German
Spring 16

hnis

$p^{n+1} \nmid a$.

ganzen rationellen Zahlen a und b.

über dem kommutativen Körper K.

A^* die zur linearen Abbildung A

annte Teilraum.

Algebra

Kapitel I

Grundlagen

In Kapitel I entwickeln wir zunächst in knapper, aber vollständiger Form die Grundbegriffe der Gruppentheorie (§ 1—4). Diese Paragraphen enthalten zahlreiche elementare Sätze und Hilfssätze, welche später immer wieder herangezogen werden; dies trifft ganz besonders zu für den Produktsatz 2.12a), die Dedekind-Identität 2.12c), Hilfssatz 2.13 und die Sätze 4.5, 4.8 und 4.9. Die Darstellungen einer Gruppe als Permutationsgruppe (§ 6) liefern als wichtigste Folgerung die grundlegenden Sylowschen Sätze (§ 7). Einige elementare Auflösbarkeitskriterien werden aus den Sylowschen Sätzen in § 8 hergeleitet werden.

Die weiteren Paragraphen von Kapitel I sind vornehmlich den konstruktiven Verfahren der Theorie der endlichen Gruppen gewidmet: Direkte Produkte (§ 9 und 12), Erweiterungstheorie (§ 14), Kranzprodukte (§ 15). Neben das direkte Produkt stellen wir gleich zwei daraus abgeleitete Konstruktionen, nämlich das direkte Produkt mit vereinigten zentralen Untergruppen (9.10) und das direkte Produkt mit vereinigten Faktorgruppen (9.11). Auf die wichtige Frage, unter welchen Umständen sich eine vorgegebene Gruppe aus einfacheren Gruppen mittels eines der angegebenen Verfahren aufbauen läßt, gehen wir mehrfach ein. So gewinnen wir in § 13 als Spezialfall der Untersuchung von Moduln über Hauptidealringen den Fundamentalsatz für endlich erzeugbare, abelsche Gruppen. Von grundlegender Wichtigkeit für die ganze Theorie der endlichen Gruppen ist der Satz von Zassenhaus (§ 18), welcher gewisse Erweiterungen als semidirekte Produkte nachweist. Die Kohomologietheorie behandeln wir in § 16 nur in dem Umfang, welcher für die späteren Untersuchungen der Automorphismen von p-Gruppen (III, § 19) und die Behandlung des Schurschen Multiplikators (V, § 23) nützlich erscheint.

An mehreren Stellen war es zweckmäßig oder sogar notwendig, die Beschränkung auf endliche Gruppen aufzuheben. Die in den Paragraphen 9—13 entwickelte Theorie der direkten Produkte, Kompositionsreihen und direkten Zerlegungen von Gruppen mit Operatoren und von Moduln ist so angelegt, daß viele der in der Darstellungstheorie (Kapitel V) benötigten Sätze über Moduln als Spezialfälle darin enthalten sind. Bei der Beschreibung von Gruppen durch definierende Relationen in § 19 schließlich war ein Eingehen auf freie Gruppen völlig unvermeidlich.

Analysis

Dann ist die Summe

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = F(z)$$

eine im Gebiet D reguläre Funktion, deren Ableitungen durch gliedweise Differentiation jener Summe entstehen, so daß also für jedes positive ganze k die Gleichung

$$F^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \cdots + f_n^{(k)}(z) + \cdots$$

im Gebiet D gilt.

Wir betrachten zum Beweise einen beliebigen Punkt a des Gebietes D. Es sei K ein Kreis mit dem Mittelpunkt a, längs dessen Peripherie die Reihe (3) gleichmäßig konvergiert. Da nach § 9 (S. 62) in einer Umgebung $D(a)$ des Punktes a, welche den Kreis K in sich enthält,

$$f_n(z) = \mathfrak{P}_n(z|a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(a)\,(z-a)^k$$

gilt, so ist im Inneren des Kreises K die Summe

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

der Reihe (3) dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_k\,(z-a)^k, \tag{4}$$

wobei

$$c_k = f_1^{(k)}(a) + f_2^{(k)}(a) + \cdots + f_n^{(k)}(a) + \cdots$$

ist. Folglich ist $F(z)$ *regulär* in dem Gebiet D.

Vergleichen wir ferner die Taylorsche Entwicklung von $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(a)\,(z-a)^k,$$

mit der Entwicklung (4), so folgt

$$F^{(k)}(a) = f_1^{(k)}(a) + f_2^{(k)}(a) + \cdots + f_n^{(k)}(a) + \cdots.$$

Da hier nun a jeder beliebige Punkt des Gebietes D sein kann, so ist unser Satz in allen Stücken bewiesen.

