Algebra

German
Fall 2014

Über einen Satz von E. Cartan

Von Günter Harder aus Hamburg

Einleitung

In den letzten Jahren hat man erkannt, daß sich viele Resultate über algebraische Gruppen, die über einem nicht algebraisch abgeschlossenem Grundkörper definiert sind, in der Sprache der Galoiskohomologie formulieren lassen (siehe [5], Serre [8], [9]). Darunter fällt auch der folgende Satz von E. Cartan.

Satz 1. *G sei eine über dem Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen definierte, halbeinfache lineare algebraische Gruppe. G sei die kompakte Form (siehe [7], Exp. 11, 13, ferner § 1 dieser Arbeit). Dann sind die maximalen, über $\boldsymbol{R}$ definierten Tori von G über $\boldsymbol{R}$ konjugiert.*

Dieser Satz 1 ist eine einfache Folgerung aus dem

Satz 2. *Ist G wie in Satz 1 und T ein über $\boldsymbol{R}$ definierter maximaler Torus von G, so ist die Abbildung $H^1(\boldsymbol{R}, T) \to H^1(\boldsymbol{R}, G)$ injektiv.*[1]

Der Satz 1 ist der Satz 3.3.3 dieser Arbeit. Er und Satz 2 sind im wesentlichen Folgerungen aus Satz 3.3.1, der als Hauptresultat dieser Arbeit anzusehen ist. Die Beweise von Satz 1, die mir bekannt sind, benutzen topologische oder differentialgeometrische Hilfsmittel (siehe [7]). Der hier gegebene Beweis benutzt Methoden der Kohomologietheorie. Da man in neuerer Zeit versucht, algebraische Gruppen über beliebigem Grundkörper mit kohomologischen Methoden zu behandeln, dürfte es von Interesse sein, daß diese Hilfsmittel für den Grundkörper $\boldsymbol{R}$ die klassischen Sätze liefern.

§ 1.

1.1. L sei eine über $\boldsymbol{R}$ definierte algebraische Gruppe, $L_{\boldsymbol{R}}$ sei die Gruppe der über $\boldsymbol{R}$ rationalen Punkte, oder wie wir in Zukunft sagen wollen, die Gruppe der reellen Punkte. (Wir wollen für „über $\boldsymbol{R}$ rational" lieber „reell" sagen.) Die Gruppe der über $\boldsymbol{C}$ rationalen Punkte $L_{\boldsymbol{C}}$ bezeichnen wir wie üblich einfach mit L.

---

[1] Im Sinne der Kategorie der punktierten Mengen.

Die Galoisgruppe $\Gamma(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R})$ operiert auf L, wir wollen die Wirkung des nichttrivialen Automorphismus durch einen Querstrich andeuten, also $x \to \bar{x}$. Dann ist $L_{\boldsymbol{R}} = \{x \in L \mid x = \bar{x}\}$.

$L_{\boldsymbol{R}}$ und L besitzen die Struktur einer reellen bzw. komplexen Lieschen Gruppe. Wir wollen die über $\boldsymbol{R}$ definierte Gruppe L eine kompakte Form nennen, wenn die Gruppe $L_{\boldsymbol{R}}$ kompakt ist.

1.2. G sei über $\boldsymbol{R}$ definierte halbeinfache algebraische Matrizengruppe, oder wie wir kurz sagen wollen, G sei eine halbeinfache $\boldsymbol{R}$-Gruppe. Wir wollen außerdem voraussetzen, daß G im Sinne der algebraischen Geometrie zusammenhängend ist. Mit $\pi : \tilde{G} \to G$ bezeichnen wir die universelle Überlagerung von G, mit $\bar{G}$ die zugehörige adjungierte Gruppe, d.h. $\bar{G} = G/Z(G)$, wobei $Z(G)$ das Zentrum von G ist. $\tilde{G}$ und $\bar{G}$ sind wieder halbeinfache $\boldsymbol{R}$-Gruppen.

1.3. $T \subset G$ sei ein maximaler über $\boldsymbol{R}$ definierter Torus von G, oder wie wir kurz sagen wollen ein maximaler R-Torus. (Siehe Chevalley [4], Exp. 4, Ono [6]; die hier benutzten Eigenschaften von Tori findet man bei Ono, sie sind hier eigentlich alle trivial.) Mit $\tilde{T}$ und $\bar{T}$ bezeichnen wir die entsprechenden Tori in $\tilde{G}$ und $\bar{G}$.

