher behandelt werden.

Stop here

2.

Wir gehen nun an die exakte Durchführung des oben skizzierten Beweises und geben zunächst eine genaue Beschreibung des formalen Systems P , für welches wir die Existenz unentscheidbarer Sätze nachweisen wollen. P ist im wesentlichen das System, welches man erhält, wenn man die Peanoschen Axiome mit der Logik der PM¹⁶⁾ überbaut (Zahlen als Individuen, Nachfolgerrelation als undefinierten Grundbegriff).

Die Grundzeichen des Systems P sind die folgenden:

I. Konstante: „ \neg “ (nicht), „ \vee “ (oder), „ Π “ (für alle), „ 0 “ (Null), „ f “ (der Nachfolger von), „ $($ “, „ $)$ “ (Klammern).

II. Variable ersten Typs (für Individuen, d. h. natürliche Zahlen inklusive 0): „ x_1 “, „ y_1 “, „ z_1 “,

Variable zweiten Typs (für Klassen von Individuen): „ x_2 “, „ y_2 “, „ z_2 “,

Variable dritten Typs (für Klassen von Klassen von Individuen): „ x_3 “, „ y_3 “, „ z_3 “,

usw. für jede natürliche Zahl als Typus¹⁷⁾.

Anm.: Variable für zwei- und mehrstellige Funktionen (Relationen) sind als Grundzeichen überflüssig, da man Relationen als Klassen geordneter Paare definieren kann und geordnete Paare wiederum als Klassen von Klassen, z. B. das geordnete Paar a, b durch $((a), (a, b))$, wo (x, y) bzw. (x) die Klassen bedeuten, deren einzige Elemente x, y bzw. x sind¹⁸⁾.

¹⁶⁾ Die Hinzufügung der Peanoschen Axiome ebenso wie alle anderen am System PM angebrachten Abänderungen dienen lediglich zur Vereinfachung des Beweises und sind prinzipiell entbehrlich.

¹⁷⁾ Es wird vorausgesetzt, daß für jeden Variablentypus abzählbar viele Zeichen zur Verfügung stehen.

¹⁸⁾ Auch inhomogene Relationen können auf diese Weise definiert werden, z. B. eine Relation zwischen Individuen und Klassen als eine Klasse aus Elementen der Form: $((x_2), ((x_1), x_2))$. Alle in den PM über Relationen beweisbaren Sätze sind, wie eine einfache Überlegung lehrt, auch bei dieser Behandlungsweise beweisbar.

unktionaloperatoren

$$C \cdot |f|^2 \dots$$

$$= 0, f_a(x)$$

$$(x) - f_b(x) \geq 0$$

R) definit, . . .

$$l(R, a) \dots$$

b)

$$\mathfrak{N}(R, x_{v-1}) f, f) =$$

$$P \mathfrak{N}(R, x_v) \cdot \mathfrak{N}(R, x_{v-1}) f).$$

$$\cdot \mathfrak{N}(R, x_{v-1}) \cdot \dots$$

) =

Satz 7*

$$\mathfrak{N}(R a') \mathfrak{B} \mathfrak{N}(S, b')$$

$$) - \mathfrak{N}(S, b')$$

$$) - \mathfrak{N}(S, b')$$

Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren

Einleitung.

I. Wenn wir alle Funktionen eines gewissen metrischen Raumes Ω (z. B. der reellen Zahlengeraden, der komplexen Zahlenebene, der Oberfläche der Einheitskugel, der Strecke 0, 1 usw.) betrachten, die gewissen Regularitätsbedingungen genügen (z. B. stetig und bis auf endlich viele Knöcke stetig differenzierbar sind, zweimal stetig differenzierbar sind, ein endliches Absolutwertquadratintegral über Ω haben¹⁾ usw.) und eventuell auch noch gewissen Rändbedingungen unterworfen sind, so wird unter einem linearen Operator bekanntlich das Folgende verstanden: Eine Zuordnung R , die jeder Funktion f unserer Klasse eine Funktion Rf (die nicht mehr zu dieser Klasse gehören muß) zuordnet, aber so, daß stets

$$R(a_1 f_1 + \dots + a_k f_k) = a_1 R f_1 + \dots + a_k R f_k \quad (a_1, \dots, a_k \text{ komplexe Konstante})$$

ist.

Wenn in Ω ein allgemeiner Maßbegriff (etwa im Sinne des Lebesgueschen) existiert und dv das Volumelement in Ω ist (auf der Geraden: dx , in der Ebene: $dx dy$, auf der Oberfläche der Einheitskugel: $\sin \vartheta \cdot d\vartheta d\varphi$ usw.), und das Integral über diesen ganzen Raum mit \int_{Ω} bezeichnet wird, so heißt ein linearer Operator R selbstadjungiert oder Hermitesch, wenn für alle zugelassenen Funktionen f, g

$$\int_{\Omega} f \cdot \overline{Rg} \cdot dv = \int_{\Omega} Rf \cdot \bar{g} \cdot dv$$

gilt²⁾.