Diesen Satz werden wir in der Folge als den *Weierstraßschen Summensatz* bezeichnen. Als Beispiel seiner Anwendung wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Ist $\mathfrak{P}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *eine Potenzreihe und* $f(z)$ *in dem Gebiet D regulär, ist ferner für jeden Punkt a in dem Gebiet D der zugehörige Punkt* $f(a)$ *in dem Konvergenzkreise von* $\mathfrak{P}(z)$ *gelegen, so ist auch* $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \{f(z)\}^k$ *in dem Gebiet D regulär, und die letzte Gleichung bleibt richtig, wenn man sie gliedweise beliebig oft nach z differenziert.*

Es sei a ein Punkt des Gebietes D; dann liegt nach Voraussetzung der Punkt $f(a)$ im Inneren des Konvergenzkreises C der Reihe $\mathfrak{P}(z)$. Wir beschreiben einen mit C konzentrischen Kreis C', der kleiner ist als der Kreis C, aber den Punkt $f(a)$ in seinem Inneren enthält. Ferner beschreiben wir in dem Gebiet D einen Kreis K um a mit einem so kleinen Radius, daß für jeden Punkt z auf der Peripherie dieses Kreises K der Punkt $f(z)$ ins Innere des Kreises C' fällt. Dies ist wegen der Stetigkeit von $f(z)$ möglich.

Da nun für die Punkte im Inneren des Kreises C' die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ gleichmäßig konvergiert, so ist

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \{f(z)\}^k$$

für die Punkte z der Peripherie des Kreises K *gleichmäßig* konvergent. Der Weierstraßsche Summensatz findet also hier Anwendung und zeigt die Richtigkeit unseres Satzes.

Ein spezieller Fall hiervon ist der folgende Satz:

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *beständig konvergiert und* $f(z)$ *im Gebiet* D *regulär ist, so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \{f(z)\}^k$ *in dem Gebiet* D *regulär und beliebig oft gliedweise differenzierbar.*

Viertes Kapitel.

Untersuchung einiger spezieller analytischer Funktionen.

§ 1. Die Exponentialfunktion.

Wir wollen untersuchen, ob es eine analytische Funktion $f(z)$ gibt, welche die Eigenschaft besitzt, ihrem Differentialquotienten $f'(z)$ gleich zu sein.

Es sei

$$\mathfrak{P}(z/a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^n}{n!}$$

ein Funktionselement von $f(z)$; dann muß also die abgeleitete Reihe

$$\mathfrak{P}'(z/a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{(z-a)^n}{n!}$$

mit $\mathfrak{P}(z/a)$ zusammenfallen. Hierfür ist erforderlich und hinreichend, daß

$$c_{n+1} = c_n, \quad \text{d. i.} \quad c_1 = c_0, \quad c_2 = c_1, \quad c_3 = c_2 \text{ usf.}$$

ist, oder also, daß sämtliche Koeffizienten c_n untereinander gleich sind.

Geometry

Bemerkung. Die beiden Sätze (3, 2) und (3, 3) sind auch noch im Falle verschwindender Komponentendeterminanten gültig. Beide Sätze sind dann aber natürlich trivial.

Aus Tensoren und Vektoren können wir wiederum Tensoren, Vektoren, gegebenenfalls Skalare bilden. So ist $\sum\limits_{\mu,\lambda=I}^{II} v^{\lambda\mu}\, v_{\lambda\mu}$ oder $\sum\limits_{\lambda,\mu=I}^{II} v_{\lambda\mu}\, v^{\lambda} v^{\mu}$ ein Skalar, $\sum\limits_{\lambda=I}^{II} v^{\lambda\mu}\, v_{\lambda}$ oder $\sum\limits_{\mu=I}^{II} v^{\lambda\mu}\, v_{\mu}$ oder $\sum\limits_{\lambda=I}^{II} v_{\lambda\mu}\, v^{\lambda}$ ein Vektor usw. Den überaus leichten Beweis überlassen wir dem Leser.

Sehr leicht können wir einen symmetrischen Tensor z.B. $v_{\lambda\mu}$ in der Tangentialebene deuten. Ist v^{ν} ein laufender Punkt in der Tangentialebene, so bedeutet die Gleichung $\sum\limits_{\lambda,\mu=I}^{II} v_{\lambda\mu}\, v^{\lambda} v^{\mu} = 1$ einen Kegelschnitt in der Tangentialebene. Ist analog w_{λ} eine Gerade in der Tangentialebene, so ist $\sum\limits_{\lambda,\mu=1}^{II} v^{\lambda\mu}\, w_{\lambda}\, w_{\mu} = 1$ wiederum die Gleichung eines Kegelschnittes (in Geradenkoordinaten). Die erste Gleichung besitzt die Koeffizienten $v_{I\,I}$, $v_{I\,II} = v_{II\,I}$, $v_{II\,II}$, die zweite $v^{I\,I}$, $v^{I\,II} = v^{II\,I}$, $v^{II\,II}$. — Von Tensoren höherer Stufe werden wir erst später sprechen, bis wir ihrer bedürfen.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einer formalen Vereinbarung, welche die Symbolik wesentlich vereinfacht. In allen Formeln, worin ein Summenzeichen aufgetreten war, hatten wir über (ausgezeichnete) Indizes zu summieren, von denen stets einer oben, der andere unten stand (vgl. z.B. (3, 2a), wo über α, β summiert worden ist). Künftighin werden wir das Summenzeichen in solchen Fällen nicht mehr anschreiben und vereinbaren, daß wir stets über Indizes, welche in einem Produkt zweimal auftreten, einmal oben, das anderemal unten, die Summation ausführen. So werden wir z.B. $v_{\lambda\mu}\, v^{\lambda}$ an Stelle von $\sum\limits_{\lambda=I}^{II} v_{\lambda\mu}\, v^{\lambda}$ schreiben, oder v^{λ}_{λ} an Stelle von $\sum\limits_{\lambda=I}^{II} v^{\lambda}_{\lambda}$. Die erwähnten Gleichungen (3, 2a) werden wir auf Grund dieser Verabredung in der Gestalt