Mit G_m bezeichnen wir die multiplikative Gruppe $\boldsymbol{C}^*$ aufgefaßt als algebraische Gruppe, d.h. G_m hat den allgemeinen Punkt $\left(x, \frac{1}{x}\right)$. $X(T) = \operatorname{Hom}(T, G_m)$ sei der Charaktermodul des Torus (siehe Ono [6]). Dann ist $X(\bar{T})$ das von den Wurzeln und $X(\tilde{T})$ das von den Gewichten erzeugte Gitter (Chevalley [4], Exp. 16). Auf dem Modul $X(T)$ operiert die Galoisgruppe $\Gamma = \Gamma(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R})$, die Wirkung des nichttrivialen Automorphismus der Galoisgruppe sei wieder durch einen Querstrich angedeutet: $\gamma \to \bar{\gamma}$.

Satz 1.3.1. *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig*

(i) $T_{\boldsymbol{R}}$ *ist kompakt,*

(ii) $T_{\boldsymbol{R}}$ *ist direktes Produkt von Einheitskreisen:*
$T_{\boldsymbol{R}} = \Pi\{z \mid |z| = 1,\ z \in \boldsymbol{C}^*\}$,

(iii) Für alle $\gamma \in X(T)$ gilt $\bar{\gamma} = -\gamma$.

(iv) $T_{\boldsymbol{R}}$ *ist eine zusammenhängende Liesche Gruppe.*

Der Beweis dieses Satzes ist wirklich trivial und soll hier übergangen werden. Ist eine der Bedingungen des Satzes erfüllt, so heiße T kompakt.

1.4. Mit $N(T)$ bezeichnen wir den Normalisator von T in G. Die Gruppe $N(T)/T = W$ ist die Weylgruppe von G. Die Weylgruppe operiert auf

$X(T)$ und die Elemente der Weylgruppe sind durch ihre Wirkung auf $X(T)$ bestimmt. Die Gruppe Γ operiert auf W und es gilt $\overline{w\gamma} = \overline{w}\overline{\gamma}$ für alle $w \in W$ und $\gamma \in X(T)$. Ist also $T_{\mathbf{R}}$ kompakt, so folgt sehr leicht $w = \overline{w}$ für alle $w \in W$.

§ 2

2.1. In diesem Paragraphen sollen einige Hilfssätze bewiesen werden.

Hilfssatz 1. *T sei ein kompakter über $\mathbf{R}$ definierter Torus. W sei eine endliche Gruppe, die auf T stetig operiert. Dann ist für alle $n \in Z$*

$$H^n(W, T_{\mathbf{R}}) \approx H^n(W, T).$$

Beweis. $T_{\mathbf{R}}$ ist die abgeschlossene Hülle der Punkte endlicher Ordnung in T, also ist $T_{\mathbf{R}}$ unter den Operationen von W invariant. Die Gruppe $T/T_{\mathbf{R}}$ ist isomorph zu $(\mathbf{R}^+)^d$ mit $d = \dim T$. Daraus folgt $H^n(W, T/T_{\mathbf{R}}) = 0$, aus der exakten Kohomologiesequenz folgt die Behauptung.

2.2. B sei eine abelsche Gruppe, W sei eine endliche Gruppe, die auf B operiert. Die Operationen bezeichnen wir mit $b \to b^w$. A sei eine Erweiterung von B durch W, dazu gehört eine exakte Sequenz

$$1 \to B \to A \xrightarrow{\pi} W \to 1.$$

Es sei $a_w \in A$ ein Vertretersystem, d.h. es ist $\pi(a_w) = w$. Wir bilden davon den Rand $b_{w,w'} = a_w \cdot a_{w'}^w \cdot a_{ww'}^{-1}$, $b_{w,w'}$ ist ein 2-Kozyklus von W mit Werten in B. Dieser 2-Kozyklus werde nun festgehalten, wir fragen nach allen Vertretersystemen, die diesen vorgegebenen 2-Kozyklus als Rand besitzen. Setzen wir $a'_w = b_w \cdot a_w$ mit $b_w \in B$, so sehen wir, daß a'_w genau dann den Rand $b_{w,w'}$ besitzt, wenn $w \to b_w$ ein 1-Kozyklus ist, d.h. es gilt $b_w \cdot b_{w'}^w \cdot b_{w,w'}^{-1} = 1$.