¹⁾ Die Funktionen dürfen komplexe Werte haben.

²⁾ \bar{f} ist diejenige Funktion, die überall den zum Werte von f konjugiert-komplexen Wert annimmt. — Unsere Terminologie weicht von der üblichen etwas ab:

(Fortsetzung der Fußnote ²⁾ auf nächster Seite.)

Hermitesche lineare Operatoren (wir wollen sie kurz H. O. nennen) sind z. B. die folgenden (wir geben nun auch die Argumente der Funktionen an, und zwar sei P der allgemeine Punkt von Ω):

$$Rf(P) = f(P)$$

$$Rf(P) = x \cdot f(P) \quad (x \text{ irgendeine Koordinate von } P \text{ in } \Omega),$$

$$Rf(P) = \int_{\Omega} \varphi(P', P) \cdot f(P') \cdot dv' \quad (\varphi(P', P) = \overline{\varphi(P, P')}, \text{ d. h. der Kern Hermitesch),}$$

$$Rf(P) = Lf(P) \quad (L \text{ irgendein selbstadjungierter Differential- oder partieller Differentialausdruck, vgl. Anm. } ^3).$$

Bekanntlich bestimmen die beiden letzten Typen von H. O. ein Eigenwertproblem, das bei hinreichender Regularität des Kernes $\varphi(P, P')$ bzw. der Koeffizienten von L (nämlich wenn nur ein „Punktspektrum“ existiert) so formuliert werden kann³):

Ein Eigenwert ist eine Zahl λ , zu der es eine Funktion $f \neq 0$ mit

$$Rf = \lambda f$$

gibt; f ist dann Eigenfunktion. Es gibt im allgemeinen unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, denen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ so zugeordnet werden können, daß sie ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen bilden. D. h. es gilt:

$$\int_{\Omega} \varphi_m \cdot \overline{\varphi_n} \cdot dv = \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq n \\ 1, & \text{für } m = n \end{cases} \quad (\text{Orthogonalität}),$$

ein Differentialoperator R z. B. heißt ja gewöhnlich dann selbstadjungiert, wenn $\int_{\Omega} f \cdot \overline{Rg} - Rf \cdot g$ vollständiges Differential eines Ausdruckes der f, g und ihrer Ableitungen ist, also

$$\int_{\Omega} f \cdot \overline{Rg} \cdot dv - \int_{\Omega} Rf \cdot \overline{g} \cdot dv$$

ein nur von den Randwerten von f, g und ihrer Ableitungen abhängiger Ausdruck. Unsere Selbstadjungiertheit (Hermitescher Charakter) folgt hieraus nur, wenn dieser Ausdruck, infolge geeigneter Randbedingungen, verschwindet. D. h. ein im gewöhnlichen Sinne selbstadjungierter Differentialoperator ist es für uns eventuell erst in einem hinreichend eingegrenzten Definitionsbereiche (vgl. auch Einleitung VII).

³) Das Eigenwertproblem der regulären Integraloperatoren wurde von Hilbert gelöst (Göttinger Nachr. 1904, S. 49—91), seine Methode wurde später von Courant, Hellinger, F. Riesz, E. Schmidt, Toeplitz u. a. bedeutend vereinfacht. Die Differentialoperatoren (zumindest die selbstadjungierten von zweitem Grade) können bei der Lösung des Eigenwertproblems durch Integraloperatoren ersetzt werden (Hilbert, Göttinger Nachr. 1904, S. 213—259), die dieselben Eigenfunktionen, aber reziproke Eigenwerte haben.

und für jedes

$$\int_{\Omega} f \cdot \overline{g} \cdot dv$$

Wie für al
satz mit Mittel

für $N \rightarrow \infty$.

Wenn sich
regulär verhalte
treten eines Str
Eigenwert und
besondere durch
funktion oder
funktionen⁴) au
bei geeigneter
gral usw.) gew
und verliert vie

II. Wenn
den „diskreten I
die Funktionen
und die Integ
sind, so gelange

Die einfach
des Begriffes ze
(unendlich viele

y,

(Die Rolle der

⁴) Hellinger, equations intégrales

⁵) Das Eigenwertproblem wurde von Weyl gelöst. Auch für eine allgemeine Theorie der Integraloperatoren zweiten Grades, deren Koeffizienten selbstadjungiert sind, vgl. Math. Annalen 68 (1909), S. 117—175.

und für jedes Paar zugelassener Funktionen f, g

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{g} \cdot dv = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi}_n \cdot dv \right) \cdot \overline{\left(\int_{\Omega} g \cdot \bar{\varphi}_n \cdot dv \right)} \quad (\text{Vollständigkeit}).$$

Wie für alle vollständigen Orthogonalsysteme, gilt der Entwicklungssatz mit Mittelkonvergenz:

$$\int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^N a_n \cdot \varphi_n \right|^2 \cdot dv \rightarrow 0 \quad (a_n = \int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi}_n \cdot dv)$$

für $N \rightarrow \infty$.

