German Exam
Spring 2009

Eine geometrische Beschreibung des Fixpunktindexes

Von

Albrecht Dold

— START

Ziel dieser Note ist eine einfache geometrische Beschreibung des klassischen Fixpunktindexes für (partiell definierte) Selbstabbildungen f von euklidischen Umgebungsretrakten (ENR). Dazu betrachten wir die Gesamtheit $\mathfrak{F}$ aller dieser f und führen darin eine naheliegende Äquivalenzrelation $\sim$ ein (nämlich Homotopie und Ausschneidung). Der Quotient $\mathfrak{F}/\sim$ besitzt eine natürliche Addition, und wir zeigen, daß $\mathfrak{F}/\sim$ eine freie zyklische Gruppe ist. Der Übergang zur Äquivalenzklasse, $f \mapsto [f] \in (\mathfrak{F}/\sim) \cong \mathbf{Z}$, ist dann der Index. Diese Beschreibung unterscheidet sich von anderen axiomatischen Charakterisierungen des Indexes ([5], [1], [2], [3]) einmal durch den Gesichtspunkt, zum anderen dadurch, daß weniger vorausgesetzt wird.

1. Das Monoid FIX $= \mathfrak{F}/\sim$. Ein topologischer Raum X heißt ENR (= euclidean neighborhood retract), wenn es eine offene Menge O in einem euklidischen Raum gibt und stetige Abbildungen $X \xrightarrow{i} O \xrightarrow{r} X$ mit $ri = \mathrm{id}_X$. Nach einem Satz von Borsuk (vgl. [4] IV, 8.12) ist ein Teilraum X des $\mathbf{R}^n$ genau dann ENR, wenn er lokal kompakt und lokal zusammenziehbar ist. Aus technischen Gründen (s. 4.1) werden wir im folgenden meist voraussetzen, daß X *keine isolierten Punkte* besitzt, d.h. keine einpunktigen offenen Teilmengen.

Wir betrachten stetige Abbildungen $f: V \to X$, wobei V eine offene Teilmenge von X ist (und X ein ENR ohne isolierte Punkte). Eine solche Abbildung nennen wir *kompakt fixiert*, falls $\mathrm{Fix}(f) = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ kompakt ist. Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller (Homöomorphieklassen) kompakt fixierter Abbildungen. In dieser Menge betrachten wir die folgende *Homotopierelation* $\overset{\mathrm{HTP}}{\sim}$ und *Ausschneidungsrelation* $\overset{\mathrm{EXC}}{\sim}$.

(HTP) Sind $f_0, f_1: V \to X$ in $\mathfrak{F}$, so schreiben wir $f_0 \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} f_1$, falls eine Deformation $F: V \times [0,1] \to X$ von f_0 in f_1 existiert ($f_t(v) = F(v,t)$), derart daß $\bigcup_{0 \le t \le 1} \mathrm{Fix}(f_t)$ kompakt ist; anders ausgedrückt, eine Deformation F von f_0 in f_1 derart, daß $V \times [0,1] \to X \times [0,1]$, $(v,t) \mapsto (F(v,t), t)$, kompakt fixiert ist.

(EXC) Sind $f_0: V_0 \to X_0$, $f_1: V_1 \to X_1$ in $\mathfrak{F}$, so schreiben wir $f_0 \overset{\mathrm{EXC}}{\sim} f_1$ oder $f_1 \overset{\mathrm{EXC}}{\sim} f_0$, falls f_0 ein offener Teil von f_1 mit derselben Fixpunktmenge ist, d.h. also $X_0 \subset X_1$, V_0 offener Teil von V_1, $f_0(v) = f_1(v)$ für $v \in V_0$, und $\mathrm{Fix}(f_0) = \mathrm{Fix}(f_1) \subset V_0$.

Die von den beiden Relationen $\overset{\mathrm{HTP}}{\sim}$ und $\overset{\mathrm{EXC}}{\sim}$ in $\mathfrak{F}$ erzeugte Äquivalenzrelation bezeichnen wir mit $\sim$, die Äquivalenzklasse von f mit $[f]$, und die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathrm{FIX} = \mathfrak{F}/\sim = \{[f]\}$.

Sind $f_1 : V_1 \to X_1$ und $f_2 : V_2 \to X_2$ kompakt fixiert, dann auch die topologische Summe $f_1 \oplus f_2 : V_1 \oplus V_2 \to X_1 \oplus X_2$. Die Verknüpfung $\oplus$ ist mit $\sim$ verträglich und induziert in $\mathrm{FIX} = \mathfrak{F}/\sim$ eine Verknüpfung $[f_1] + [f_2] = [f_1 \oplus f_2]$. Damit wird FIX zu einem kommutativen assoziativen Monoid mit Neutralelement $[\emptyset]$, und unser Hauptergebnis lautet wie folgt:

1.1. Satz. FIX *ist eine freie zyklische Gruppe*, $\mathrm{FIX} \cong \mathbf{Z}$; *sie wird erzeugt von* $e = [\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 0]$.

In den beiden folgenden Abschnitten zeigen wir durch einfache geometrische Konstruktionen zunächst, daß FIX eine zyklische Gruppe ist, die von e erzeugt wird (Satz 3.2). Daß sie auch frei ist, d.h. daß kein positives Vielfaches $n \cdot e$ verschwindet, ergibt sich dann aus der Existenz eines ganzzahligen Indexes $I(f)$. Dieser Index $I : \mathfrak{F} \to \mathbf{Z}$ ist nämlich invariant bei $\sim$ (s. [4], Chap. VII, 5.10, 5.11, 5.15) und induziert also eine Abbildung $I : \mathrm{FIX} = \mathfrak{F}/\sim \to \mathbf{Z}$. Aus 5.12, 5.13 loc. cit. folgt $I(ne) = n$ für $n \geqq 0$, also ist FIX gewiß nicht endlich.

2. Reduktion auf den Fall $V \to \mathbf{R}^n$. Diese Reduktion ergibt sich aus der Kommutativität $[\alpha\beta] = [\beta\alpha]$, die wir hier in einem wichtigen Spezialfall aus (HTP) und (EXC) ableiten (für den allgemeinen Fall vgl. 4.2).

2.1. Hilfssatz. *Ist $g : W \to Y$ kompakt fixiert und ist $K \subset W$ eine Umgebung von $\mathrm{Fix}(g)$, dann gibt es endlich viele kompakt fixierte Abbildungen $g_0, g_1, \ldots, g_r : W \to Y$ derart, daß $g_i \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} g$, $g_i \mid W - K = g \mid W - K$ für alle i, und $\bigcap_{i=0}^{r} \mathrm{Fix}(g_i) = \emptyset$.*

Beweis. Wir können K als kompakt voraussetzen. Ist $P \in \mathrm{Fix}(g)$, so wählen wir einen Weg $\varphi : [0,1] \to Y$ mit $\varphi(0) = P$, $\varphi(1) \neq P$ [1]). Da $P \subset W$ die Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt, können wir φ zu einer Deformation $\Phi : W \times [0,1] \to Y$ mit $\Phi(v, 0) = g(v)$, $\Phi(P, t) = \varphi(t)$ erweitern; dabei können wir annehmen, daß Φ außerhalb von K stationär ist, also $\Phi(v, t) = g(v)$ für $v \notin K$. Setzen wir $g_P : W \to Y$, $g_P(v) = \Phi(v, 1)$, dann ist $g_P \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} g$ $\left(\text{denn } \bigcup_t \mathrm{Fix}(\Phi_t) \subset K\right)$ und $g_P \mid W - K = g \mid W - K$; ferner ist $g_P(P) \neq P$. Führen wir diese Konstruktion für alle $P \in \mathrm{Fix}(g)$ aus, so gilt demnach $\left(\bigcap_P \mathrm{Fix}(g_P)\right) \cap (\mathrm{Fix}(g)) = \emptyset$. Wegen der Kompaktheit ist schon ein endlicher Durchschnitt leer, sagen wir $\left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Fix}(g_{P_i})\right) \cap (\mathrm{Fix}(g)) = \emptyset$. Wir setzen dann $g_0 = g$ und $g_i = g_{P_i}$ für $i > 0$. ∎

Ist Y ein ENR und $X \subset Y$ ein Retrakt (abgeschlossener Umgebungsretrakt genügt) von Y, dann ist auch X ein ENR und die Inklusionsabbildung $i : X \subset Y$ hat die Homotopieerweiterungseigenschaft (vgl. [6], Satz 1).