Wir nennen zwei Vertretersysteme a'_w und a''_w äquivalent, wenn gilt $a'_w = b a''_w b^{-1} = b \cdot b^{-w} \cdot a''_w$.

Wir erhalten

Hilfssatz 2. *Die Klassen inäquivalenter Vertretersysteme, die einen vorgegebenen Rand $b_{w,w'}$ besitzen, entsprechen eineindeutig den Elementen von $H^1(W, B)$.*

2.3.1. k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, G sei eine über k definierte halbeinfache Gruppe. T sei ein maximaler k-Torus, $\alpha \in X(T)$ sei eine Wurzel. Dieser Wurzel α ordnen wir nach Chevalley eine einparametrige Untergruppe $P_\alpha \subset G$ zu, die durch folgende Eigenschaften definiert ist.

1. Es gibt einen Isomorphismus $\tau : G_a \to P_\alpha$; G_a ist die additive Gruppe k^+ mit der natürlichen Struktur als algebraische Gruppe.

2. Es ist für $t \in T$ $t^{-1} P_\alpha t = P_\alpha$ und es gilt genauer $t^{-1}\tau(x)t = \tau(\alpha(t) \cdot x)$. (Siehe CHEVALLEY [4], Exp. 13.)

Die Gruppe H_α sei die von P_α und $P_{-\alpha}$ erzeugte Untergruppe, H_α ist eine einfache Gruppe vom Typ A_1. Nach [4] Exp. 23, Prop. 2 wissen wir, daß H_α einfach zusammenhängend ist, wenn G einfach zusammenhängend ist.

2.3.2. Die Weylgruppe W wird durch die Spiegelungen an den Wurzeln α erzeugt, d.h. sie wird durch die Elemente $S_\alpha \in W$ mit

$$S_\alpha : \gamma \to \gamma - 2\frac{\langle\gamma, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \cdot \alpha$$

erzeugt ([4], Exp. 14). $S_\alpha \in N(T)/T$ ist per definitionem eine Nebenklasse von T und es ist klar, daß wir einen Repräsentanten $\bar{S}_\alpha \in N(T)$ mit $\bar{S}_\alpha \in H_\alpha$ finden können.

2.3.3. Ist α eine Wurzel, so setzen wir

$$T'_\alpha = \{t \in T \mid \alpha(t) = 1\}.$$

Wir betrachten nun den Zentralisator von S_α (s. 2.3.2) in T. Man überzeugt sich leicht davon, daß dieser Zentralisator von T'_α und von dem Zentralisator von $\bar{S}_\alpha$ in $T \cap H_\alpha$ erzeugt wird. Dieser letztere Zentralisator ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 2, die in dem Fall, daß H_α einfach zusammenhängend ist, folglich gleich dem Zentrum von H_α ist. Also ist sie in diesem Fall schon in T'_α enthalten. Ist nun $G = \tilde{G}$ einfach zusammenhängend, so ist auch H_α einfach zusammenhängend. Also folgt, daß in diesem Fall der Zentralisator der Weylgruppe W in T gleich dem Durchschnitt $\bigcap_\alpha T'_\alpha$ ist, das ist aber das Zentrum von G. Also gilt

Hilfssatz 3. *Ist G einfach zusammenhängend, $T \subset G$ ein maximaler Torus, so ist der Zentralisator von $N(T)$ in G gleich dem Zentrum von G.*

Beweis. Das folgt aus den obigen Überlegungen, wenn man noch bedenkt, daß der Zentralisator von T der Torus T selber ist ([4], Exp. 12, Th. 2).

§ 3

3.1. G sei eine halbeinfache $\boldsymbol{R}$-Gruppe, ferner sei von jetzt ab, stets mit vorausgesetzt, daß G zusammenhängend ist. $T \subset G$ sei ein maximaler Torus, T sei kompakt (s. 1.3). Nach 1.4 wissen wir, daß die Galoisgruppe auf $W = N(T)/T$ trivial operiert, aus der exakten

Analysis

eliminiert, läßt sich jeder durch meromorphe Funktionen vermittelten Abbildung in natürlicher Weise eine holomorphe Abbildung zuordnen.

Für holomorphe Abbildungen habe ich nun Bedingungen der gewünschten Art in meiner Dissertation angegeben. Es wurde insbesondere bewiesen (vgl. hierzu auch [13, 14] und [20]):

Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung eines kompakten komplexen Raumes X in einen beliebigen komplexen Raum Y, so ist $\tau(X)$ eine analytische Menge in Y.