Wenn sich $\varphi(P, P')$ bzw. die Koeffizienten von L nicht mehr ganz regulär verhalten, so treten Verwicklungen auf, die man durch das Auftreten eines Streckenspektrums kennzeichnet. Immerhin können die Begriffe Eigenwert und Eigenfunktion durch geeignete Verallgemeinerungen (insbesondere durch Herabsetzung der Regularitätsanforderungen an die Eigenfunktion oder gar durch Betrachtung sogenannter differentieller Eigenfunktionen⁴⁾ aufrechterhalten werden. Auch die Vollständigkeitssätze bleiben bei geeigneter Verallgemeinerung (Ersetzen der Summe durch ein Integral usw.) gewahrt; aber der ganze Aufbau wird wesentlich komplizierter und verliert viel von seiner ursprünglichen Anschaulichkeit⁵⁾.

II. Wenn wir die in I. betrachteten kontinuierlichen Räume Ω durch den „diskreten Raum“ $1, 2, 3, \dots$ der positiven ganzen Zahlen ersetzen, wobei die Funktionen $f(P)$ (P durchläuft Ω) durch die Folgen a_n ($n = 1, 2, \dots$) und die Integrale $\int_{\Omega} f \cdot dv$ durch die Summen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sinngemäß zu ersetzen sind, so gelangen wir zu ganz analogen Begriffsbildungen wie in I.

Die einfachsten Beispiele von H. O. (ja, wie man nach präziserer Fassung des Begriffes zeigen kann, die einzigen) sind die linearen Transformationen (unendlich vieler Variablen) mit Hermitescher Matrix:

$$R(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots),$$

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \alpha_{mn} = \overline{\alpha_{nm}}.$$

(Die Rolle der „Regularitätsbedingungen“ bei Funktionen in Ω spielen da

⁴⁾ Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7; Carleman, Sur les équations intégrales à noyau réel et symétrique, Upsala 1923, S. 82.

⁵⁾ Das Eigenwertproblem der Integralgleichungen mit „beschränktem“ Kerne wurde von Weyl gelöst (Göttinger Inaugural-Dissertation 1908) mit Hilfe der Hilbertschen Theorie der beschränkten Bilinearformen (Göttinger Nachr. 1906, S. 157—209). Auch für eine ausgedehnte Klasse selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiten Grades, deren Koeffizienten singular sein dürfen, erledigte Weyl das Eigenwertproblem (Math. Annalen 68 (1910), S. 220—269). Eine noch allgemeinere Klasse von Integraloperatoren untersuchte Carleman (vgl. Anm. ⁴⁾).

H. O. nennen)
nte der Funk-

von P in Ω),

h. der Kern

erter Differen-
Differentialaus-

[O. ein Eigen-
 $\varphi(P, P')$ bzw.
rum“ existiert)

n $f \neq 0$ mit

unendlich viele
so zugeordnet
gonalfunktionen

it),

adjungiert, wenn
ihrer Ableitungen

angiger Ausdruck.
nur, wenn dieser
ein im gewöhn-
as eventuell erst
Einleitung VII).
urde von Hilbert
äter von Courant,
Die Differential-
können bei der
werden (Hilbert,
n, aber reziproke

Bedingungen von der Art, daß alle $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m$ konvergieren sollen, u. ä. Wir werden diese Matrizen noch im Anhang III eingehender betrachten.) Diese linearen Transformationen sind offenbar Analoga der Integralkern-Transformationen in kontinuierlichen Räumen Ω :

$$Rf(P) = \int_{\Omega} \varphi(P', P) \cdot f(P') \cdot dv'.$$

Auch für diese Transformationen bzw. für die zu ihnen gehörigen Hermiteschen Formen

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \bar{y}_n$$

ist das Eigenwertproblem von Hilbert gestellt und gelöst worden, falls die Matrix $\{\alpha_{mn}\}$ (bzw. die Hermitesche Form $\sum_{m, n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \bar{y}_n$) gewissen Bedingungen genügt, die der „Regularität“ des Kernes $\varphi(P, P')$ bei Integralkern-Transformationen entsprechen.