$$ {}^*v_{\lambda\mu} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial {}^*\xi^{\lambda}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial {}^*\xi^{\mu}} v_{\alpha\beta} $$

schreiben
bedeutet
ist von A.
aus dem
bücher d
daher not
vertraut w

§

Wir wollen
$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ de

bezeichne
Satz (4, 1). *D*
metrischer
tensor

(4, 1) $a_{\lambda\mu} =$

mit den K

E

(4, 2) *F*

G

deren Det
positiv au

(4, 3)

Beweis. Aus d

${}^*a_{\lambda\mu} =$

und diese
rianter Te
aus den
weisen, ü
tenden A
genden G

schreiben usw. Diese Konvention, von rein formalem Gepräge, bedeutet einen Beitrag zur Übersichtlichkeit der Formeln. Sie ist von A. Einstein eingeführt worden, und wir werden sie auch aus dem Grund verwenden, daß sie fast in alle modernen Lehrbücher der Differentialgeometrie Eingang gefunden hat und daher notwendig dem Studierenden der Differentialgeometrie vertraut werden soll.

§ 4. Der metrische Fundamentaltensor.

Wir wollen zuerst den sgn. symmetrischen metrischen Tensor $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ definieren, dessen Komponenten wir auch mit

$$E \equiv a_{I\,I},\quad F \equiv a_{I\,II} = a_{II\,I},\quad G \equiv a_{II\,II}$$

bezeichnen werden.

Satz (4, 1). *Das innere Produkt der Raumvektoren $\mathfrak{r}_\lambda$, $\mathfrak{r}_\mu$ ist ein symmetrischer kovarianter Tensor $a_{\lambda\mu}$, der sgn. metrische Fundamentaltensor*

$$(4, 1)\qquad a_{\lambda\mu} = \mathfrak{r}_\lambda \,.\, \mathfrak{r}_\mu = \mathfrak{r}_\mu \,.\, \mathfrak{r}_\lambda = a_{\mu\lambda} = \frac{\partial x}{\partial \xi^\lambda}\frac{\partial x}{\partial \xi^\mu} + \frac{\partial y}{\partial \xi^\lambda}\frac{\partial y}{\partial \xi^\mu} + \frac{\partial z}{\partial \xi^\lambda}\frac{\partial z}{\partial \xi^\mu}$$

mit den Komponenten

$$E \equiv a_{I\,I} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$(4, 2)\qquad F \equiv a_{I\,II} = a_{II\,I} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G \equiv a_{II\,II} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

deren Determinante A^2 in einem allgemeinen Flächenpunkt immer positiv ausfällt

$$(4, 3)\qquad A^2 \equiv \begin{vmatrix} a_{I\,I}, & a_{I\,II} \\ a_{II\,I}, & a_{II\,II} \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0.$$

Beweis. Aus den Gleichungen (2, 3) folgt

$$^*a_{\lambda\mu} = {}^*\mathfrak{r}_\lambda \,.\, {}^*\mathfrak{r}_\mu = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial {}^*\xi^\lambda}\,\frac{\partial \xi^\beta}{\partial {}^*\xi^\mu}\,\mathfrak{r}_\alpha \,.\, \mathfrak{r}_\beta = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial {}^*\xi^\lambda}\,\frac{\partial \xi^\beta}{\partial {}^*\xi^\mu}\,a_{\alpha\beta}$$

und diese Gleichungen zeigen, daß $a_{\lambda\mu}$ ein quadratischer kovarianter Tensor ist. Die Symmetrie dieses Tensors folgt geradewegs aus den Gleichungen (4, 1). Um die Beziehungen (4, 3) zu beweisen, übernehmen wir die Gleichungen (2, 9) aus dem einleitenden Abschnitt (S. 94) zur Verwendung für die jetzt vorliegenden Gleichungen (4, 2). Dann erhalten wir