Daraus folgt trivialerweise, daß der Abbildungszylinder $Z = \{(y, t) \in Y \times [0,1] \mid t = 0 \text{ oder } y \in X\}$ Retrakt von $Y \times [0,1]$ ist; insbesondere ist Z ebenfalls ein ENR [2]).

---

1) Hier geht ein, daß P kein isolierter Punkt ist.

2) Allgemeiner ist der Abbildungszylinder jeder eigentlichen Abbildung zwischen ENRs ein ENR.

Seien $j: Y \to Z$, $j(y) = (y, 0)$, und $p: Z \to Y$, $p(y, t) = y$, Inklusion und Projektion; insbesondere $pj = \mathrm{id}_Y$.

2.2. Hilfssatz. *Ist $g: W \to Y$ eine kompakt fixierte Abbildung, dann auch $h = jgp: p^{-1}W \to Z$ (denn $\mathrm{Fix}(h) \approx \mathrm{Fix}(g)$), und es gilt $g \sim h$, also $[g] = [h]$ in* FIX.

Beweis. Wir benutzen die Abbildungen g_k aus Hilfssatz 2.1. Wegen $\bigcap\limits_{k=0}^{r} \mathrm{Fix}(g_k) = \emptyset$ gibt es stetige Funktionen $\varrho_k: Y \to [0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, r$, mit $\varrho_k | \mathrm{Fix}(g_k) = 1$, $\varrho_k | Y - W = 0$, und $\mathrm{Min}\{\varrho_k | k = 0, 1, \ldots, r\} = 0$. Wir setzen

$$Z_k = \{(y, t) \in Z \,|\, t \leqq \mathrm{Min}(\varrho_0 y, \varrho_1 y, \ldots, \varrho_{k-1} y)\},$$

$h_k = jgp: Z_k \cap p^{-1}W \to Z_k$ für $k = 0, 1, \ldots, r+1$ (also $h_k(y, t) = (gy, 0)$), und beweisen induktiv, daß $h_k \sim h$. Wegen $h_0 = h$ haben wir einen Induktionsanfang. Wegen $g \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} g_k$ ist $h_k = jgp \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} jg_k p$. Wegen $\varrho_k | \mathrm{Fix}(g_k) = 1$ und da alle Fixpunkte von $jg_k p$ auf dem Niveau $t = 0$ (also in Y) liegen, können wir die Punkte (y, t) mit $t > \varrho_k y$ ausschneiden, also

$$jg_k p \sim jg_k p | Z_{k+1}: Z_{k+1} \cap p^{-1}W \to Z_{k+1}.$$

Aber $jg_k p | Z_{k+1} \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} jgp | Z_{k+1} = h_{k+1}$. Damit ist der Induktionsschritt $h_{k+1} \sim h_k$ bewiesen, und wegen $h_{r+1} = g$ auch der Hilfssatz. Zu bemerken ist nur noch, daß jedes Z_k ein ENR ist: Es ist nämlich Retrakt von Z vermöge

$$(y, t) \mapsto (y, \mathrm{Min}(t, \varrho_0 y, \ldots, \varrho_{k-1} y)). \quad \blacksquare$$

2.3. Hilfssatz. *Wie oben sei Y ein* ENR *und X ein Retrakt von Y, in Zeichen $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} X$, $ri = \mathrm{id}$. Ferner sei $f: V \to X$ eine kompakt fixierte Abbildung. Dann ist auch $g = ifr: r^{-1}V \to Y$ kompakt fixiert (denn $\mathrm{Fix}(g) \approx \mathrm{Fix}(f)$), und es gilt $f \sim g$, also $[f] = [g]$ in* FIX.

Beweis. Wie oben betrachten wir den Abbildungszylinder $Z = \{(y, t) \in Y \times [0, 1] \,|\, t = 0$ oder $y \in X\}$, die Inklusion $j: Y \to Z$, $jy = (y, 0)$, die Projektion $p: Z \to Y$, $p(y, t) = y$, und die kompakt fixierte Abbildung $h = jgp = jifrp: p^{-1}r^{-1}V \to Z$. Nach 2.2 ist $h \sim g$; wir zeigen jetzt, daß $h \sim f$. Dazu betrachten wir die Abbildungen $k_t: X \to Z$, $k_t(x) = (x, t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$. Wegen $k_0 = ji$ haben wir $h = jifrp = k_0 frp \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} k_1 frp$. Das Bild von $k_1 frp$ und erst recht die Fixpunkte von $k_1 frp$ liegen auf dem Niveau $t = 1$; wir können also die Punkte (y, t) mit $t < \frac{1}{2}$ ausschneiden. Dann bleibt von Z nur noch $\{(y, t) \in Z \,|\, t \geqq \frac{1}{2}\} = X \times [\frac{1}{2}, 1]$ übrig, und aus $k_1 frp$ wird $k_1 fq: V \times [\frac{1}{2}, 1] \to X \times [\frac{1}{2}, 1]$, wobei $q: V \times [\frac{1}{2}, 1] \to V$ die Projektion bezeichnet; also $k_1 frp \sim k_1 fq$, und $k_1 fq(v, t) = (fv, 1)$. Aber $k_1 fq \sim f$, wie aus Hilfssatz 2.2 hervorgeht, wenn man dort $Y = X$, $g = f$ nimmt. $\blacksquare$

END

2.4. Korollar. *Jede kompakt fixierte Abbildung $f: V \to X$ ist zu einer kompakt fixierten Abbildung der Form $W \to \mathbf{R}^n$ äquivalent.*

In der Tat, X ist Retrakt einer offenen Menge Y eines euklidschen Raumes $\mathbf{R}^n$, $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} X$ mit $ri = \mathrm{id}_X$, und f ist nach 2.3 äquivalent zu $ifr: r^{-1}V \to Y$; dies wiederum ist $\overset{\mathrm{EXC}}{\sim}$ zur Zusammensetzung $r^{-1}V \xrightarrow{ifr} Y \subset \mathbf{R}^n$. $\blacksquare$

3. Der Fall $f: V \to \mathbf{R}^n$ ist im Grunde wohlbekannt (vgl. [3]). Aus Vollständigkeitsgründen führen wir ihn dennoch aus, zumal der Beweis einfach ist. Wir setzen $f_{\#} = \iota - f: V \to \mathbf{R}^n$, d.h. $f_{\#}(v) = v - f(v)$. Dann ist $f_{\#\#} = f$ und $\operatorname{Fix}(f) = f_{\#}^{-1}(0)$. Wir betrachten eine kompakte Umgebung $K \subset V$ von $f_{\#}^{-1}(0)$ und approximieren $f_{\#}$ durch eine stetig differenzierbare Abbildung $g: V \to \mathbf{R}^n$, die der Bedingung $\|g(v) - f_{\#}(v)\| < \|f_{\#} v\|$ genügt für $v \notin \mathring{K}$ und die 0 als regulären Wert besitzt. Dann besteht $g^{-1}(0)$ aus endlich vielen Punkten $P_1, \ldots, P_r$ von $\mathring{K}$, und in jedem dieser Punkte P_i ist die Ableitung $Dg(P_i)$ umkehrbar. Außerdem ist

$$g_t: V \to \mathbf{R}^n, \quad g_t(v) = (1-t) f_{\#}(v) + t g(v); \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

eine Deformation von $f_{\#}$ in g derart, daß $\bigcup_{0 \leqq t \leqq 1} g_t^{-1}(0)$ in K enthalten und daher kompakt ist. Die Deformation $(g_t)_{\#}$ zeigt dann $f \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} g_{\#}$, und $\operatorname{Fix}(g_{\#}) = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$. Wählen wir ein System $V_1, \ldots, V_r$ disjunkter offener Umgebungen der P_i in V, so können wir das Komplement von $\bigcup_i V_i$ ausschneiden ($\overset{\mathrm{ECX}}{\sim}$) und erhalten das folgende