Es treten dieselben Erscheinungen auf: Bei hoher Regularität (Vollstetigkeit) bloß Punktspektrum, mit denselben Eigenschaften wie in I., nur daß \int_{Ω} durch $\sum_{n=1}^{\infty}$ zu ersetzen ist. Also: λ ist Eigenwert, wenn es eine Folge (x_1, x_2, \dots) mit

$$R(x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots), \text{ d. h. } \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m = \lambda x_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

gibt [ohne daß $(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots)$ ist, außerdem ist als „Regularitätsbedingung“ die Endlichkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ zu fordern], und (x_1, x_2, \dots) ist dann Eigenfolge. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ alle Eigenwerte, so können ihnen Eigenfolgen (x_{11}, x_{12}, \dots) , (x_{21}, x_{22}, \dots) , ... so zugeordnet werden, daß sie ein vollständiges Orthogonalsystem bilden:

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_{pm} \bar{x}_{qm} = \begin{cases} 1, & \text{für } p = q \\ 0, & \text{für } p \neq q \end{cases} \quad (\text{Orthogonalität}),$$

und⁶⁾

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_{mp} \bar{x}_{mq} = \begin{cases} 1, & \text{für } p = q \\ 0, & \text{für } p \neq q \end{cases} \quad (\text{Vollständigkeit}).$$

Bei geringerer Regularität (Beschränktheit) kann wieder ein Strecken-

⁶⁾ Dies ist bekanntlich dem eigentlichen Analogon der Vollständigkeitsrelation (vgl. I.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_{pn} \right) \overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_{pn} \right)}$$

gleichbedeutend.

spektrum auftr
I. für kontinui
eingehend dam
weiter erörtern
in der bisherig
operatoren) stel
des Hermitesch

III. Das
ander, sowie n
bekanntlich an

Wenn φ_1 ,
im betrachteten

jedem f mit ϵ

(x_1, x_2, \dots) mi

Dabei entsprec
dem Satz von

mit endlichem

Die Zuord

aus $f \leftarrow$

aus $\begin{cases} f \leftarrow \\ g \leftarrow \end{cases}$

und es ist

D. h. alle
verwendeten B
müssen dieselb
im diskreten R

⁷⁾ Die vollst
Hilbert entdeckt,
weiter untersucht
sowie Journal f. l

⁸⁾ Z. B. Göt

⁹⁾ Den Bewe
Fischer-F. Riesz

spektrum auftreten, was dieselben Komplikationen bedingt, wie die unter I. für kontinuierliche Räume skizzierten; da wir uns später noch recht eingehend damit zu beschäftigen haben werden, wollen wir es hier nicht weiter erörtern⁷⁾. Irgendwelche „Regularitäts“-Annahmen wurden übrigens in der bisherigen Literatur (sowohl bei Matrizen als auch bei Integraloperatoren) stets gemacht: eine Diskussion des Eigenwertproblems auf Grund des Hermiteschen Charakters allein erfolgte nie.

III. Das analoge Verhalten der kontinuierlichen Räume Ω untereinander, sowie mit dem hier betrachteten diskreten Raume $1, 2, \dots$, liegt bekanntlich an folgendem:

Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen im betrachteten Raume Ω ist, so wird durch die Zuordnung

$$f \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots), \quad x_n = \int_{\Omega} f \cdot \overline{\varphi_n} \cdot dv \quad (n = 1, 2, \dots)$$

jedem f mit endlichem Absolutwertquadratintegral $\int_{\Omega} |f|^2 \cdot dv$ eine Folge (x_1, x_2, \dots) mit endlicher Absolutwertquadratsumme $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ zugeordnet. Dabei entsprechen verschiedenen f verschiedene (x_1, x_2, \dots) , und nach dem Satz von Fischer und F. Riesz⁸⁾ entspricht wirklich jedes (x_1, x_2, \dots) mit endlichem $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ einem f mit endlichem $\int_{\Omega} |f|^2 \cdot dv$.

Die Zuordnung ist linear, d. h.

$$\text{aus } f \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots) \text{ folgt } af \leftrightarrow (ax_1, ax_2, \dots),$$

$$\text{aus } \left\{ \begin{array}{l} f \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots) \\ g \leftrightarrow (y_1, y_2, \dots) \end{array} \right\} \text{ folgt } f + g \leftrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots),$$

und es ist

$$\int_{\Omega} f \cdot \overline{g} \cdot dv = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \text{ } ^9).$$

D. h. alle bei der Beschreibung der Eigenwerte und Eigenfunktionen verwendeten Begriffsbildungen sind bei dieser Zuordnung invariant; also müssen dieselben in den in I. betrachteten kontinuierlichen Räumen und im diskreten Raume aus II. dasselbe Verhalten zeigen.

