Math. Z. 249, 541–543 (2005) **Mathematische Zeitschrift**

DOI: 10.1007/s00209-004-0716-2

Algebra

# Eine Bemerkung zu einem Satz von E. Becker und D. Gondard

**J.-L. Colliot-Thélène**

C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, Frankreich (e-mail: colliot@math.u-psud.fr)

*Eberhard Becker zum 60. Geburtstag gewidmet*

Eingegangen: 1. Dezember 2004; in revidierter Fassung: 13. April 2004 /
Online publiziert: 21 Oktober 2004 – 

In ihrer Arbeit [B-G] geben E. Becker und D. Gondard eine algebraische Formel für die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Raumes der reellen Punkte einer reellen, glatten, projektiven Varietät. In der Arbeit [C-T] hatte ich eine andere algebraische Formel für diese Anzahl gegeben. In dieser Note zeige ich, wie man von einer Formel zur anderen gehen kann – ohne von diesen beiden Sätzen Gebrauch zu machen.

Becker und Gondard benutzen den Raum aller $\mathbf{R}$-Stellen eines Körpers, sowie einen Satz von Ludwig Bröcker diesen Raum betreffend. Dieser Raum wird hier nicht benutzt. Dafür wird ein Reinheitssatz von Markus Rost angewandt. Sowohl in [B-G] als auch in dieser Note wird Beckers Charakterisierung der Summen $n$-ter Potenzen in einem Körper benutzt.

Zitieren wir zuerst die erwähnten Sätze.

Sei $X/\mathbf{R}$ eine glatte, projektive, absolut irreduzible Varietät über dem Körper $\mathbf{R}$ der (üblichen) reellen Zahlen. Sei $X(\mathbf{R})$ die Menge der reellen Punkte von $X$. Nehmen wir an, daß diese Menge nicht leer ist. Sei $S$ die (endliche) Menge der Zusammenhangskomponenten von $X(\mathbf{R})$ und $s$ die Ordnung von $S$.

Sei $K = \mathbf{R}(X)$ der Funktionenkörper von $X$. Sei $D(X) \subset K^*$ die multiplikative Untergruppe aller Funktionen in $\mathbf{R}(X)^*$, die sich in jedem Punkt $P$ von $X$ (im schematischen Sinne) als Produkt einer Einheit im lokalen Ring $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten von Elementen von $K$ schreiben lassen.

**Satz 1.** ([CT]) *Der Quotient* $D(X)/(K^* \cap (\sum K^2))$ *ist isomorph zur Gruppe* $(\mathbf{Z}/2)^S$.

**Satz 2.** (Becker und Gondard, [B-G]) *Der Quotient*

$$(K^{*2} \cap (\sum K^4))/(K^* \cap (\sum K^2)^2)$$

*ist endlich, von der Ordnung* $2^{s-1}$.

Daß $K^* \cap (\sum K^2)^2$ eine Untergruppe von $K^{*2} \cap (\sum K^4)$ ist, folgt aus dem Satz :

**Satz 3.** (Becker, [B]) *Sei $K$ ein Körper. Sei $n$ eine gerade Zahl. Ein Element $f \in K^*$ ist eine Summe von $n$-ten Potenzen in $K$ dann und nur dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

*(a) Das Element $f$ ist eine Summe von Quadraten in $K$.*
*(b) Für jede Krullbewertung $v$ von $K$ mit formalreellem Restklassenkörper ist $v(f)$ durch $n$ teilbar.*

Die Quadratabbildung $x \mapsto x^2$ induziert eine surjektive Abbildung

$$K^*/K^* \cap \left(\sum K^2\right) \to K^{*2}/\left(K^{*2} \cap \left(\sum K^2\right)^2\right)$$

mit Kern $\{\pm 1\}$.