3.1. Zwischenergebnis. *Jede kompakt fixierte Abbildung $f: V \to \mathbf{R}^n$ ist einer Summe $\bigoplus_{i=1}^{r} f_i$ äquivalent, wobei jedes $f_i: V_i \to \mathbf{R}^n$ stetig differenzierbar ist und nur einen Fixpunkt P_i besitzt; außerdem ist die Ableitung $Df_{i\#}(P_i)$ umkehrbar, d.h. die Zahl 1 ist kein Eigenwert von $Df_i(P_i)$.* ▮

Betrachten wir nun eine solche Abbildung f_i. Wir können $P_i = 0$ annehmen und den Index i weglassen, also $f: V \to \mathbf{R}^n$, $\operatorname{Fix}(f) = \{0\}$. Wir betrachten dann die Deformation

$$g_t: V \to \mathbf{R}^n, \quad g_t(v) = (1-t) f_{\#}(v) - t\, Df_{\#}(0)(v)$$

und die Abbildung

$$G: V \times [0,1] \to \mathbf{R}^n \times [0,1], \quad G(v,t) = (g_t(v), t).$$

Wegen $Dg_t(0) = Df_{\#}(0)$ ist die Ableitung DG entlang der ganzen Strecke $\{0\} \times [0,1]$ umkehrbar, also ist nach dem Satz über implizite Funktionen auch G selbst in einer Umgebung $U \times [0,1]$ von $\{0\} \times [0,1]$ umkehrbar, also ist $g_t | U$ eine Deformation von $f_{\#} | U$ in $Df_{\#}(0) | U$ derart, daß $(g_t | U)^{-1}(0) = 0$ ist für alle t. Die Deformation $(g_t | U)_{\#}$ zeigt dann

$$f \overset{\mathrm{EXC}}{\sim} f | U \overset{\mathrm{HTP}}{\sim} Df(0) | U \overset{\mathrm{EXC}}{\sim} Df(0),$$

d.h. $f: V \to \mathbf{R}^n$ ist zu $Df(0): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ äquivalent. Schließlich können wir $Df_{\#}(0)$ in der linearen Gruppe in eine der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

deformieren, d.h. $Df(0)$ unter Vermeidung des Eigenwertes 1 in eine der beiden Matrizen

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

deformieren. Diese beiden Matrizen sind nach Hilfssatz 2.3 zu den Abbildungen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 0$ oder $x \mapsto 2x$, äquivalent. Diese beiden Abbildungen wiederum addieren sich zu 0 in FIX, wie die folgenden Bilder zeigen.

$$(\to\to\to|\leftarrow\leftarrow\leftarrow \oplus \leftarrow\leftarrow\leftarrow|\to\to\to) \overset{\text{EXC}}{\sim} (\to\to\to|\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow|\to\to\to)$$
$$\overset{\text{HTP}}{\sim} (\to\to\to|\text{———}|\to\to\to) \overset{\text{HTP}}{\sim} (\to\to\to\to\to\to\to\to) \overset{\text{EXC}}{\sim} \emptyset\,.$$

Aus dem Korollar 2.4 und dem Zwischenergebnis 3.1 erhalten wir also den

3.2. Satz. *Jede kompakt fixierte Abbildung $f: V \to X$ ist äquivalent zu einer Summe von Abbildungen der Form $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 0$ oder $x \mapsto 2x$. Diese zwei Abbildungen addieren sich zu Null, $(x \mapsto 0) \oplus (x \mapsto 2x) \sim \emptyset$; das Monoid* FIX *ist also eine zyklische Gruppe und wird von $e = [x \mapsto 0] = -[x \mapsto 2x]$ erzeugt.* ▌

4. Ergänzende Bemerkungen. 4.1. Wir haben unseren Betrachtungen etwas willkürlich die Klasse der ENR ohne isolierte Punkte zugrunde gelegt. Welche anderen Klassen lassen sich in ähnlicher Weise behandeln?

Was zunächst die isolierten Punkte anbetrifft, so hätten wir sie ohne wesentliche Erschwerung zulassen können. Das Ergebnis hätte dann gelautet: $\text{FIX} \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{N}$ mit e als erzeugendem Element von $\mathbf{Z}$ wie oben und der Ein-Punkt-Abbildung $[P \to P]$ als Erzeugendem von $\mathbf{N}$. Dies ist ziemlich evident; es hätte aber die Formulierungen komplizierter gemacht.

Eine andere Möglichkeit wäre gewesen, die Klasse der lokalkompakten Polyeder (mit oder ohne isolierte Punkte) zu betrachten. Das Ergebnis wäre genauso ausgefallen wie bei den ENRs, und die Beweise hätten sich nur unwesentlich geändert; in Abschnitt 2 hätten wir etwas kürzer nach dem Muster von [3] vorgehen können. Die simplizialen Argumente lassen sich aber nicht so leicht auf andere Situationen übertragen wie unsere Beweise, die auf allgemein-topologischen Prinzipien beruhen. Es sollte z.B. keine erheblichen Schwierigkeiten bereiten (vgl. [2]), die Betrachtungen auf ANRs zu übertragen, wobei man allerdings schärfere Kompaktheitsvoraussetzungen über f in der Nähe von $\text{Fix}(f)$ machen muß. Eine andere weitgehende Verallgemeinerung, die ich demnächst zu veröffentlichen hoffe, betrifft Fixpunkte von fasernweisen Abbildungen.

4.2 Da die Äquivalenzklasse $[f]$ einer kompakt fixierten Abbildung f durch ihren Index $I(f) \in \mathbf{Z}$ bestimmt ist und da der Index kommutativ ist ($I(fg) = I(gf)$, falls fg kompakt fixiert ist, vgl. [4], VII, 5.16), so gilt auch $[fg] = [gf]$ in derselben Situation. M.a.W. *Kommutativität $[fg] = [gf]$ ist eine Konsequenz der Relationen $\overset{\text{HTP}}{\sim}$ und $\overset{\text{EXC}}{\sim}$.* Einen wichtigen Spezialfall davon haben wir in 2.3 direkt bewiesen; mit etwas mehr Aufwand läßt sich auch der allgemeine Fall direkt durch geometrische Konstruktionen zeigen (falls f oder g eigentlich ist, ist der Beweis praktisch derselbe). Bemerkenswert ist, daß die Kommutativität nicht mehr aus $\overset{\mathrm{HTP}}{\sim}$ und $\overset{\mathrm{EXC}}{\sim}$ folgt, wenn man isolierte Punkte zuläßt. In der Tat sind nach 4.1 die Ein-Punkt-Abbildung $P \to P$ und die konstante Abbildung $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nicht äquivalent, obwohl sie mit den beiden Zusammensetzungen von $f: P \to \mathbf{R}$ und $g: \mathbf{R} \to P$ übereinstimmen.

Literaturverzeichnis

[1] F. E. BROWDER, On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces. Summa Brasil. Math. 4, 253—293 (1960).

[2] R. F. BROWN, The Lefschetz Fixed Point Theorem. Glenview-London 1971.

[3] R. F. BROWN, An elementary proof of the uniqueness of the fixed point index. Pacific J. Math. 35, 549—558 (1970).

[4] A. DOLD, Lectures on Algebraic Topology. Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[5] B. O'NEILL, Essential sets and fixed points. Amer. J. Math. 75, 497—509 (1953).

[6] D. PUPPE, Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. 18, 81—88 (1967).