⁷⁾ Die vollstetigen und die beschränkten Formen (bzw. Operatoren) wurden von Hilbert entdeckt, und er löste ihr Eigenwertproblem (Göttinger Nachr. 1906, S. 157—209), weiter untersucht wurden die beschränkten Bilinearformen von Hellinger, vgl. Anm. ⁴⁾, sowie Journal f. Math. 136 (1909), S. 210—273.

⁸⁾ Z. B. Göttinger Nachr. 1907, S. 116—122.

⁹⁾ Den Beweis dieser, allgemein bekannten, Tatsachen (zusammen mit dem Fischer-F. Riesz'schen Satze) werden wir im Kap. I und im Anhang I erbringen.

Erstes Kapitel.

Entwicklung vor Hadamard.

§ 1.

Euklid.

Unter einer Primzahl versteht man eine positive ganze Zahl, welche von 1 verschieden und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Die Reihe der Primzahlen beginnt mit

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie besteht darin, daß jede ganze Zahl auf eine und nur eine Weise in Primfaktoren zerlegbar ist. Wenn also

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad \dots,$$

allgemein p_n gleich der n ten Primzahl gesetzt wird und $a > 1$ eine beliebige positive ganze Zahl ist, so ist a auf eine und nur eine Weise in der Form

$$a = p_{\alpha_1}^{b_1} \cdots p_{\alpha_r}^{b_r}$$

darstellbar, wo $v \geq 1$, $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$, ist und die Exponenten b_1, \dots, b_r sämtlich ≥ 1 sind.

Schon Euklid¹⁾ hat bewiesen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt; aus dem obigen Fundamentalsatz folgt dies noch nicht, da endlich viele Primzahlen infolge der Willkür der Exponenten bereits unendlich viele Zahlen erzeugen. Euklids Beweis ist einfach folgender: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_q , so müßte jede Zahl > 1 durch mindestens eine dieser q Primzahlen teilbar sein; aber das um 1 vermehrte Produkt jener Zahlen

$$p_1 p_2 \cdots p_q + 1$$

ist weder durch p_1 , noch durch p_2, \dots , noch durch p_q teilbar, da es,

1) 1, S. 388—391.

durch jede dieser Zahlen geteilt, den Rest 1 läßt. Also gibt es unendlich viele Primzahlen.

Es werde für jedes, auch nicht ganzzahlige, x unter $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ verstanden, d. h. für $x < 2$ der Wert 0, für $x \geq 2$ die Anzahl der Primzahlen in der Reihe

$$1, 2, \dots, [x],$$

wo $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet; es ist also

$$\pi(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 2,$$

$$\pi(x) = 1 \quad \text{für} \quad 2 \leq x < 3,$$

$$\pi(x) = 2 \quad \text{für} \quad 3 \leq x < 5,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\pi(x) = n \quad \text{für} \quad p_n \leq x < p_{n+1}.$$

allgemein

$\pi(x)$ ist also eine mit wachsendem x niemals abnehmende Funktion; d. h. für $x_1 < x_2$ ist

$$\pi(x_1) \leq \pi(x_2).$$

Ferner wächst nach dem Euklidschen Satze $\pi(x)$ mit x ins Unendliche. Anders ausgedrückt: wenn g eine beliebige positive Größe ist, so gibt es ein $\xi = \xi(g)$, so daß für alle $x \geq \xi$

$$\pi(x) > g$$

ist. Ich schreibe kurz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) = \infty,$$

indem ich mich gleich bei dieser historischen Übersicht einheitlich der modernen Bezeichnungen bediene.

§ 2.

Legendre.

Das Wachstum der Funktion $\pi(x)$ ist sehr unregelmäßig, und es kann natürlich nicht das Verlangen gestellt werden, $\pi(x)$ durch einen einfachen analytischen Ausdruck genau darzustellen, etwa für ganzzahlige x nur durch Kombination endlich vieler rationaler und trigonometrischer Funktionen. Das Hauptstreben hatte sich von jeher darauf gerichtet, $\pi(x)$ mit einer der einfacheren Funktionen $f(x)$ der positiven Variablen x derart in Zusammenhang zu bringen, daß $\pi(x)$ annähernd durch $f(x)$ dargestellt wird. Diese Redeweise „annähernd“

schon auf den ersten Blick die Fragestellung wird eine gewisse Zahl $\pi(x) - f(x)$ im Verhältnis zu $f(x)$ für hinreichend großen x beliebig klein machen. Der Quotient

$$\frac{\pi(x) - f(x)}{f(x)}$$

für $x \rightarrow \infty$ einen Limes besitzt. Es soll also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) - f(x)}{f(x)} = 0$$

sein, oder, was dasselbe besagt

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = 1$$

Mit anderen Worten, es wird eine hinreichend große positive Zahl ξ existieren, die die Eigenschaft besitzt: Zu jeder Zahl $\delta > 0$ gibt es ein ξ derart, daß für alle $x \geq \xi$

$$1 - \delta < \frac{\pi(x)}{f(x)} < 1 + \delta$$

d. h.

$$\left| \frac{\pi(x)}{f(x)} - 1 \right| < \delta$$

ist.