Nach dem Satz von Becker hat man

$$\left(\sum K^2\right)^2 \subset \sum K^4,$$

also

$$K^* \cap \left(\sum K^2\right)^2 \subset K^{*2} \cap \sum K^4.$$

**Hauptsatz.** *Ein Element $f \in K^*$ liegt in der Gruppe $D(X)$ dann und nur dann, wenn das Element $f^2$ in $K^{*2} \cap \sum K^4$ liegt.*

Aus diesem Satz folgt sofort, daß die Abbildung $x \mapsto x^2$ eine exakte Folge induziert

$$1 \to \{\pm 1\} \to D(X)/\left(K^* \cap \sum K^2\right) \to \left(K^{*2} \cap \sum K^4\right)/\left(K^* \cap \sum K^2\right)^2 \to 1,$$

die die Verbindung zwischen Satz 1 und Satz 2 genau erklärt.

*Beweis des Hauptsatzes.* Sei $f \in D(X)$. Sei $v$ eine Krullbewertung von $K$ mit formalreellem Restklassenkörper. Sei $A$ der Bewertungsring. Da $X/\mathbf{R}$ projektiv ist, besitzt $A$ ein Zentrum auf $X$, das heißt, es gibt einen (nicht unbedingt abgeschlossenen) Punkt $M \in X$, so daß die natürliche Abbildung $\operatorname{Spec} \mathbf{R}(X) \to X$ einen Homomorphismus von lokalen Ringen $O_{X,M} \to A$ induziert. Da $f$ in $D(X)$ liegt, kann man $f = u.g$ schreiben, mit $u \in O^*_{X,M}$ und $g \in \sum K^2$, also $f = u.g$ mit $u \in A^*$ und $g \in K^* \cap \sum K^2$. Da der Restklassenkörper von $A$ formalreell ist, folgt $2 \mid v(f)$. Aber dann hat man $f^2 \in K^{*2}$ und $4 \mid v(f^2)$. Dies gilt für eine beliebige Krullbewertung $v$ von $K$ mit formallreellem Restklassenkörper. Aus dem Satz von Becker folgt $f^2 \in \sum K^4$.

Sei umgekehrt $f \in K^*$ gegeben, mit der Eigenschaft $f^2 \in K^{*2} \cap \sum K^4$.

Sei $v$ eine Krullbewertung von $K$ mit formalreellem Restklassenkörper. Dann hat man $4 \mid v(f^2)$, also $2 \mid v(f)$. Wenn $M \in X$ ein Punkt der Kodimension 1 mit formalreellem Restklassenkörper ist, dann kann man $f$ als Produkt einer Einheit in $O_{X,M}$ und eines Quadrates in $K$ schreiben.

Sei $M \in X$ ein Punkt der Kodimension 1 mit nichtformalreellem Restklassenkörper. Sei $\pi$ ein Erzeuger des maximalen Ideals des diskreten Bewertungsrings $R = O_{X,M}$. In $R$ kann man Elemente $a_i, i = 1, \ldots, m$ und $b$ finden, mit $1 + \sum_i a_i^2 = \pi.b \in R$. Aus dieser Gleichung folgt die Gleichung $(1+\pi)^2 + \sum_i a_i^2 = \pi.b + 2\pi + \pi^2 \in R$. Wenn $b \in R$ keine Einheit ist, dann ist $2 + b + \pi$ eine Einheit. Also kann man $\pi$ als Produkt einer Einheit in $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten in $K$ schreiben. Daraus folgt, daß sich jedes Element in $K^*$ als Produkt einer Einheit in $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten in $K$ schreiben lässt.

Also: wenn $f \in K^*$ die Eigenschaft hat, daß sein Quadrat $f^2$ in $K^{*2} \cap \sum K^4$ liegt, dann kann man $f$ in jedem Punkt der Kodimension 1 als Produkt einer Einheit in $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten in $K$ schreiben.

Nach einem bekannten Satz von A. Pfister ([P]) ist jede Summe von Quadraten in $K = \mathbf{R}(X)$ eine Summe von $2^d$ Quadraten, wobei $d$ die Dimension von $X$ ist.

Jetzt kann man einen allgemeinen Reinheitssatz von Rost [R] in dieser speziellen Situation anwenden: wenn $f \in \mathbf{R}(X)^*$ sich in jedem Punkt $M$ der Kodimension 1 der glatten Varietät $X$ als Produkt einer Einheit in $M$ und einer Summe von $2^d$ Quadraten im Funktionenkörper von $X$ schreiben lässt, dann besitzt $f$ auch eine solche Darstellung in jedem Punkt von $X$. Also gehört $f$ der Gruppe $D(X)$ an.