Eingegangen am 13. 8. 1973

Anschrift des Autors:
Albrecht Dold
Mathematisches Institut der Universität
D-69 Heidelberg

German Exam

Math. Nachr. 101, 141–151 (1981)

Über Regularitätseigenschaften der Lösungen von Anfangs-Randwertproblemen für parabolische Gleichungen

Von A. Azzam und E. Kreyszig in Windsor

(Eingegangen am 30. 6. 1980)

1. Einleitung und Problemstellung

START

Die vorliegende Arbeit betrifft lineare parabolische Gleichungen 2. Ordnung in $n+1$ unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ und t von der Form

$$(1.1) \qquad Lu = a_{ik}(x, t)\, u_{x_i x_k} + a_j(x, t)\, u_{x_j} + a(x, t)\, u - u_t = f(x, t)$$

in einem Bereich $\Omega \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ mit nichtglattem Rand. In (1.1) ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$, und es gelte die übliche Summationsvereinbarung. Es sei $\Omega = G \times J$ mit $J = (0, T]$ und $T > 0$. Hierbei wird $G \subset \boldsymbol{R}^n$ als einfachzusammenhängend und beschränkt vorausgesetzt. Wir nehmen an, daß der Rand ∂G von G Kanten besitzt (genaue Formulierung siehe Abschnitt 3) und wollen untersuchen, wie sich dies auf die Regularität von Lösungen des Dirichlet- und des gemischten Anfangs-Randwertproblems für (1.1) in $\bar{\Omega}$ auswirkt.

Grob gesprochen begegnet man folgendem Sachverhalt:

Bekanntlich wächst im Falle einer *glatten* Berandung ∂G die Regularität der Lösungen mit derjenigen der Koeffizienten der Gleichung, des Randes und der vorgegebenen Randdaten. Dies wurde zuerst für *spezielle elliptische* Gleichungen (Laplace- und Poisson-Gleichung) bewiesen und später für *allgemeine elliptische* Gleichungen und Randbedingungen; man vergleiche dazu [1] sowie [19].

Entsprechende Untersuchungen *parabolischer* Gleichungen in Bereichen mit *glattem* Rand sind jüngeren Datums und weniger zahlreich. Hierher gehören Arbeiten von A. Friedman [8] über das erste Anfangs-Randwertproblem, von Z. Itô [14] und L. I. Kamynin und V. N. Maslennikowa [15] über das zweite Problem sowie von N. V. Zitarašu [32] über das allgemeine Problem. Einige weitere Hinweise findet man in [18]. Folgendes ist dabei grundlegend:

Ist im Falle einer parabolischen Gleichung (1.1) der Rand ∂G von der Klasse $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, und hat (1.1) Koeffizienten der Klasse $C^\alpha(\bar{\Omega})$, so gilt für eine Lösung u, die die Bedingungen

$$\xi(x, t)\, u + \eta(x, t)\, u_\nu = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G \times J$$

mit

$$\xi \in C^{2+\alpha}(\partial G \times J), \quad \eta \in C^{1+\alpha}(\partial G \times J)$$

($u_\nu = \partial u / \partial \nu$ die äußere Normalableitung) sowie

$$u\,|_{t=0} = 0$$

erfüllt, die Aussage

$$u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) .$$

Bei *nichtglattem Rand* ändert sich der soeben gekennzeichnete Sachverhalt grundlegend; die Regularitätseigenschaften der Lösungen hängen dann außer von den genannten auch von anderen Umständen ab, wie wir noch im einzelnen feststellen werden; namentlich spielen die Innenwinkel längs der Kanten eine Rolle. Weiterhin kann dann insbesondere die Regularität der Lösungen nicht mehr dadurch beliebig erhöht werden, daß man die Regularität der Koeffizienten, der Randdaten und der glatten Teile des Randes entsprechend erhöht.

Für *elliptische* Gleichungen gibt es dazu zahlreiche Untersuchungen, über die man z. B. in [12] und [22] Literaturhinweise findet. Für *parabolische* Gleichungen, wie sie hier im Zusammenhang mit dem Dirichlet- und auch dem gemischten Problem behandelt werden, sind uns keine entsprechenden Arbeiten bekannt.

2. Zur Motivierung und bisherigen Entwicklung

Ehe wir mit Einzelheiten der Untersuchung beginnen, wollen wir einige Bemerkungen vorausschicken, die die allgemeine Lage noch näher kennzeichnen. Das Interesse am Regularitätsverhalten von Lösungen partieller Differentialgleichungen in Bereichen mit Ecken und Kanten läßt sich in verschiedenartiger und naheliegender Weise motivieren:

Erstmalige Anregungen in dieser Richtung ergaben sich im Zusammenhang mit Problemen der konformen Abbildung, nachdem das Dirichletsche Prinzip, Riemanns Grundlage des Beweises seines Abbildungssatzes, von Weierstrass kritisiert worden war und dadurch die Schwarz-Christofel-Formel im Zuge der Suche nach anderen Beweismethoden für den Abbildungssatz eine Zeitlang prinzipielle Bedeutung gewann. Dies legte auch die Betrachtung allgemeinerer Randbedingungen in Bereichen mit nichtglattem Rand nahe. Von einschlägigen neueren Arbeiten erwähnen wir die Untersuchungen von S. M. Nikolskij [23] über die Laplace-Gleichung und V. V. Fufajew [10] über die Poisson-Gleichung. Da diese beiden Gleichungen Prototypen elliptischer Gleichungen darstellen, lag die Herleitung entsprechender Ergebnisse für allgemeine elliptische Gleichungen nahe. Dies ist auf verschiedene Weise möglich, wie wir kurz erwähnen wollen:

Angeregt durch Probleme der konformen Abbildung haben H. Lewy [21] und seine Schule asymptotische Entwicklungen für Lösungen in der Umgebung von Ecken des Randes im Falle $n=2$ angegeben; vgl. z. B. N. M. Wigley [30]. Interessante Anwendungen dieser Methode auf Bergman-Operatoren (vgl. [4]) und in Vekuas Theorie der komplexen Riemann-Funktion (siehe [26]) findet man bei S. C. Eisenstat [6]. Die Theorie der Sobolew-Räume wurde im vorliegenden Zusammenhang von V. A. Kondratjew [16] und anderen angewendet;

~~vgl. hierzu auch [12] sowie [19], Kap. 3. Bezüglich der Benutzung der Greenschen Funktion und Integraldarstellungen bei Problemen der vorliegenden Art siehe z. B. K.-O. Widman [28].~~

~~Eine zweite Ursache für das Interesse an Regularitätseigenschaften der Lösungen von Randwert- und Anfangs-Randwertproblemen in Bereichen mit nichtglattem Rand ergibt sich in der numerischen Analysis. Hier treten bekanntlich bei Differenzenverfahren und bei der Methode der finiten Elemente im Falle von Ecken und Kanten oder bei Unstetigkeiten in den Randbedingungen oft lokale Konvergenzverschlechterungen und erhebliche Schwierigkeiten bezüglich der Fehlerabschätzung auf (siehe z. B. [7], Abschn. 23, [25], Kap. 8, sowie [3] und [12], S. 215). Methoden zur Abhilfe wurden bemerkenswerterweise schon relativ frühzeitig vorgeschlagen, z. B. 1930 von S. Gerschgorin [11]. Von späteren Arbeiten erwähnen wir die grundlegende Untersuchung von P. Laasonen [17] sowie zwei interessante Publikationen von E. A. Volkov [27] und I. Babuška [3], in denen durch geeignete Verfeinerung und Abänderung nahe der Ecken des Bereichs optimale Konvergenz $O(h^2)$ in der Tschebyscheff-Norm beim Differenzenverfahren bzw. in der Energienorm bei der Methode der finiten Elemente erzwungen wird. Über die Anwendung von Glattheitsaussagen von Lösungen bei der Subtraktion von Singularitäten siehe N. M. Wigley [29].~~

~~Alle die soeben genannten Arbeiten betreffen *elliptische* Gleichungen, enthalten aber viele Gesichtspunkte, die auch bei der numerischen Behandlung *parabolischer* Gleichungen Geltung beanspruchen. Die Schaffung einer allgemeinen Theorie auf der Grundlage dieser und verwandter Untersuchungen steht übrigens gegenwärtig noch aus.~~

~~Schließlich sei drittens auf die Bedeutung von Regularitätsaussagen bzw. der Charakterisierung der Singularitäten von Lösungen in Bereichen mit nichtglattem Rand bei gewissen physikalischen und technischen Fragen hingewiesen, die auf Probleme der genannten Art für elliptische oder parabolische Gleichungen führen. Dies trifft zu in der Elektrostatik, Hydrodynamik, Elastizitätstheorie und Wärmeleitung; siehe z. B. [5, 13, 20, 31].~~

3. Allgemeine Voraussetzungen und Ergebnisse

— CONTINUE HERE

Über den Rand ∂G von G nehmen wir an, er bestehe aus m Hyperflächenstücken Γ_j, $j=1, \ldots, m$, der Klasse $C^{2+\alpha}$, $0<\alpha<1$, deren Schnitte $E_j=\Gamma_j\cap\Gamma_{j+1}$ jeweils $(n-2)$-dimensionale Kanten bilden; hierbei ist $\Gamma_{m+1}=\Gamma_1$ gesetzt. Weiterhin sei $E_j\cap E_k=\emptyset$ für $j\neq k$.