In diesem Sinne ist eine Funktion $f(x)$ die Legendre im Jahre 1798 aufgefunden hat ziser gefaßt hat.

Im Jahre 1798 sagte er und unter b die Anzahl der Primzahlen $\leq b$.

„Au reste, il est vraisemblable que la valeur de b lorsque

$$b = \frac{A}{A \log a + B}, \quad A \text{ et } B \text{ étant des constantes}$$

signifiant un logarithme hyperbolique, le coefficient A seroit un problème que les Analystes.“

Im Jahre 1808 äußert er sich über die Frage

„Quoique la suite des nombres premiers, on peut cependant trouver une loi qui les gouverne.“

1) 2a, S. 19.
2) 2b, S. 394; 4 Bd. 2, S. 65;

damard.

t 1 läßt. Also gibt es un-
 zahlige, x unter $\pi(x)$ die An-
 n. für $x < 2$ der Wert 0, für
 Reihe

chnet; es ist also

- $x < 2,$
- $x < 3,$
- $x < 5,$
- ...

$$x < p_{n+1}.$$

x niemals abnehmende Funk-

).

Satze $\pi(x)$ mit x ins Unend-
 e beliebige positive Größe ist,
 $x \geq \xi$

$\infty,$

orischen Übersicht einheitlich

e.

ist sehr unregelmäßig, und es
 stellt werden, $\pi(x)$ durch einen
 a darzustellen, etwa für ganz-
 dlich vieler rationaler und tri-
 ptstreben hatte sich von jeher
 einfacheren Funktionen $f(x)$ der
 menhang zu bringen, daß $\pi(x)$
 . Diese Redeweise „annähernd“

scheint auf den ersten Blick einer präzisen Bedeutung bar zu sein;
 die Fragestellung wird eine ganz präzise, wenn man verlangt, daß der
 Fehler $\pi(x) - f(x)$ im Verhältnis zum wahren Werte $\pi(x)$ für alle
 hinreichend großen x beliebig klein wird. Man verlangt also, daß
 der Quotient

$$\frac{\pi(x) - f(x)}{\pi(x)} = 1 - \frac{f(x)}{\pi(x)}$$

für $x = \infty$ einen Limes besitzt und daß dieser Limes gleich Null ist.
 Es soll also

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\pi(x)} = 1$$

sein, oder, was dasselbe besagt,

$$(1) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = 1.$$

Mit anderen Worten, es wird eine von den Primzahlen selbst unab-
 hängige Funktion $f(x)$ des positiven Argumentes x gesucht, welche
 die Eigenschaft besitzt: Zu jeder positiven Größe δ gibt es ein $\xi = \xi(\delta)$
 derart, daß für alle $x \geq \xi$

$$1 - \delta < \frac{\pi(x)}{f(x)} < 1 + \delta,$$

d. h.

$$\left| \frac{\pi(x)}{f(x)} - 1 \right| < \delta$$

ist.

In diesem Sinne ist eine Vermutung zu interpretieren, welche
 Legendre im Jahre 1798 ausgesprochen und im Jahre 1808 prä-
 ziser gefaßt hat.

Im Jahre 1798 sagte er¹⁾, unter a eine positive ganze Zahl
 und unter b die Anzahl der Primzahlen $\leq a$ verstehend:

„Au reste, il est vraisemblable que la formule rigoureuse qui
 donne la valeur de b lorsque a est très-grand, est de la forme

$b = \frac{a}{A \log a + B}$, A et B étant des coefficients constans, et $\log a$ dé-
 signant un logarithme hyperbolique. La détermination exacte de ces
 coefficients seroit un problème curieux et digne d'exercer la sagacité
 des Analystes.“

Im Jahre 1808 äußert er sich folgendermaßen²⁾:

„Quoique la suite des nombres premiers soit extrêmement irré-
 gulière, on peut cependant trouver avec une précision très-satisfaisante,

¹⁾ *ib.*, S. 19.