## References


[B] Becker, E.: Summen $n$-ter Potenzen in Körpern, J. reine angew. Math. (Crelle) **307/308**, 8–30 (1979)

[B-G] Becker, E., Gondard, D.: Notes on the space of real places of a formally real field. In: Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1992), de Gruyter, Berlin, 1995 pp. 21–46

[CT] Colliot-Thélène, J.-L.: Formes multiplicatives et variétés algébriques, Bull. Soc. math. France **106**, 113–151 (1978)

[P] Pfister, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Invent. math. **4**, 229–237 (1967)

[R] Rost, M.: Durch Normengruppen definierte birationale Invarianten. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, Mathématiques. **310**, 189–192 (1990)

Analysis

JOURNAL OF NUMERICAL ANALYSIS AND APPROXIMATION THEORY
*J. Numer. Anal. Approx. Theory*, vol. 44 (2015) no. 1, pp. 62–68
ictp.acad.ro/jnaat

# SÄTZE VOM BOHMAN-KOROVKIN-TYP FÜR LOKALKONVEXE VEKTORVERBÄNDE

HEINER GONSKA*

*Dedicated to prof. Ion Păvăloiu on the occasion of his 75th anniversary.*

## 1. EINLEITUNG

Wir betrachten das Schema

$$C(X) \xrightarrow[P]{T_n} F.$$

Hierin bezeichnet $C(X)$ den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum $X$ und $F$ einen lokalkompakten Vektorverband.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne eine Folge positiver linearer Abbildungen und $P$ einen Verbandshomomorphismus. In dieser Situation gilt der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Berens und Lorentz [1] darstellt.

SATZ A. *Sei $F$ ein lokalkonvexer Vektorverband und $P : C(X) \to F$ ein Verbandshomomorphimus. Ist $S$ eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion $g^*$ enthält und gilt für eine Folge positiver Abbildungen $T_n$ : $C(X) \to F$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$T_n g \to Pg \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ g \in G = \operatorname{lin} S,$$

*University of Duisburg-Essen, Faculty of Mathematics, D-47048 Duisburg, Germany, e-mail: heiner.gonska@uni-due.de.

*so folgt*

$$T_n g \to Pg \;\; in \;\; F \;\; \textit{für alle} \;\; f \in \hat{G}_{\operatorname{supp} P}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\operatorname{supp} P} \;\; = \;\; & \{f \in C(X) : \mu(f) = f(x) \text{ für alle } x \in \operatorname{supp} P \\ & \text{und alle positiven Linearformen } \mu \text{ mit } \mu(g) = g(x) \\ & \text{für alle } g \in G\} \end{aligned}$$

der Fortsetzungsraum bzgl. $\operatorname{supp} P$ und $G$. Für einen Beweis siehe [2, Theorem 3.1]. Hieraus ergibt sich unmittelbar

SATZ B. *Es sei $F$ ein lokalkonvexer Vektorverband und $P : C(X) \to F$ ein Verbandshomomorphismus. Ist $S$ eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion $g^*$ enthält und $G = \operatorname{lin} S$, so gilt*

$$\hat{G}_{\operatorname{supp} P} \subset \rho(S, F, P).$$

*Hierzu bezeichnet $\rho(S, F, P)$ den Schatten von $S$ bzgl. $L^+(C(X), F)$ - der Menge aller positiven linearen Abbildungen von $C(X)$ nach $F$ - und $P$, d.h.*

$$\begin{aligned} \rho(S, F, P) \;\; = \;\; & \{f \in C(X) : \; \textit{Ist} \; (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^+(C(X)F) \; \textit{mit} \; T_n g \to Pg \\ & \textit{für alle} \; g \in S, \; \textit{so folgt} \; T_n f \to Pf\}. \end{aligned}$$

## 2. ERGEBNISSE

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung eines Satzes von SCHEFFOLD [4].