Aus diesem Satze sowie aus einigen Zusätzen ergeben sich die Sätze von W. THIMM und W. L. CHOW als einfache Folgerungen. In § 1 sind der Vollständigkeit halber noch einmal kurz die grundlegenden Begriffe und Sätze zusammengestellt, mit deren Hilfe in § 2 der Satz von THIMM und in § 3 der Satz von CHOW abgeleitet werden. § 4 enthält Bemerkungen zum Satz von CHOW; insbesondere wird eine Beziehung zu der von K. STEIN [19, 21] begründeten Theorie der analytischen Projektionen und Zerlegungen hergestellt. Durch Einführung des Begriffes der Faserzahl gelingt es, Schranken für die Grade der Polynome, die jeweils die algebraische Abhängigkeit zum Ausdruck bringen, anzugeben. Auf diese Weise ergibt sich auch ein Beweis für den Hauptsatz I in [23] in seiner scharfen Form, der sich somit ebenfalls als Folgerung aus dem allgemeinen Abbildungssatz erweist [6]).

§ 1. Vorbereitungen zum Beweise der Sätze von THIMM und CHOW

1. Wir stellen in diesem Paragraphen einige Begriffe und Sätze zusammen, die wir zum Beweise der Sätze von THIMM und CHOW benötigen. Komplexe Räume, analytische Mengen und holomorphe Abbildungen seien wie in [4] bzw. [14] definiert [7]); ein komplexer Raum braucht also weder zusammenhängend noch endlich-dimensional zu sein. Es werden nur holomorphe Abbildungen τ eines komplexen Raumes X in eine komplexe Mannigfaltigkeit Y betrachtet, da dieser Fall in den hier interessierenden Anwendungen stets vorliegen wird. Ist $\tau: X \to Y$ eine solche Abbildung, so ist für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\tau^{-1}(\tau(x))$ eine analytische Menge in X, die den Punkt x enthält. Wir nennen $\tau^{-1}(\tau(x))$ die *Faser der Abbildung* τ über dem Punkt $y = \tau(x) \in Y$.

Den Begriff des Ranges einer holomorphen Abbildung definieren wir nach bekanntem Vorbild: in der Umgebung eines jeden uniformisierbaren Punktes $x \in X$ kann eine holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ durch holomorphe Funktionen

$$w_1 = f_1(z_1, \ldots, z_a), \ldots, w_b = f_b(z_1, \ldots, z_a)$$

gegeben werden, wenn $z_1, \ldots, z_a$ bzw. $w_1, \ldots, w_b$ Ortsuniformisierende in x bzw. $\tau(x)$ sind.

Unter dem Rang $\varrho_\tau(x)$ der Abbildung τ im Punkte $x \in X$ werde nun der Rang der Funktionalmatrix $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_b)}{\partial(z_1, \ldots, z_a)}$ im Punkte $x \in X$ verstanden. Be-

[6]) Die vorliegende Arbeit ist der sehr stark abgeänderte und erweiterte 3. Teil der Dissertation des Verf., die 1954 der Math.-Nat. Fakultät der Universität Münster vorgelegen hat. Vgl. hierzu auch die in den Colloquiumsberichten der Universität Straßburg erschienenen Arbeit [20] von Herrn Prof. Dr. K. STEIN.

[7]) Zum Begriff des komplexen Raumes vgl. auch [7] sowie [12] und [13]; eine Einführung in die Theorie der analytischen Mengen findet sich in [15], [13] sowie [4].

zeichnet $\dot{X}$ die in X enthaltene komplexe Mannigfaltigkeit, so ist offenbar die Funktion $\varrho_\tau(x)$ in $\dot{X}$ wohldefiniert. Für jede zusammenhängende Komponente X_i von X existiert

$$r_\tau(X_i) = \sup_{x \in X_i \cap \dot{X}} \varrho_\tau(x);$$

wir nennen $r_\tau(X_i)$ den *Rang von τ auf X_i*. Es gilt $r_\tau(X_i) \leqq d(X_i)$, wenn $d(X_i)$ die komplexe Dimension von X_i bezeichnet. Die Zahl

$$r(\tau) = \sup_{x \in \dot{X}} \varrho_\tau(x)$$

heißt der *Rang von τ schlechthin*. Es gilt $r(\tau) \leqq d(X)$; ist also X endlichdimensional, so ist $r(\tau)$ sicher endlich[8]).