²⁾ *ib.*, S. 804; 4. Bd. 2, S. 65; 5. Bd. 2, S. 65.

combien il y a de ces nombres depuis 1 jusqu'à une limite donnée x .
La formule qui résout la question est

$$y = \frac{x}{\log x - 1.08366},$$

$\log x$ étant un logarithme hyperbolique.⁽¹⁾

Legendre vermutet also, daß die Funktion $A(x)$, welche man durch die Gleichung

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - A(x)}$$

definieren kann, für $x = \infty$ gegen einen Grenzwert

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)$$

konvergiert, dessen erste Dezimalen mit 1,08366 übereinstimmen. Das besagt insbesondere wegen

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x)}{x} &= \frac{\pi(x) \log x}{x} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{A(x)}{\log x}}, \end{aligned}$$

daß

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x \log x} = 1$$

ist, d. h., daß die elementare Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\log x}$$

der Gleichung (1) genügt²⁾. Natürlich ist für (3) die Existenz von (2) nicht nötig; sondern die Gleichungen (3) und

1) Abel schrieb am 4. August 1828 an Holmboe (nach dem Studium von Legendres Buch) diese Formel ab, mit der Vorbemerkung: „Følgende Theorem som findes der og som vistnok er det mærkværdigste i hele Mathematiken kan jeg [ikke] afholde mig fra at afskrive.“ Vgl. S. 5 der Briefftexte (oder auch S. 5 der französischen Übersetzungen) in: Niels Henrik Abel. Memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania (Dybwad), Paris (Gauthier-Villars), London (Williams & Norgate), Leipzig (Teubner); 1902. Jener Passus kommt auch am Schluß des Werkes im Faksimile 1 vor.

2) Übrigens hält Legendre (2b, S. 395; 4, Bd. 2, S. 66; 5, Bd. 2, S. 66) auch für möglich, daß bei der Vergleichsfunktion

$$\frac{x}{1,00 \dots \log x - 1,08366 \dots}$$

der Koeffizient von $\log x$ nicht genau 1 ist, sondern nur sehr nahe an 1 liegt.

offenbar entweder beide
Legendre war sich sehr
beweisen konnte.

Legendre sprach ferne
über falschem Beweis — be
sehr weittragende Vermutung
ganze Zahlen. In der Linear

wo y alle ganzen Zahlen $\geq C$

$$l, k+l,$$

kann offenbar, wenn k und l
nur höchstens eine Primzahl
durch d teilbar. Legendre¹

Jede arithmetische P

in welcher

ist²⁾, stellt unendlich viel

Legendre vermutete 18
verteile alle Primzahlen —
aufgehenden — auf die $h = \varphi(l)$
wo l_1, \dots, l_h die zu k teilerfr
es sei $\pi_\nu(x)$ für $\nu = 1, \dots, h$
Dann ist für je zwei Indizes

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_\nu(x)}{x \log x} = 1$$

Das meint er offenbar mit de
„Cela posé si on s'arrête
que nous supposons très-gra
premiers moindres que nA , e
pris dans ces diverses progr

1) 2b, S. 404; 4, Bd. 2, S. 77
vermeintlichen Beweis) hatte Legendre

2) Ich verstehe unter (a, b) d
3) 4, Bd. 2, S. 99; 5, Bd. 2,

damard.

jusqu'à une limite donnée x .

1866,

(1)

Funktion $A(x)$, welche man

$A(x)$

Grenzwert

1,08366 übereinstimmen. Das

og x

$A(x)$,

og x

- 1

$\frac{c}{g x}$

ist für (3) die Existenz von
gen (3) und

Holmboe (nach dem Studium von
er Vorbemerkung: „Følgende Theo-
markværdigste i hele Mathematiken
Vgl. S. 5 der Briefftexte (oder auch
Niels Henrik Abel. Memorial
sa naissance. Kristiania (Dybwad),
Norgate), Leipzig (Teubner); 1902.
Verkes im Faksimile 1 vor.
95; 4, Bd. 2, S. 66; 5, Bd. 2, S. 66)
nktion

,08366...

, sondern nur sehr nahe an 1 liegt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\log x} = 0$$

sind offenbar entweder beide richtig oder beide falsch.

Legendre war sich sehr wohl bewußt, daß er seine Vermutung nicht beweisen konnte.

Legendre sprach ferner 1808 — diesmal mit vermeintlichem, aber falschem Beweis — bei einem anderen Primzahlproblem eine sehr weittragende Vermutung aus. Es seien k und l zwei positive ganze Zahlen. In der Linearform

$$ky + l,$$

wo y alle ganzen Zahlen ≥ 0 durchläuft, d. h. unter den Zahlen

$$l, k+l, 2k+l, 3k+l, \dots$$

kann offenbar, wenn k und l einen gemeinsamen Teiler $d > 1$ haben, nur höchstens eine Primzahl vorkommen; denn jede Zahl $ky + l$ ist durch d teilbar. Legendre¹⁾ vermutete nun:

Jede arithmetische Progression

$$ky + l,$$

in welcher

$$(k, l) = 1$$

ist²⁾, stellt unendlich viele Primzahlen dar.