THEOREM 1. *Es sei $E$ ein topologischer Vektorraum und ein Vektorverband und $F$ ein lokalkonvexer Vektorverband, $X$ sei eine kompakte Menge und $T : C(X) \to E$ ein Verbandshomomorphismus. Es sei $T_n : E \to F$ eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen und $P : E \to F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus. Es sei $S$ eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion $g*$ enthält und $G = \operatorname{lin} S$.*

*Es gelte*

$$T_n(Tg) \to P(Tg) \;\; \hat{\text{E}}\textit{in} \;\; F \;\; \textit{für alle} \;\; g \in S.$$

*Dann folgt*

$$T_n(\overline{f}) \to P(\overline{f}) \;\; in \;\; F \;\; \textit{für alle} \;\; \overline{f} \in \overline{T(\hat{G}_{\operatorname{supp} P \circ T})}^{E}.$$

*Beweis.* $(T_n \circ T)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge positiver linearer Abbildungen mit

$$T_n \circ T : C(X) \to F.$$

$P \circ T : C(X) \to F$ ist ein Verbandshomomorphismus.

Nach Satz B gilt

$$\hat{G}_{\operatorname{supp} P \circ T} \subset \rho(S, F, P \circ T).$$

Aus

$$T_n \circ T(g) \to P \circ T(g) \;\; \text{in} \;\; F \;\; \text{für alle} \;\; g \in S,$$

folgt also

$$T_n \circ T(h) \to P \circ T(h) \;\; \text{in} \;\; F \;\; \text{für alle} \;\; h \in \hat{G}_{\operatorname{supp} P \circ T},$$

also

$$T_n(f) \to P(f) \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ f \in T(\hat{G}_{\operatorname{supp} P\circ T}).$$

Sei nun $\overline{f} \in \overline{T(\hat{G}_{\operatorname{supp} P\circ T})}^E$ und $U$ eine beliebige Nullumgebung in $F$. Dann existiert eine Nullumgebung $W$ in $F$ mit

$$W + W + W \subset U.$$

Wegen der Gleichstetigkeit der Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Umgebung $V$ in $E$ mit $T_n(V) \subset W$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Stetigkeit von $P$ eine Umgebung $V'$ mit $P(V') \subset W$. Es sei nun $h \in \hat{G}_{\operatorname{supp} P\circ T}$ so gewählt, dass $\overline{f} - T(h) \in V \cap V'$ ist. Für $n \geq N_0$ ist dann

$$T_n \circ T(h) - P \circ T(h) \in W,$$

und insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccccc} T_n\overline{f} - P\overline{f} & = & T_n\overline{f} - T_n \circ T(h) & + & T_n \circ T(h) - P \circ T(h) & + & P \circ T(h) - P\overline{f} & \\ & \in & W & + & W & + & W & \subset U \end{array}$$

für alle $n \geq N_0$. □

Bemerkung. Scheffold [4] hat Theorem 1 für einen lokalkonvexen Vektorverband $E$ und einen injektiven Verbandshomomorphimus $T : C(X) \to E$ mit völlig anderen Mitteln bewiesen. Statt von Konvergenz auf dem Abschluss des Bildes eines Fortsetzungsraumes zu sprechen, verwendet Scheffold die Terminologie des relativen Choquetrandes. □

Nach Theorem 1 sind natürlich solche Vektorverbände und topologische Vektorräume $E$ von Interesse, in die ein Raum $C(X)$ vermöge einer natürlichen Inklusion eingebettet ist und für die gilt $\overline{i(C(X))}^E = E$. Eine Klasse solcher Räume bilden sogenannte Banachsche Funktionenräume. Dazu die

Definition 2 (Müller, [3]). *Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $M(K)$ der Vektorraum der auf $K$ definierten reellwertigen (Lebesgue-)meßbaren Funktionen modulo des zugehörigen Nullraumes $N$. Ein Banach-Raum $(B(K), \|\circ\|_B)$ bestehend aus Elementen von $M(K)$ heißt ein Banachscher Funktionenraum genau dann, wenn seine Norm den folgenden Bedingungen genügt:*