Aus der Definition des Ranges folgert man leicht (vgl. hierzu auch die schärferen Aussagen in [13, 14]):

Satz 1: Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung und ist X zusammenhängend, so ist die Menge aller Punkte $x \in \dot{X}$, in denen gilt: $\varrho_\tau(x) = r(\tau)$, eine offene und dichte Menge in X.

In [14] (vgl. auch [13, 20]) wurde der folgende Satz bewiesen, den wir in den §§ 2.3 entscheidend benutzen werden:

Satz 2: Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung und ist X kompakt, so ist $\tau(X)$ eine $r(\tau)$-dimensionale analytische Menge in Y.

2. Sind $f_1, \ldots, f_k$ holomorphe Funktionen in einem komplexen Raum X, so wird durch die Gleichungen

$$z_1 = f_1(x), \ldots, z_k = f_k(x), \; x \in X,$$

eine holomorphe Abbildung $\tau: X \to C^k$ von X in den Raum C^k der k komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_k$ definiert, die wir die zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörende holomorphe Abbildung nennen. Sind die Funktionen $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, meromorph in X und hat keine Funktion $f_\varkappa$ eine Unbestimmtheitsstelle in X, so kann in analoger Weise eine zu den $f_1, \ldots, f_k$ gehörende holomorphe Abbildung $\tau: X \to \overline{C}^k$ von X in den k-dimensionalen Osgoodschen Raum $\overline{C}^k$ (darunter wird das direkte Produkt von k Riemannschen Zahlenkugeln verstanden) definiert werden. Hat jedoch eine der Funktionen $f_\varkappa$ eine Unbestimmtheitsstelle, so kann man den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ nicht mehr ohne weiteres eine holomorphe Abbildung zuordnen, da jetzt gewissen Punkten $x \in X$ höherdimensionale Mengen im $\overline{C}^k$ entsprechen. Es gibt in diesem Falle lediglich noch eine natürliche holomorphe Abbildung $\tau: X - N \to \overline{C}^k$, dabei bezeichnet N diejenige analytische Menge in X, die aus all den Punkten besteht, in denen wenigstens eine der Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ eine Unbestimmtheitsstelle hat.

Es gibt eine recht umfangreiche Literatur, in der das Verhalten einer durch in X meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gegebenen holomorphen Abbildung $\tau: X - N \to \overline{C}^k$ in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle $x \in N$ untersucht

[8]) In [13, 14] wird eine Definition des Ranges in einem Punkt gegeben, die für viele Betrachtungen bequemer ist als die hier gegebene Definition. Es läßt sich jedoch zeigen, daß in beiden Fällen die Begriffe des Ranges schlechthin äquivalent sind (vgl. [14]).

wird. Hierher gehören z. B. Arbeiten von BLUMENTHAL [2] und OSGOOD ([9], p. 603); vor allem aber die Untersuchungen von W. THIMM ([22, 23, 24] sowie die dort weiter zitierten Arbeiten). Gerade durch ein intensives Studium der Unbestimmtheitsstellen war es W. THIMM möglich, seine Abhängigkeitssätze zu beweisen.

In [12] (vgl. auch [14]) wurde gezeigt, daß im Hinblick auf Fragen, wie sie hier interessieren, ein näheres Eingehen auf die Natur der Unbestimmtheitsstellen nicht unbedingt nötig ist. Es gilt nämlich:

Satz 3: Sind in einem zusammenhängenden komplexen Raum X meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ mit der Unbestimmtheitsmenge N gegeben, so gibt es einen komplexen Raum $'X$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *$'X$ ist eine eigentliche Modifikation von X, d. h. es gibt eine eigentliche*[9]*, holomorphe Abbildung π von $'X$ auf X, die außerhalb einer in $'X$ analytischen Menge $'N \neq {'X}$ umkehrbar ist. Es gilt: $N = \pi('N)$.*

b) *Der durch die Gleichung $\pi^*(f(x)) = {'f}('x) = f \circ \pi('x)$ definierte Homomorphismus π^* des Körpers $K(X)$ der in X meromorphen Funktionen in den Körper $K('X)$ der in $'X$ meromorphen Funktionen ist ein Isomorphismus von $K(X)$ auf $K('X)$. Die Funktionen $'f_\varkappa = f_\varkappa \circ \pi$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, haben keine Unbestimmtheitsstellen in $'X$.*

c) *Zwischen den zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ und $'f_1, \ldots, {'f_k}$ gehörenden holomorphen Abbildungen $\tau : X - N \to \overline{C}^k$ und $'\tau : {'X} \to \overline{C}^k$ bestehen folgende Beziehungen:*

$$'\tau('x) = \tau \circ \pi('x) \text{ für } 'x \in {'X} - {'N};\ r('\tau) = r(\tau),\ \tau(X - N) \subset {'\tau}('X) \subset \overline{\tau(X - N)}.$$

Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes findet sich in [14], hier sei nur bemerkt, daß $'X$ im wesentlichen der im Produktraum $X \times \overline{C}^k$ gelegene Graph der Abbildung τ ist[10]).

Satz 3 sagt — grob gesprochen — aus, daß man die Unbestimmtheitsstellen von endlich vielen in einem komplexen Raum X meromorphen Funktionen simultan eliminieren kann, wenn man X in den Unbestimmtheitsstellen geringfügig abändert (modifiziert). Der Raum $'X$ spielt im folgenden eine besondere Rolle; wir nennen ihn einen zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörenden komplexen Raum und entsprechend $'\tau$ eine zugehörige Abbildung. Man kann im übrigen durch eine naheliegende weitere Forderung erreichen, daß $'X$ bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

§ 2. Algebraische und analytische Abhängigkeit meromorpher Funktionen. Beweis des Satzes von THIMM

1. Es sei X ein komplexer Raum, $f_1, \ldots, f_k$ seien meromorphe Funktionen in X. Mit P sei die Vereinigung der Polstellenmengen der Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ bezeichnet; P ist eine analytische Menge in X. Wir definieren (vgl. auch [20]):

---

[9]) Eine stetige Abbildung heißt bekanntlich *eigentlich*, wenn die Urbilder kompakter Mengen stets kompakt sind.

[10]) Zu Satz 3 vgl. auch [12], § 7; zur allgemeinen Theorie der Modifikationen siehe etwa [7].

Topology

DOLD, A.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 25—35 (1956)

Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$

Von
ALBRECHT DOLD

Einleitung. In [8] hat R. THOM eine Äquivalenzrelation zwischen kompakten (nicht notwendig zusammenhängenden) differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt, die sich, grob gesprochen, folgendermaßen beschreiben läßt: Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind genau dann äquivalent („cobordantes"), wenn sie zusammen den Rand einer berandeten differenzierbaren Mannigfaltigkeit bilden. (Für eine präzise Definition und für das Folgende vgl. [8], Chap. IV.)

Die Äquivalenzklassen können in natürlicher Weise addiert und multipliziert werden und bilden einen Ring bezüglich dieser Verknüpfungen. Man erhält verschiedene Äquivalenzklassenmengen und verschiedene Ringe Ω oder $\mathfrak{N}$, je nachdem ob man orientierte oder nicht-orientierte Mannigfaltigkeiten betrachtet. Die topologische Dimension der Mannigfaltigkeiten definiert eine Graduierung der Ringe Ω und $\mathfrak{N}$: $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega^k$, $\mathfrak{N} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{N}^k$.

Die Struktur von $\mathfrak{N}$ ist verhältnismäßig einfach: $\mathfrak{N}$ ist ein Polynomring in abzählbar vielen Variablen x_i über dem Primkörper der Charakteristik 2; x_i wird repräsentiert durch eine geeignet gewählte i-dimensionale Mannigfaltigkeit $P(i)$; i durchläuft alle natürlichen Zahlen, die nicht von der Form $2^l - 1$ sind.

In [8] hat THOM für alle geraden i und für $i = 5$ Mannigfaltigkeiten $P(i)$ angegeben, die die (nicht eindeutig festgelegten) Variablen x_i repräsentieren. In der vorliegenden Arbeit geschieht dies für die verbleibenden Fälle, d.h. für alle ungeraden $i \neq 2^l - 1$, $i > 5$ (s. Satz 3).