Legendre vermutete 1830 noch genauer das Folgende: Man verteile alle Primzahlen — mit Ausnahme der endlich vielen in k aufgehenden — auf die $h = \varphi(k)$ Progressionen $ky + l$, ($v = 1, 2, \dots, h$), wo l_1, \dots, l_h die zu k teilerfremden positiven Zahlen $\leq k$ bezeichnen; es sei $\pi_v(x)$ für $v = 1, \dots, h$ die Anzahl der Primzahlen $ky + l_v \leq x$. Dann ist für je zwei Indizes v und v' aus der Reihe $1, \dots, h$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_v(x)}{\pi_{v'}(x)} = 1.$$

Das meint er offenbar mit den Worten³⁾:

„Cela posé si on s'arrête à une valeur déterminée du nombre n que nous supposons très-grand par rapport à A , tous les nombres premiers moindres que nA , excepté ceux qui divisent A , seront compris dans ces diverses progressions, et notre objet est de prouver

1) 2b, S. 404; 4, Bd. 2, S. 77; 5, Bd. 2, S. 77. Als bloße Vermutung (ohne vermeintlichen Beweis) hatte Legendre dies schon 1788 ausgesprochen: 1, S. 552.

2) Ich verstehe unter (a, b) den größten gemeinsamen Teiler von a und b .

3) 4, Bd. 2, S. 99; 5, Bd. 2, S. 97.

qu'ils sont répartis également entre elles, c'est-à-dire que s'il y a P nombres premiers compris dans la progression dont le terme général est $nA - C_p$, et Q nombres premiers compris dans la progression dont le terme général est $nA - C_q$, n étant le même de part et d'autre, le rapport $\frac{P}{Q}$ deviendra aussi peu différent de l'unité qu'on voudra en donnant à n une valeur suffisamment grande."

Auch diesmal wird Legendres Verdienst durch die Tatsache getrübt, daß er hierfür einen vermeintlichen Beweis angibt, welcher nicht stichhaltig ist, auch nicht unter der Annahme der Richtigkeit seiner vorangehenden Vermutungen.

Im Verein mit (3) und mit Rücksicht darauf, daß für $x > k$

$$\pi(x) = \pi_1(x) + \dots + \pi_h(x) + a$$

ist, wo a die Anzahl der in k aufgehenden Primzahlen bezeichnet, vermutet also Legendre¹⁾, daß

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(x)}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_h(x)}{x} = \frac{1}{h}$$

ist. In der Tat würde aus (4) für jedes $\nu = 1, \dots, h$ folgen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(x) + \dots + \pi_h(x)}{\pi_\nu(x)} = 1 + 1 + \dots + 1 = h,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\pi_\nu(x)} = h,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_\nu(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_\nu(x)}{\pi(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = \frac{1}{h},$$

wie in (5) ausgesagt wurde.

§ 3.

Dirichlet.

In der Einleitung einer Arbeit²⁾, welche heute als sein größtes Werk anzusehen ist, beginnt Dirichlet mit folgenden Worten:

„Die aufmerksame Betrachtung der natürlichen Reihe der Primzahlen läßt an derselben eine Menge von Eigenschaften wahrnehmen,

1) 4, Bd. 2, S. 104; 5, Bd. 2, S. 100.

2) 2; 4.

...heit durch fo
 ...Wahrscheinliche
 ...Beweises, c
 ...mit den größter
 ...gegeben Resultate
 ...Glieder der Reihe
 ...Nimmt man d
 ...mithin unter den
 ...alle übrigen einen
 ...ist, und das Res
 ...herausstellt, besteht d
 ...wiederkehrt, und
 ...für irgend zwei solch
 ...gewissen Gliede erschie
 ...Division die Einheit zur Gre
 ...nehmenden Gleichmäßigkeit d
 ...beschränkt das Beobachtungs
 ...mehr eines jeden derselben, s
 ...sprechen: »dafs jede unbegre
 ...Glieder und Differenz keinen ge
 ...viele Primzahlen enthält.«

Dirichlet schließt sich a

und
 li
 li

über die Primzahlen der arithm
 Arbeit und das große darin er
 (also das im Schlußsatze des
 Dirichlets Beweis ist bald k
 in diesem Werke bis auf ein
 Anschluß an Dirichlet bewe
 übrigens das Schwierigste und
 war, besteht darin, daß es er
 gewisser unendlichen Reihen, d
 kann, sind von Null verschie
 verschwinden dadurch, daß er
 summen ist das Produkt eine

1) 5a, S. 368—369; 5b, S. 40