(N1) *Ist $g \in M(K)$ und $f \in B(K)$ mit $|g| \leq |f|$, so folgt: $g \in B(K)$ und $\|g\|_B \leq \|f\|_B$.*
(N2) *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $B(K)$ und $0 \leq f_n \nearrow f$ mit $f \in B(K)$, so folgt: $\|f_n\|_B \to \|f\|_B$.*
(N3) *$\|f\|_B$ ist umordnungsinvariant für alle $f \in B(K)$, d.h.: Ist $f = f'$ $\lambda$-fast überall, so ist $f' \in B(K)$ und $\|f\|_B = \|f'\|_B$.*

Beispiel. (Müller) [3] Der Raum $L^p(K)$, $1 \leq p < \infty$ ist ein Banachscher Funktionenraum. □

Für Banachsche Funktionenräume, die den Raum $C(K)$ enthalten, gilt der

Satz 3. (Müller) [3] *Ist $K \subset \mathbb{R}$ und $B(K)$ ein Banachscher Funktionenraum, der den Raum $C(K)$ enthält, so ist $C(K)$ dicht in $B(K)$.*

Um Theorem 1 anwenden zu können, benötigen wir noch

Lemma 4. *Ein Banachscher Funktionenraum $B(K)$ ist ein Banachverband.*

*Beweis.* Es seien $f$ und $g \in B(K)$. Dann ist $\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$. Wegen (N1) sind $|f|, |g| \in B(K)$ und wegen $|f-g| \leq |f| + |g|$ ist auch $|f-g| \in B(K)$ und damit auch $\sup(f,g)$. Da $\inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ gilt, folgt, dass auch $\inf(f,g) \in B(K)$ ist. $B(K)$ ist also ein Vektorverband.

Eine Nullumgebungsbasis in $B(K)$ bilden die Normkugeln $K(0,\epsilon) = \{f \in B(K) : \|f\|_B \leq \epsilon\}$. Ist nun $g \in B(K)$ mit $|g| \leq |f|$ und $\|f\|_B \leq \epsilon$, so folgt mit (N1), dass $\|g\|_B \leq \|f\|_B \leq \epsilon$, also $g \in K(0,\epsilon)$ ist. Dies bedeutet aber, dass $K(0,\epsilon)$ solide ist, und der Banachraum und Vektorverband $B(K)$ besitzt eine Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen. $B(K)$ ist also ein Banachverband. □

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung eines Satzes von Müller (Müller, [3]).

Satz 5. *Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $B(K)$ ein Banachscher Funktionenraum, der den Raum $C(K)$ enthält. Es sei $S$ eine Teilmenge von $C(K)$, die eine strikt positive Funktion $g^*$ enthält und $G = \operatorname{lin} S$. Es gelte $\hat{G}_K = C(K)$. Es sei $T_n : B(K) \to B(K)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge positiver linearer Operatoren mit*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$$

*und*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n g - g\|_B = 0 \ \text{ für alle } \ g \in S.$$

*Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f - f\|_B = 0 \ \text{ für allef } \in B(K).$$

*Beweis.* Die Injektion $i : C(K) \ni f \mapsto f \in B(K)$ ist ein Verbandshomomorphismus. Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ ist die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichstetig. Die Identität $I : B(K) \ni f \mapsto f \in B(K)$ ist ein stetiger Verbandshomomorphismus.

Mit Theorem 1 folgt also

$$T_n f \to If \ \text{ in } \ B(K) \ \text{Êfür alle } \ f \in \overline{i(\hat{G}_{\text{supp } I\circ i})}^{B(K)}.$$

Nun ist

$$i(\hat{G}_{\text{supp } I\circ i}) \supset i(\hat{G}_K) = i(C(K)) = C(K),$$

also

$$\overline{i(\hat{G}_{\text{supp } I\circ i})}^{B(K)} = \overline{C(K)}^{B(K)} = B(K).$$ □

manuscripta math. 105, 343 – 352 (2001) 

Geometry / Topology

Vladimir S. Matveev

# Geschlossene hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten sind geodätisch starr

Received: 16 March 2001

Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Metrik $\bar{g}$ auf $M$ heißt *geodätisch äquivalent* zu $g$, wenn jede Geodätische von $g$, betrachtet als unparametrisierte Punktmenge, auch Geodätische von $\bar{g}$ ist.