Die äußere Normalableitung kennzeichnen wir durch einen Index ν, wie zuvor; ferner bezeichne $D_x u$ irgendeine erste partielle Ableitung u_{x_j}. Zur Formulierung unserer Ergebnisse benötigen wir die folgenden Größen: Für einen beliebigen Punkt $P\in E_j\times J$ mit den Koordinaten $(x, t)=(x^0, t^0)$ sei $\omega_j(P)$ der Winkel zwischen den Bildern von Γ_j und Γ_{j+1} im Bildpunkt von P bezüglich der Transformation von

$$a_{ik}(x^0, t^0)\, \tilde{u}_{x_i x_k} = 0$$

auf Normalform. Wir setzen dann

$$\omega_j = \max_{P \in E_j \times J} \omega_j(P) .$$

Das zu betrachtende Problem bestehe aus der Gleichung (1.1), also

(3.1) $\quad Lu = f \quad \text{in } \Omega$

und den Bedingungen

(3.2a) $\quad \eta_j u + (1-\eta_j)\, u_\nu = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_j \times J, \quad j = 1, \ldots, m ,$

mit $\eta_j = 0$ oder 1 derart, daß

(3.2b) $\quad \eta_j + \eta_{j+1} > 0, \quad j = 1, \ldots, m ,$

(mit $\eta_{m+1} = \eta_1$) ist, und

(3.3) $\quad u\,|_{t=0} = 0 .$

Schließlich setzen wir noch

$$\beta_j = \beta_j(\eta_j) = \frac{2\omega_j}{\eta_j + \eta_{j+1}}, \quad j = 1, \ldots, m ,$$

sowie

$$\beta = \max_j \beta_j .$$

Dann können wir unser Hauptergebnis folgendermaßen formulieren.

Satz 1. *Es sei u eine beschränkte Lösung des Problems* (3.1)–(3.3) *in $\bar{\Omega}$. Weiterhin sei $a_{ik}, a_j, a, f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, und $\beta < \pi$. Dann gilt*

(3.4) $\quad D_x u \in C^\varkappa(\bar{\Omega})$

mit $0 < \varkappa = \min(1, \pi/\beta - 1 - \varepsilon)$ *und beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$.

Bemerkung. Bekanntlich ist unter den genannten Voraussetzungen $u \in C^0(\bar{\Omega})$; vgl. [9]. Für u als Funktion von t bei konstantem x gilt auch $u \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$. Somit verschärft Satz 1 die erste dieser beiden Regularitätsaussagen bezüglich der x-Abhängigkeit von u bei konstantem t zu

(3.4*) $\quad u \in C^\mu(\bar{\Omega})$

mit $\mu = 1 + \varkappa$ und $\varkappa$ wie zuvor.

Der Beweis des Satzes 1 ergibt sich später aus dem nachstehenden Satz 2.

4. Regularität in speziellen Bereichen

—— CONTINUE HERE

Im folgenden betrachten wir zunächst ein spezielles Problem in einem Zylinderbereich mit Sektorquerschnitt unter zusätzlichen Voraussetzungen. Es seien r, θ Polarkoordinaten, definiert durch $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$. Ist $n > 2$, so setzen wir für $x_3, \ldots, x_n$ abkürzend x' und schreiben dann $x = (r, \theta, x')$. Für festes ω und $\sigma > 0$ führen wir den Bereich

$$B_\sigma = \{(r, \theta, x') \mid r < \sigma,\ 0 < \theta < \omega,\ |x_i| < \sigma \text{ falls } i > 2\}$$

ein. Es bezeichne Π_1 und Π_2 die Stücke der Hyperflächen

$$x_2 = 0$$

bzw.

$$x_2 = x_1 \tan \omega ,$$

die B_σ seitlich beranden. Weiterhin sei

$$N_c = \{x \mid x \in B_\sigma,\ |x| < c\}, \quad (c > 0, \text{ fest}).$$

In $\bar{N}_c \times J$ betrachten wir das Problem bestehend aus der Differentialgleichung

(4.1) $\quad Lu = f \quad \text{in} \quad N_c \times J$

mit L wie in (1.1) und den Bedingungen

(4.2a) $\quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \Pi_1 \times J ,$

(4.2b) $\quad \eta u + (1-\eta)\, u_\nu = 0 \quad \text{auf} \quad \Pi_2 \times J \quad (\eta = 0 \text{ oder } 1)$

(4.3) $\quad u\,|_{t=0} = 0 .$

Unter Benutzung eines Punktes $P : (0, t^0)$ mit beliebigem festen $t^0 \in J$ machen wir dabei die Voraussetzungen

(V1) $\quad a_{ik}, a_j, a, f \in C^\alpha(\bar{N}_c \times \bar{J}) ,$

(V2) $\quad a_{ik}(0, t^0) = \delta_{ik}; \quad i, k = 1, 2 ,$

(V3) $\quad \omega < \frac{1}{2} (\eta + 1)\, \pi .$

Ferner setzen wir

(4.4) $\quad \beta = \beta(\eta) = \dfrac{2\omega}{\eta + 1} .$

Es gilt dann der folgende

Satz 2. *Es sei u eine beschränkte Lösung des Problems* (4.1)–(4.3), *und es seien die Voraussetzungen* (V1)–(V3) *erfüllt. Dann existiert ein positives $c_0 < c$ derart, daß*

(4.5) $\quad D_x u \in C^\varkappa(\bar{N}_{c_0} \times \bar{J})$

gilt; hierbei ist

$$0 < \varkappa = \min\,(1, \pi/\beta - 1 - \varepsilon)$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$.

Um diesen Satz zu beweisen, gewinnen wir zuerst Schranken für u und seine ersten partiellen Ableitungen nach den x_j in dem soeben betrachteten Bereich.

END

5. Schranken für Lösungen und Ableitungen in speziellen Bereichen

Hilfssatz 1. *Es sei u eine beschränkte Lösung des Problems* (4.1)–(4.3), *und es mögen die Voraussetzungen* (V1)–(V3) *erfüllt sein. Dann existiert ein positives $c_1 < c/3$ derart, daß in $\bar{N}_{c_1} \times \bar{J}$ die Abschätzung*

(5.1) $$|u(x, t)| \leqq K r^{\mu}$$

gilt. Hierbei ist

$$1 < \mu = \min (2, \pi/\beta - \varepsilon)$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und β gemäß (4.4).