Die angegebenen Mannigfaltigkeiten $P(i)$, i ungerade $\neq 2^l - 1$, sind orientierbar. Sie definieren daher Elemente von Ω (und zwar von der Ordnung 2; s. H), die bei der natürlichen Abbildung $\Omega \to \mathfrak{N}$ in x_i übergehen. Dies liefert Aussagen über die nur teilweise bekannte Struktur (s. [8], S. 81) von Ω; z.B. ergibt sich: Ω^k ist nicht trivial für $k \geq 8$, d.h. in jeder Dimension $k \geq 8$ gibt es nicht-berandende orientierbare kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten (s. H). —

Wir definieren und untersuchen nun zunächst eine Klasse von Mannigfaltigkeiten $\{P(m, n)\}$, unter denen die in der vorstehenden Einleitung genannten Mannigfaltigkeiten $P(i)$ vorkommen.

A. Definition und erste Eigenschaften von $P(m, n)$. S^m, $m \geq 0$, sei die Einheitssphäre des $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_m$. $PC(n)$, $n \geq 0$, sei der komplexe projektive Raum von n komplexen Dimensionen; wir beschreiben ihn durch homogene Koordinaten $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Der topologische Raum $P(m,n)$[1]) entsteht aus dem topologischen Produkt $S^m \times PC(n)$ durch die Identifikation $(x, z) = (-x, \bar{z})$. Dabei bezeichnet $-x$ den Diametralpunkt von $x \in S^m$ und $\bar{z}$ ist derjenige Punkt aus $PC(n)$, dessen Koordinaten konjugiert komplex zu denen von $z \in PC(n)$ sind.

Bezüglich der Identifikationsabbildung $\Phi : S^m \times PC(n) \to P(m,n)$ ist $S^m \times PC(n)$ zweiblättrige Überlagerung von $P(m,n)$; die nicht-triviale Deckbewegung φ ist durch

$$\varphi(x,z) = (-x, \bar{z}), \quad x \in S^m, \ z \in PC(n) \tag{1}$$

gegeben.

$S^m \times PC(n)$ kann — in der üblichen Weise — als (reell) analytische Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden; φ ist dann eine analytische Abbildung. Vermöge der Abbildung Φ wird daher auch $P(m,n)$ zur (reell) analytischen Mannigfaltigkeit, und Φ selbst ist analytisch.

Die Abbildung $(x, z) \to x$ von $S^m \times PC(n)$ auf S^m geht bei der Identifikation Φ in eine Abbildung $p: P(m,n) \to PR(m)$ ($= m$-dimensionaler reeller projektiver Raum) über. p ist Projektion eines (analytischen) Faserraumes $\{P(m,n), p, PR(m), PC(n), Z_2\}$[2]) (s. [3], § 2); das nicht-triviale Element der Strukturgruppe Z_2 ist die Selbstabbildung $z \to \bar{z}$ von $PC(n)$.

B. Zellenzerlegung und Homologie mod 2 von $P(m,n)$. Wir geben bekannte Zellenzerlegungen von S^m und $PC(n)$ an und gewinnen mit ihrer Hilfe eine Zellenzerlegung von $P(m,n)$.

S^m: Die durch $x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_m = 0$, $x_i > 0$ ($x_i < 0$) definierte Punktmenge von S^m ist eine offene i-Zelle C_i^+ (C_i^-). Die Zellen $C_i^\pm$, $i = 0, 1, \ldots, m$, bilden eine Zellenzerlegung von S^m (CW-Komplex im Sinne von J. H. C. Whitehead [10]) und genügen bei geeigneter Orientierung den Berandungsrelationen $\partial C_i^+ = C_{i-1}^+ + C_{i-1}^-$, $\partial C_i^- = -(C_{i-1}^+ + C_{i-1}^-)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Im folgenden seien die Zellen $C_i^\pm$ ein für alle Male mit einer festen Orientierung dieser Art ausgestattet.

Die Diametralpunktvertauschung $x \to -x$, $x \in S^m$, ist eine Selbstabbildung der m-Sphäre, die die Orientierung erhält oder umkehrt, je nachdem ob m ungerade oder gerade ist. Bezüglich der Zellenzerlegung $\{C_i^\pm\}$ ist sie eine Zellenabbildung und führt $C_i^\pm$ in $(-1)^{i+1} C_i^\mp$ über.

$PC(n)$: Die durch $z_j = 1$, $z_{j+1} = z_{j+2} = \cdots = z_n = 0$ definierte Punktmenge von $PC(n)$ ist eine offene $2j$-Zelle D_j. Die Zellen D_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, die wir uns mit einer festen Orientierung versehen denken, bilden eine Zellenzerlegung (CW-Komplex) von $PC(n)$ und genügen den Berandungsrelationen $\partial D_j = 0$.