Es gibt immer das triviale Beispiel von geodätisch äquivalenten Metriken: $g$ ist geodätisch äquivalent zu Const $\cdot\, g$. Eine Metrik $g$ heißt *geodätisch starr*, wenn nur triviale geodätische Äquivalenzen möglich sind.

Eine Mannigfaltigkeit $M$ heißt *geodätisch starr*, wenn jede Metrik auf $M$ geodätisch starr ist.

Eine Mannigfaltigkeit $M$ heißt *hyperbolisch*, wenn es eine Metrik mit konstanter Schnittkrümmung $(-1)$ auf $M$ gibt.

**Satz 1.** *Jede geschlossene hyperbolische drei-dimensionale Mannigfaltigkeit ist geodätisch starr.*

Satz 1 bedeutet, daß zwei Metriken auf einer hyperbolischen geschlossenen drei-dimensionalen Mannigfaltigkeit genau dann gleiche Geodätische haben, wenn sie proportional sind.

Satz 1 ist nicht trivial: es gibt Metriken, die nicht geodätische starr sind. Wenn wir zum Beispiel das Produkt von zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten, $(M_1, g_1)$ und $(M_2, g_2)$, betrachten, dann sind die Metriken

$$g_1 + g_2 \quad \text{und} \quad g_1 + 2 \cdot g_2$$

auf $M_1 \times M_2$ nicht-trivial geodätisch äquivalent. Zum Beispiel, ist kein Torus $T^n$, $n > 1$, geodätisch starr.

Satz 1 beschreibt kein lokales Phänomen. Man kann auf jeder Mannigfaltigkeit eine Metrik $g$ so konstruieren, daß es in der Umgebung von jedem Punkt eine Metrik $\bar{g}$ gibt, die geodätisch äquivalent zu $g$ ist.

Das Analogon zu Satz 1 für Flächen wurde in [3] bewiesen.

V. S. Matveev: Mathematisches Institut, Universität Freiburg, 79104 Freiburg, Germany.
e-mail: matveev@arcade.mathematik.uni-freiburg.de

*Mathematics Subject Classification (2000):* 37J35, 53D25, 53B10, 53A20

Während des Beweises von Satz 1 benutzen wir die Levi–Civitasche lokale Beschreibung der geodätisch äquivalenten Metriken und die Integrabilität von geodätischen Flüsse der geodätisch äquivalenten Metriken. Wir formulieren den Levi–Civitaschen Satz nur für drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Seien $g,\ \bar g$ Riemannsche Metriken auf $M$. Wir betrachten die Tensoren

$$\begin{aligned} A^i_j &\stackrel{\text{def}}{=} g^{i\alpha}\bar g_{\alpha j} \\ L &\stackrel{\text{def}}{=} (\det(A))^{\frac{1}{n+1}} A^{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

**Satz 2 ([1]).** *Seien $g, \bar g$ geodätisch äquivalente Riemannsche Metriken auf $M^3$.*

1. *Falls in jedem Punkt einer offenen Menge $U^3 \subset M^3$ die Zahl der verschiedenen Eigenwerte des Tensors $L$ genau drei ist, dann gibt es für jeden Punkt $P_0 \in U^3$ eine Umgebung $V^3(P_0) \subset U^3$ und Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ in $V^3(P_0)$, so daß die Metriken $g, \bar g$ durch die folgenden Formeln gegeben sind:*

$$\begin{aligned} ds_g^2 = {} & (\lambda_1(x_1)-\lambda_2(x_2))(\lambda_1(x_1)-\lambda_3(x_3))dx_1^2 \\ & + (\lambda_2(x_2)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))dx_2^2 \\ & + (\lambda_3(x_3)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))dx_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds_{\bar g}^2 = {} & \frac{(\lambda_1(x_1)-\lambda_2(x_2))(\lambda_1(x_1)-\lambda_3(x_3))}{\lambda_1(x_1)^2\lambda_2(x_2)\lambda_3(x_3)}dx_1^2 \\ & + \frac{(\lambda_2(x_2)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))}{\lambda_1(x_1)\lambda_2(x_2)^2\lambda_3(x_3)}dx_2^2 \\ & + \frac{(\lambda_3(x_3)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))}{\lambda_1(x_1)\lambda_2(x_2)\lambda_3(x_3)^2}dx_3^2. \end{aligned}$$