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß u für $|x| \geqq c_1$ verschwindet (das entspricht der Multiplikation von u mit einer C^3-Funktion, die für $|x| < c_1/2$ gleich 1 und für $|x| \geqq c_1$ gleich 0 ist). $c_1 > 0$ wird hierbei später geeignet gewählt. Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir wählen δ so, daß $\delta < \beta\varepsilon/2$ mit β gemäß (4.4) gilt, und setzen

$$\lambda = \frac{\pi - 2\delta}{\beta} .$$

Dann wird

$$\lambda > \mu = \min \left(2, \frac{\pi}{\beta} - \varepsilon\right).$$

Zusätzlich nehmen wir jetzt an, $\varepsilon (>0)$ sei so klein, daß $\mu > 1$ gilt. Wir führen nun

$$v(x) = -K r^{\mu} \cos \lambda \left(\frac{1}{2}\beta - \theta\right) \quad (0 \leqq \theta \leqq \omega)$$

ein und zeigen, daß $-v$ eine Barrierenfunktion für die Lösung u von (4.1)–(4.3) darstellt. Es ist

$$\Delta v = K (\lambda^2 - \mu^2) r^{\mu - 2} \cos \lambda \left(\frac{1}{2}\beta - \theta\right).$$

Weiterhin wird für $r \to 0$

$$v = O(r^{\mu}), \quad v_{x_j} = O(r^{\mu - 1}) \quad (j = 1, 2) ,$$
$$v_{x_j} = 0 \ (j > 2), \quad v_t = 0 ,$$

sowie

$$(a_{ik} - \delta_{ik}) \, v_{x_i x_k} = o(r^{\mu - 2}) .$$

Nun ist aber

$$\cos \lambda \left(\frac{1}{2}\beta - \theta\right) \geqq \sin \delta \quad \text{für} \quad 0 \leqq \theta \leqq \omega .$$

Für $|x|<c_1$ erhalten wir demnach

$$Lv \geqq K\,[(\lambda^2-\mu^2)\sin\delta-\varepsilon_0]\,r^{\mu-2}$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon_0>0$. Indem wir

$$\varepsilon_0<(\lambda^2-\mu^2)\sin\delta$$

wählen, können wir wegen $\mu\leqq 2$ erreichen, daß in $N_{c_1}\times J$ die Ungleichung

$$Lv(x,t)\geqq f(x,t)$$

gilt, vorausgesetzt, daß wir c_1 hinreichend klein und K hinreichend groß wählen. Weiterhin ist

$$v=-Kr^{\mu}\sin\delta\leqq 0 \quad \text{auf} \quad \Pi_1\times J$$

sowie

$$\eta v+(1-\eta)\,v_{\nu}\leqq 0 \quad \text{auf} \quad \Pi_2\times J$$

und

$$v=0 \quad \text{auf} \quad A=\{x \mid x\in B_{\sigma},\ |x|=c_1\}\times J\,.$$

Wir setzen $w=u-v$. Dann genügt w den Ungleichungen

$$Lw\leqq 0 \quad \text{in} \quad N_{c_1}\times J$$

$$\eta w+(1-\eta)\,w_{\nu}\geqq 0 \quad \text{auf} \quad \Pi_2\times J$$

$$w\geqq 0 \quad \text{auf} \quad \Pi_1\times J \quad \text{und} \quad A\,.$$

Auf Grund des Maximumprinzips (vgl. [24]) folgt nun

$$w\geqq 0 \quad \text{in} \quad \bar N_{c_1}\times \bar J\,,$$

also

$$u\geqq -Kr^{\mu}\cos\lambda\left(\frac{1}{2}\beta-\theta\right)\geqq -Kr^{\mu}\,.$$

Entsprechend beweist man den anderen Teil der Ungleichung (5.1). Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Unter Benutzung dieses Hilfssatzes gewinnen wir jetzt eine ähnliche Abschätzung für die ersten partiellen Ableitungen von u nach den x_j:

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 gilt in* $\bar N_{c_0}\times J$ *mit* $c_0=\frac{1}{2}c_1$

(5.2) $$|D_x u|\leqq Mr^{\varkappa}\,;$$

hierbei ist $\varkappa=\mu-1$.

Beweis. In N_{c_0} betrachten wir die Teilbereiche

$$R_s=\{x \mid x\in\bar N_{c_0},\ 2^{-s-2}c_0\leqq r\leqq 2^{-s-1}c_0,\ |x_i|\leqq 2^{-s}c_0 \text{ für } i>2\}\,,$$

$s=-1,0,1,\ldots$, sowie

$$\hat R_s=R_{s-1}\cup R_s\cup R_{s+1}, \quad (s=0,1,\ldots)\,.$$

Es sei $\Lambda_s = \partial \bar{R}_s \cap (\Pi_1 \cup \Pi_2)$; vgl. Abschnitt 4. Die Transformation

$$y = 2^s x \quad [y = (y_1, \ldots, y_n)] \tag{5.3}$$

bildet R_s, $\bar{R}_s$ bzw. Λ_s auf R_0, $\bar{R}_0$ bzw. Λ_0 ab. In $\bar{R}_0 \times J$ erfüllt $\hat{u}(y, t) = u(2^{-s} y, t)$ eine parabolische Gleichung der Form

$$\hat{a}_{ik} \hat{u}_{ik} + 2^{-s} \hat{a}_j \hat{u}_j + 2^{-2s} \hat{a} \hat{u} - 2^{-2s} \hat{u}_t = 2^{-2s} \hat{f} .$$

$\hat{\Pi}_j$ sei das Bild von Π_j, $j = 1, 2$, bezüglich (5.3). Auf $\hat{\Pi}_1$ ist $\hat{u} = 0$ und auf $\hat{\Pi}_2$ gilt

$$\eta \hat{u} + (1 - \eta) \hat{u}_\nu = 0 .$$

Eine SCHAUDER-Abschätzung (vgl. [9]) ergibt

$$\|\hat{u}\|_{2+\alpha}^{R_0 \times J} \leqq M_1 \left[\|\hat{u}\|_0^{\bar{R}_0 \times J} + 2^{-2s} \|\hat{f}\|_\alpha^{\bar{R}_0 \times J}\right] .$$

Wegen Hilfssatz 1 folgt hieraus

$$\|\hat{u}\|_{2+\alpha}^{R_0 \times J} \leqq M_2 2^{-s\mu} .$$

Es bezeichne $D_y \hat{u}$ irgendeine erste partielle Ableitung $\hat{u}_{y_j}$. Dann gilt $D_y \hat{u} = 2^{-s} D_x u$. In $R_0 \times J$ ist

$$|D_y \hat{u}| \leqq \|\hat{u}\|_{2+\alpha}^{R_0 \times J}$$

So wird in $R_s \times J$

$$|D_x u| \leqq M_3 2^{-s(\mu - 1)} \leqq M r^\varkappa$$

mit $\varkappa = \mu - 1$. Der Hilfssatz 2 ist damit bewiesen.

6. Beweis der Sätze 1 und 2

Beweis des Satzes 2. In $\bar{N}_c \times \bar{J}$ betrachten wir für ein beliebiges festes $t \in \bar{J}$ zwei beliebige Punkte

$$P_j = (r_j \cos \theta_j, r_j \sin \theta_j, x^{(j)\prime}, t) \quad (j = 1, 2)$$

und müssen, um den Satz zu beweisen, zeigen, daß es für diese Punkte ein $H > 0$ derart gibt, daß

$$\frac{|D_x u(P_1) - D_x u(P_2)|}{d(P_1, P_2)^\varkappa} \leqq H \tag{6.1}$$

gilt. Ohne Beschränkung sei $0 \leqq r_2 \leqq r_1 \leqq c_0$. Ist $r_2 \leqq \frac{1}{2} r_1$, so gilt $d(P_1, P_2) \geqq \frac{1}{2} r_1$, und (6.1) folgt unmittelbar aus (5.2). Es sei jetzt $r_2 > \frac{1}{2} r_1$. Zuerst bemerken wir, daß sich mit einer der im Beweis von Hilfssatz 1 ähnlichen Methode für $\bar{S}_{P_1} \times \bar{J}$ mit

$$S_{P_1} = \left\{ x \mid x \in N_{c_0}, \ \frac{1}{2} r_1 \leqq r \leqq r_1, \ |x_i - x_i^{(1)}| < \frac{1}{2} r_1 \text{ für } i > 2 \right\}$$

die Aussage

$$(6.2)\qquad D_x u \in C^{\varkappa}(\bar{S}_{P_1} \times \bar{J})$$

beweisen läßt. Im Falle $r_2 > \frac{1}{2} r_1$ betrachten wir noch zusätzlich den Punkt

$$P_3 = (r_1 \cos\theta_2, r_1 \sin\theta_2, x^{(2)'}, t)$$

mit demselben festen t wie zuvor. Ist jetzt $d(P_1, P_3) \leqq \frac{1}{2} r_1$, so liegt P_2 in $\bar{S}_{P_1} \times \bar{J}$, wo (6.2) gilt. Ist dagegen $d(P_1, P_3) > \frac{1}{2} r_1$, so wird $d(P_1, P_2) \geqq d(P_1, P_3)$, also $d(P_1, P_2) > d(P_2, P_3)$, und man erhält ebenfalls (6.1). Satz 2 ist damit bewiesen.