[1]) $P(1,2)$ ist die von Wu in [12], Nr. 3c betrachtete Mannigfaltigkeit.

[2]) Dies sieht man leicht ein — wir werden es im folgenden nicht benutzen — wenn man beachtet, daß Φ jede offene Menge von der Form $U \times PC(n)$ topologisch abbildet, wo U eine offene Menge aus S^m ist, die keine Diametralpunkte enthält.

Die Selbstabbildungen $z \to \bar{z}$ von $PC(n)$ erhält die Orientierung oder kehrt sie um, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist. [Dies erkennt man leicht, wenn man inhomogene Koordinaten $z_1 z_0^{-1}, z_2 z_0^{-1}, \ldots, z_n z_0^{-1}$ benutzt; die Funktionaldeterminante in einem „eigentlichen" Punkt $z_0 \neq 0$ ist $(-1)^n$.] Bezüglich der Zellenzerlegung $\{D_j\}$ ist sie eine Zellenabbildung und führt D_j in $(-1)^j D_j$ über.

$S^m \times PC(n)$: Die Produktzellen $C_i^{\pm} \times D_j$ bilden eine Zellenzerlegung von $S^m \times PC(n)$ und genügen den Berandungsrelationen

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial(C_i^{\pm} \times D_j) = \pm(C_{i-1}^{+} \times D_j + C_{i-1}^{-} \times D_j) \\ \partial(C_0 \times D_j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Die Selbstabbildung φ [s. (1)] von $S^m \times PC(n)$ ist eine Zellenabbildung und es gilt

$$(3) \qquad \varphi(C_i^{\pm} \times D_j) = (-1)^{i+j+1}(C_i^{\mp} \times D_j).$$

$P(m, n)$: Die Abbildung Φ: $S^m \times PC(n) \to P(m, n)$ bildet die Zellen $C_i^{\pm} \times D_j$ topologisch ab (vgl. Fußnote 2). Die Zellen $\Phi(C_i^{+} \times D_j)$ — wir bezeichnen sie mit (C_i, D_j) — bilden daher und wegen (3) eine Zellenzerlegung von $P(m, n)$, und Φ ist eine Zellenabbildung. Aus (2) erhält man durch Anwenden von Φ wegen (3) die Berandungsrelationen

$$(4) \qquad \begin{cases} \partial(C_i, D_j) = \left(1 + (-1)^{i+j}\right)(C_{i-1}, D_j) \\ \partial(C_0, D_j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Es bezeichne $H(m, n) = \sum_{\nu} H_\nu(m, n)$ die direkte Summe der Homologiegruppen mod 2, $H^*(m, n) = \sum_{\nu} H^\nu(m, n)$ den Kohomologiering mod 2 von $P(m, n)$. Nach (4) sind alle Zellen (C_i, D_j) Zyklen mod 2. Ihre Homologieklassen $[C_i, D_j]$ bilden daher eine Basis von $H(m, n)$.

$H^*(m, n)$ ist seiner additiven Struktur nach nichts anderes als der Modul der Homomorphismen von $H(m, n)$ in den Primkörper K der Charakteristik 2; $\langle k, h \rangle$ bezeichne den Wert der Kohomologieklasse k auf der Homologieklasse h. Die durch

$$(5) \qquad \langle (c^i, d^j), [C_\mu, D_\nu] \rangle = \delta_\mu^i \cdot \delta_\nu^j, \quad i, \mu = 0, 1, \ldots, m, \quad j, \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

definierten Kohomologieklassen (c^i, d^j) bilden eine Basis der additiven Struktur von $H^*(m, n)$.

$P(m, n)$ hat also mod 2 dieselben Homologiegruppen wie $PR(m) \times PC(n)$. In D werden wir sehen, daß auch die Kohomologieringe mod 2 dieser beiden Räume übereinstimmen.

C. *$P(m, n)$ ist genau dann orientierbar, wenn $m \neq n\,(2)$ oder $m = 0$ ist.* Denn genau dann ist nach (4) die einzige höchstdimensionale Zelle (C_m, D_n) ein Zykel.

D. Der Kohomologiering mod 2 von $P(m, n)$. Für $m' \leq m$ und $n' \leq n$ identifizieren wir $S^{m'} \times PC(n')$ mit der analytischen Untermannigfaltigkeit