   *Hierbei bezeichnet $\lambda_i$ eine glatte Funktion von $x_i$, $i = 1, 2, 3$.*

2. *Falls in jedem Punkt einer offenen Menge $U^3 \subset M^3$ die Zahl der verschiedenen Eigenwerte von $L$ genau zwei ist, dann existiert für jeden Punkt $P_0 \in U^3$ eine Umgebung $V^3(P_0) \subset U^3$ und Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ in $V^3(P_0)$, so daß die Metriken $g, \bar g$ durch die folgenden Formeln gegeben sind:*

$$ds_g^2 = \pm(\lambda_1(x_1)-\lambda)(dx_1^2 + B(x_2,x_3)(dx_2^2+dx_3^2))$$

$$ds_{\bar g}^2 = \pm\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_1(x_1)}\right)\left(\frac{dx_1^2}{\lambda_1(x_1)}+\frac{B(x_2,x_3)(dx_2^2+dx_3^2)}{\lambda}\right),$$

   *Hierbei ist $\lambda_1$ eine glatte Funktion der Variablen $x_1$, $B$ eine glatte Funktion der Variablen $x_2,\ x_3$ und $\lambda$ eine Konstante.*

Die Integrabilität des Geodätischen Flusses von nichttrivial geodätisch äquivalenten Metriken wurde in [6] bewiesen.

Für jedes $t \in R$, betrachten wir den Tensor

$$S_t \stackrel{\text{def}}{=} \det(L - t\ \mathrm{Id})\,(L - t\ \mathrm{Id})^{-1}. \tag{2}$$

Wir identifizieren $TM^3$ und $T^*M^3$ mit Hilfe von $g$. Die symplektische Form $dp \wedge dq$ auf $T^*M^3$ induziert dann die Poissonsche Klammer auf $TM^3$.

**Satz 3 ([6]).** *Falls die Metriken $g$ und $\bar{g}$ geodätisch äquivalent sind, so gilt für alle $t_1, t_2 \in R$: die Funktionen*

$$I_{t_i} : TM^n \to R, \quad I_{t_i}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} g(S_{t_i}(\xi), \xi), \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

*sind kommutierende Integrale des geodätischen Flusses der Metrik $g$.*

*Bemerkung 1.* Obwohl der Tensor $(L - t\,\mathrm{Id})^{-1}$ für $t \in \mathrm{Spectrum}(L)$ nicht definiert ist, sind der Tensor (2) und die Funktionen (3) immer definiert.

**Satz 4.** *Sei $(M^n, g)$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Metrik $\bar{g}$ sei geodätisch äquivalent zu $g$. In jedem Punkt $x \in M^n$ betrachten wir die Eigenwerte des Tensors (1)*

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) \le \cdots \le \lambda_n(x).$$

*Dann gilt für alle $i = 1, 2, \ldots, n-1$ und für alle Paare von Punkten $x, y \in M^n$:*

1. $\lambda_i(x) \le \lambda_{i+1}(y)$.
2. *Wenn $\lambda_i(x) < \lambda_{i+1}(x)$, dann $\lambda_i(z) < \lambda_{i+1}(z)$ für fast jeden Punkt $z \in M^n$.*

Dieser Satz wurde in [2] bewiesen; hier wiederholen wir den Beweis für $n = 3$, da wir einen guten Teil dieses Beweises benötigen.

Für alle $(x, \xi) \in TM^3$ seien $t_1(x, \xi) \le t_2(x, \xi)$ die Nullstellen des Polynoms $I_t(x, \xi)$.