Beweis des Satzes 1. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P: $(x^0, t^0) \in \in E_j \times \bar{J}$. Wegen (3.2) können wir ohne Beschränkung die Randbedingungen in der Form

$$\eta_j u + (1-\eta_j)\, u_\nu = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_j \times J$$
$$u = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_{j+1} \times J$$

mit $\eta_j = 0$ oder 1 annehmen. Um die Aussage des Satzes zu erhalten, genügt es zu zeigen, daß im Durchschnitt N einer Umgebung von P in $\boldsymbol{R}^{n+1}$ mit Ω

$$(6.3)\qquad D_x u \in C^{\varkappa_j}(N)$$

gilt; hierbei ist

$$\varkappa_j = \min\,(1, \pi/\beta_j - 1 - \varepsilon)\,,$$
$$\beta_j = 2\omega_j/(\eta_j + 1)\,.$$

Γ_j und Γ_{j+1} seien lokal in einer Umgebung von P durch Funktionen h_1 bzw. h_2 der Klasse $C^{2+\alpha}$ in der Form

$$x_1 = h_1(x_2, x') \quad \text{bzw.} \quad x_2 = h_2(x_1, x')$$

dargestellt. Die Transformation

$$y_1 = x_1 - h_1(x_2, x')$$
$$y_2 = x_2 - h_2(x_1, x')$$
$$y_i = x_i - x_i^0 \quad (i > 2)$$

bildet dann P auf den Nullpunkt des y-Koordinatensystems und Γ_j bzw. Γ_{j+1} in $y_1 = 0$ bzw. $y_2 = 0$ ab. Die Gleichung (1.1) geht dabei in eine andere parabolische Gleichung über. Für letztere existiert eine lineare Transformation, die $y_1 = 0$ bzw. $y_2 = 0$ auf

$$z_2 = z_1 \tan\omega \quad \text{bzw.} \quad z_2 = 0$$

abbildet und eine Differentialgleichung liefert, deren Hauptteil im Nullpunkt gleich dem der LAPLACE-Gleichung ist. Dann ist also $\omega = \omega(P)$ der Winkel zwischen den genannten Bildern, und die transformierten Randbedingungen für $u^*(z, t) =$

$=u(x, t)$ lauten

$$\eta u^* + (1-\eta)\, u^*_\nu = 0 \quad \text{bzw.} \quad u^* = 0 \,.$$

u^* genügt also allen Bedingungen des Satzes 2. Da die Transformation $x \mapsto z$ von der Klasse $C^{2+\alpha}$ ist und ihre JACOBI-Determinante in P nicht verschwindet, folgt damit Satz 1 aus Satz 2. Dies war zu zeigen.

Abschließend sei noch erwähnt, daß der vorliegende Satz 1 als Sonderfall ein Ergebnis in [2] umfaßt, das das DIRICHLET-Problem für den Fall eines nicht von t abhängigen Hauptteiles betrifft. Wesentlich ist weiterhin die Bemerkung, daß man mit den vorliegenden Methoden auch das Verhalten der zweiten partiellen Ableitungen $D_x^2 u$ nach den x_j kennzeichnen kann: Für $0 < \tau < 2-\mu$ gilt

$$r^\tau D_x^2 u \in C^\gamma(\bar{\Omega}), \quad \gamma = \min\,(\alpha, \tau+\mu-2) < 1 \,. \tag{6.3}$$

Dies erhält man, indem man zuerst in $\bar{N}_{c_0} \times \bar{J}$ (vgl. Hilfssatz 2)

$$|D_x^2 u| \leqq M_0 r^{\mu-2}$$

zeigt und dann ähnlich wie im Beweis des Satzes 2 fortfährt; auf die zugehörigen Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

Literatur

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS and L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. Comm. Pure Appl. Math. **12**, 623–727 (1959).

[2] A. AZZAM and E. KREYSZIG, On parabolic equations in n space variables and their solutions in regions with edges. Im Druck.

[3] I. BABUŠKA, Finite element method for domains with corners. Computing **6**, 264–273 (1970).

[4] S. BERGMAN, Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations. Berlin 1969.

[5] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, Conduction of Heat in Solids. Oxford 1959.

[6] S. C. EISENSTAT, On the rate of convergence of the Bergman-Vekua method for the numerical solution of elliptic boundary value problems. SIAM J. Numer. Anal. **11**, 654–680 (1974).

[7] G. E. FORSYTHE and W. R. WASOW, Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations. New York 1960.

[8] A. FRIEDMAN, Boundary estimates for second order parabolic equations and their applications. J. Math. Mech. **7**, 771–791 (1958).

[9] –, Partial Differential Equations of Parabolic Type. Engelwood Cliffs, N.J., 1964.

[10] В. В. ФУФАЕВ, К задаче Дирихле для областей с углами. ДАН СССР **131**, 37–39 (1960).

[11] S. GERSCHGORIN, Fehlerabschätzungen für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Z. Angew. Math. Mech. **10**, 373–382 (1930).

[12] P. GRISVARD, Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain. In: Numerical Solutions of Partial Differential Equations, III. Proc. Third Sympos. Num. Sol. Part. Diff. Equ., SYNSPADE. New York 1976.

[13] P. D. HILTON and J. W. HUTCHINSON, Plastic intensity factors for cracked plates. Engng. Fract. Mech. **3**, 435–451 (1971).

[14] Z. ITÔ, A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type. Duke Math. J. **24**, 299–312 (1957).

[15] Л. И. КАМИНИН и В. Н. МАСЛЕННИКОВА, Граничные оценки решения третьей краевой задачи для параболического уравнения. ДАН СССР **153**, 526–529 (1963).

[16] В. А. КОНДРАТЬЕВ, Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды моск. матем. об-ва **16**, 209–292 (1967).

[17] P. Laasonen, On the degree of convergence of discrete approximations for the solutions of the Dirichlet problem. Ann. Acad. Fenn. Ser. A. I. no. 246, 1957.
[18] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников и Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва 1957.
[19] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва 1964.
[20] J. Lehner and C. Mark, An application of the method of the acceleration potential. Quarterly Appl. Math. 1, 250–261 (1943–44).
[21] H. Lewy, Developments at the confluence of analytic boundary conditions. Univ. of Cal. Publ. Math. 1, 247–280 (1950).
[22] В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский, Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе. Math. Nachr. 81, 25–82 (1978).
[23] С. М. Никольский, Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. Мат. сб. 43, 127–144 (1957).
[24] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations. Englewood Cliffs, N. J., 1967.
[25] G. Strang and G. J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, N. J., 1973.
[26] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва 1948.
[27] Е. А. Волков, Метод составных сеток для конечных и бесконечных областей с кусочногладкой границей. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова 96, 117–148 (1968).
[28] K.-O. Widman, Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. Math. Scand. 21, 17–37 (1967).
[29] N. M. Wigley, On a method to subtract off a singularity at a corner for the Dirichlet or Neumann problem. Math. Comput. 23, 395–401 (1969).
[30] –, Mixed boundary value problems in plane domains with corners. Math. Z. 115, 33–52 (1970).
[31] M. L. Williams, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech. 526–528 (1952); in Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. 74 (1952).
[32] Н. В. Житарашу, Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрываными коэффициентами, ДАН СССР 169, 511–514 (1966).

Dept. of Mathematics
University of Windsor
Windsor, Ontario, Canada

German Exam

Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen

Von Wolfgang Gaschütz in Kiel

(Eingegangen am 19. 5. 1954)

Die von W. Burnside[1]) angestrebte Charakterisierung der im Titel genannten Gruppen ist inzwischen in Arbeiten von K. Shoda[2]), L. Weisner[3]), M. Tazawa[4]) und R. Kochendörffer[5]) durchgeführt worden. Die Kriterien dieser Autoren beziehen sich zum Teil auf nicht leicht übersehbare Eigenschaften der endlichen Gruppen. Wir glauben, daß die folgende neue Kennzeichnung und ihr kurzer Beweis eine abermalige Behandlung dieses Gegenstandes rechtfertigen.

Eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ kann dann und nur dann durch eine irreduzible lineare Substitutionsgruppe mit Koeffizienten aus einem algebraisch-abgeschlossenen Körper A *der Charakteristik* 0 *treu dargestellt werden, wenn der Sockel* $\mathfrak{S}$[6]) *von* $\mathfrak{G}$, *oder, damit gleichwertig, wenn die abelsche Komponente* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{S}$ *durch eine Klasse unter* $\mathfrak{G}$ *konjugierter Elemente erzeugt wird.*

Beweis. $h_{\mathfrak{X}}$ sei allgemein die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente einer Gruppe $\mathfrak{X}$. Nach den klassischen Ergebnissen der Darstellungstheorie ist $h_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}$ die Anzahl der irreduziblen Darstellungsklassen (hier und im folgenden ist stets A als Darstellungskörper gemeint) von $\mathfrak{G}$, bei denen der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ durch die Einsmatrix dargestellt wird. Sind $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ die minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist daher nach dem bekannten Exklusionsprinzip

$$t_{\mathfrak{G}} = h_{\mathfrak{G}} - \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_k} h_{\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_{\nu_1} \cdots \mathfrak{M}_{\nu_k}} \tag{1}$$

die Anzahl der Klassen irreduzibler und treuer Darstellungen von $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ seien Teilräume eines Vektorraumes über einem Körper K, die in bezug auf $+$ und $\cap$ einen Verband mit dem Gesetz

$$(\mathfrak{A}_l + \mathfrak{A}_m) \cap \mathfrak{A}_n = (\mathfrak{A}_l \cap \mathfrak{A}_n) + (\mathfrak{A}_m \cap \mathfrak{A}_n) \tag{2}$$

1) W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2. Ed. Cambridge 1911, Note F, S. 476.

2) K. Shoda, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2**, 51—72; 203—209 (1930).

3) L. Weisner, Amer. J. Math. **61**, 709—712 (1939).

4) M. Tazawa, Tohoku math. J. **47**, 87—93 (1940).

5) R. Kochendörfer, Diese Nachr. **1**, 25—39 (1948).

6) $\mathfrak{S}$ ist das Produkt der minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Es besteht die eindeutige bestimmte Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{A}$ abelsch und $\mathfrak{H}$ ohne abelschen Normalteiler (halbeinfach) ist.

bilden. Ist $r(\mathfrak{A})$ der K-Rang von $\mathfrak{A}$, so gilt dann

$$r(\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_t) = \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_k} r(\mathfrak{A}_{\nu_1} \frown \cdots \frown \mathfrak{A}_{\nu_k}), \tag{3}$$

wie durch vollständige Induktion aus

$$r(\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{t-1} + \mathfrak{A}_t) = r(\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{t-1}) + r(\mathfrak{A}_t) - r\big((\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{t-1}) \frown \mathfrak{A}_t\big)$$

und

$$(\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{t-1}) \frown \mathfrak{A}_t = (\mathfrak{A}_1 \frown \mathfrak{A}_t) + \cdots + (\mathfrak{A}_{t-1} \frown \mathfrak{A}_t)$$

leicht folgt.

$\mathsf{A}(\mathfrak{G})$ sei der Gruppenring von $\mathfrak{G}$ über A mit den Elementen $\sum \alpha_G G$, $\alpha_G \in \mathsf{A}$, $G \in \mathfrak{G}$. Aus dem Satz von H. MASCHKE und den Struktursätzen über halbeinfache Algebren folgt[7]): Jedes zweiseitige Ideal von $\mathsf{A}(\mathfrak{G})$ ist direkte Summe der in ihm enthaltenen einfachen zweiseitigen von $\mathsf{A}(\mathfrak{G})$. Der Verband der zweiseitigen Ideale von $\mathsf{A}(\mathfrak{G})$ erfüllt daher (2) für $\mathsf{K} = \mathsf{A}$. Ist allgemein $\bar{\mathfrak{a}}$ das Zentrum des Ideals $\mathfrak{a}$, so ist ferner die Abbildung $\mathfrak{a} \to \bar{\mathfrak{a}}$ ein Verbandsisomorphismus des Verbandes der zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a}$ von $\mathsf{A}(\mathfrak{G})$ auf den Verband der Ideale von $\overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G})}$.

Zu jedem Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ bilden die Elemente $\sum \alpha_G G$ mit $\alpha_G = \alpha_H$ für $G \equiv H \bmod \mathfrak{N}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathsf{A}(\mathfrak{G})$. Es ist isomorph zum Gruppenring von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ über A und kann mit $\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ bezeichnet werden. Für die Durchschnittsbildung gilt offenbar

$$\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \frown \mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{L}) = \mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\mathfrak{L}). \tag{4}$$

Ferner ist

$$r\big(\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\big) = \mathfrak{G}:\mathfrak{N}, \quad r\big(\overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})}\big) = h_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}.\text{[8])} \tag{5}$$

Auf Grund des erwähnten Verbandsisomorphismus ist

$$\overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1)} + \cdots + \overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_t)} \neq \overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G})},$$

d. h.

$$r\big(\overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1)} + \cdots + \overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_t)}\big) \neq r\big(\overline{\mathsf{A}(\mathfrak{G})}\big)$$

oder, nach (1), (3), (4) und (5),

$$t_G \neq 0$$

gleichbedeutend mit

$$\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1) + \cdots + \mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_t) \neq \mathsf{A}(\mathfrak{G}),$$

d. h.

$$r\big(\mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1) + \cdots + \mathsf{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_t)\big) \neq r\big(\mathsf{A}(\mathfrak{G})\big)$$

oder nach (3), (4) und (5)

$$\mathfrak{G}:1 - \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_k} \mathfrak{G}:\mathfrak{M}_{\nu_1} \cdots \mathfrak{M}_{\nu_k} \neq 0$$

$$\mathfrak{S}:1 - \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_k} \mathfrak{S}:\mathfrak{M}_{\nu_1} \cdots \mathfrak{M}_{\nu_k} \neq 0 \tag{6}$$

---

[7]) Siehe z. B. B. L. v. D. WAERDEN, Moderne Algebra II, 2. Aufl., Berlin 1940, § 120.

[8]) Siehe z. B. l. c. [7]) § 127.

Der Verband der Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}$ ist vollreduzibel und gestattet daher einen Verbandsantiautomorphismus, bei dem „Index unter $\mathfrak{S}$" und „Ordnung" korrespondieren. Sind daher $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_t$ die in $\mathfrak{S}$ maximalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist also (6) mit

$$\mathfrak{S}:1 - \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_k} \mathfrak{L}_{\nu_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{L}_{\nu_k} : 1 \neq 0$$

gleichbedeutend. Die linke Seite dieser Ungleichung zählt nach dem schon oben angewendeten Exklusionsprinzip die Elemente von $\mathfrak{S}$ ab, die in keinem in $\mathfrak{S}$ echt enthaltenen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ liegen. Das sind genau die Elemente S, die mit ihren Konjugierten[9]) $\mathfrak{S}$ erzeugen.

Ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{H}$ die Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in abelsche und halbeinfache Komponente $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{H}$, $S = S_a S_h$, $S_a \in \mathfrak{A}$, $S_h \in \mathfrak{H}$, so erzeugt offenbar S_a mit seinen Konjugierten $\mathfrak{A}$. Ist umgekehrt S_a ein Element, das mit seinen Konjugierten $\mathfrak{A}$ erzeugt,

(7) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1 \times \cdots \times \mathfrak{F}_q$$

die direkte Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$, F_ν ein (stets existierendes) Element, das mit seinen Konjugierten $\mathfrak{F}_\nu$ erzeugt, so verifiziert man leicht auf Grund der bekanntlich[10]) eindeutigen Darstellung (7), daß $S = S_a F_1 \ldots F_q$ mit seinen Konjugierten $\mathfrak{S}$ erzeugt.

---

[9]) Im folgenden stets unter $\mathfrak{G}$ verstanden.

[10]) R. Remark, J. reine angew. Math. **162**, 1—16 (1930).