**Lemma 1.** *Sei $x \in M^3$. Dann gilt für $i = 1, 2$:*

1. *Für alle $\xi \in T_xM^3$,*
$$\lambda_i(x) \le t_i(x, \xi) \le \lambda_{i+1}(x).$$
*Wenn $\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$, dann $t_i(x, \xi) = \lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$.*
2. *Wenn $\lambda_i(x) < \lambda_{i+1}(x)$, dann ist für alle $\tau \in R$ das Lebesguesche Maß der Untermenge*
$$V_\tau \subset T_xM^3, \quad V_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in T_xM^3 : t_i(x, \xi) = \tau\},$$
*Null.*

*Beweis.* Im Tangential-Raum $T_xM^3$, gibt es Koordinaten $x_1, x_2, x_3$, so daß die Metrik $g$ durch die Matrix

$$\mathrm{diagonal}(1, 1, 1)$$

und der Tensor $L$ durch die Matrix

$$\mathrm{diagonal}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))$$

gegeben sind. In diesen Koordinaten hat der Tensor $S_t$ die Matrix

$$\mathrm{diagonal}((\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t), (\lambda_1 - t)(\lambda_3 - t), (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)).$$

Dann hat das Integral $I_t$ folgendes Aussehen:

$$I_t = (\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t)p_1^2 + (\lambda_1 - t)(\lambda_3 - t)p_2^2 + (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t))p_3^2. \quad (4)$$

Wir sehen, daß $I_{\lambda_1}$ nicht negativ ist; $I_{\lambda_2}$ ist nicht positiv und $I_{\lambda_3}$ ist nicht negativ. Deswegen liegt die erste Nullstelle $t_1(x, \xi)$ des quadratischen Polynoms $I_t$ im Interval $[\lambda_1, \lambda_2]$; die zweite Nullstelle $t_2(x, \xi)$ des quadratischen Polynoms $I_t$ liegt im Interval $[\lambda_2, \lambda_3]$, und der erste Teil des Lemmas ist bewiesen.

Der zweite Teil ist trivial – falls das Maß von der Untermenge

$$V_\tau \subset T_x M^3, \quad V_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in T_x M^3 : t_i(x, \xi) = \tau\},$$

nicht Null ist, dann ist $t_i(x, \xi) = \tau$ für alle $\xi \in T_x M^3$. Dann gilt $\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$. Hiermit ist das Lemma bewiesen. □

*Beweis von Satz 4.* Wir nehmen an, daß die Metriken $g$ und $\bar{g}$ geodätisch äquivalent sind und daß die Mannigfaltigkeit $M^3$ geodätisch vollständig ist. Dann können wir beliebige Punkte $x$ und $y$ mit einer Geodätischen $\gamma : R \to M^3, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ verbinden. Wir werden diese Geodätische als Kurve $(\gamma, \dot{\gamma}) : R \to TM^3$ im Tangentialbündel $TM^3$ betrachten. Nach Satz 3 ist für jedes $t$ die Funktion $I_t$ konstant auf dieser Kurve. Deswegen sind die Nullstellen $t_1, t_2$ auch konstant auf dieser Kurve. Wegen Lemma 1,

$$\lambda_i(\gamma(0)) \leq t_i(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \quad \text{und} \quad t_i(\gamma(1), \dot{\gamma}(1)) \leq \lambda_{i+1}(\gamma(1));$$

so daß $\lambda_i(x) \leq \lambda_{i+1}(y)$. Damit ist der erste Teil des Satzes 4 bewiesen.

Sei das Maß der Menge

$$\tilde{V} \subset M^3, \quad \{x \in M^3 : \lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)\},$$

nicht Null. Wegen des ersten Teils des Satzes 4 ist $\lambda_i(x)$ konstant auf der Menge $\tilde{V}$. Wir nennen diese Konstante $\tau$. Wir beweisen jetzt, daß $\lambda_i(y) = \lambda_{i+1}(y) = \tau$ in jedem Punkt $y \in M^3$. Hierzu verbinden wir den Punkt $y$ und alle Punkte von $\tilde{V}$ durch alle möglichen Geodätischen. Wegen Lemma 1 ist für jede dieser Geodätischen $t_i$ gleich $\tau$. Das Maß der Menge der Geschwindigkeitsvektoren dieser Geodätischen im Punkt $y$ ist nicht Null; dann können wir den zweiten Teil des Lemmas 1 anwenden und bekommen, daß

$$\lambda_i(y) = \lambda_{i+1}(y) = \tau.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen. □