German Exam 2018
Algebra

Algebraische Konstruktion reeller Körper.

Von EMIL ARTIN und OTTO SCHREIER in Hamburg.

E. STEINITZ hat durch seine „Algebraische Theorie der Körper"[1]) weite Gebiete der Algebra einer abstrakten Behandlungsweise erschlossen; seiner bahnbrechenden Untersuchung ist zum großen Teil die starke Entwicklung zu danken, die seither die moderne Algebra genommen hat. Noch immer aber gibt es viele Zweige der Algebra, die sich den abstrakten Methoden bisher entzogen haben, wie etwa die reelle Algebra und gewisse Teile der algebraischen Zahlentheorie. Wir erwähnen z. B. den Lehrsatz von STURM über die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung, die Theorien der Einheiten in Zahlkörpern, der Klassenkörper und der Reziprozitätsgesetze.

Um die reelle Algebra abstrakt behandeln zu können, muß man sich notwendig zunächst die Frage vorlegen, durch welche Eigenschaften sich die reellen Körper, insbesondere die Körper aller reellen oder aller reellen algebraischen Zahlen vor anderen Körpern auszeichnen. Man wird versuchen, diese Eigenschaften durch einfache Axiome zu beschreiben. Ein solches Axiomensystem wird verschiedenen Forderungen genügen müssen. Zunächst muß es mit dem Begriff „reell" im gewöhnlichen Sinn im Einklang stehen. Ein absolut algebraischer Körper z. B. wird nur dann reell heißen dürfen, wenn es einen mit ihm isomorphen, im gewöhnlichen Sinne reellen algebraischen Zahlkörper gibt. Sodann muß das Axiomensystem es ermöglichen, rein algebraisch den Existenzbeweis für eine möglichst ausgedehnte Klasse von reellen Körpern zu führen, die natürlich als spezielle Fälle die reellen algebraischen Zahlkörper umfassen muß. Von diesen, im abstrakten Sinn reellen Körpern ist dann nachzuweisen, daß in ihnen die Sätze der reellen Algebra gelten.

Eine solche Kennzeichnung der reellen Körper ist in der Tat möglich. Es wäre naheliegend, vom Begriff des geordneten Körpers auszugehen. Vom Standpunkt der abstrakten Algebra, die doch mit vorgegebenen Körpern arbeitet, wird aber eine Definition vorzuziehen sein, die allein die Operationen der Addition und Multiplikation verwendet und die Möglichkeit nach sich zieht, den Körper zu ordnen. Man wird von einer solchen Definition auch erwarten dürfen, daß sie leichter zu einem algebraischen Existenzbeweis für reelle Körper führt.

Die gesuchte Grundeigenschaft der reellen Körper ist nun folgende: E s s o l l e r l a u b t s e i n , a u s d e m V e r s c h w i n d e n e i n e r S u m m e v o n

[1]) Crelle, Bd. 137 (1910), S. 167—309.

Quadraten stets auf das Verschwinden der einzelnen Quadrate zu schließen. Oder, was damit gleichbedeutend ist: -1 darf nicht als Quadratsumme darstellbar sein. Diese Bedingung wird besonders durch eine Untersuchung[2]) des einen von uns nahegelegt, in der der Körper der reellen algebraischen Zahlen durch algebraische Eigenschaften gekennzeichnet wird. Daß man nunmehr die reelle Algebra vollkommen abstrakt aufbauen kann, soll im folgenden gezeigt werden.

In der anschließenden Arbeit[3]) wird sich die Fruchtbarkeit dieser Begriffsbildungen herausstellen: Es lassen sich mit ihrer Hilfe die Fragen nach der Darstellbarkeit eines Körperelements als Quadratsumme beantworten und Hilberts Problem der definiten Funktionen findet so seine Lösung.

I. Definition und Haupteigenschaften der reellen Körper.

Ein Körper heiße „reell", wenn in ihm -1 nicht als Quadratsumme darstellbar ist.

Ein reeller Körper hat stets die Charakteristik Null, denn in einem Körper der Charakteristik p ist -1 Summe von $(p-1)$ Summanden 1^2.

Ein Körper K heiße „geordnet", wenn für seine Elemente die Eigenschaft, positiv (>0) zu sein, gemäß den folgenden Forderungen definiert ist:

1. *Für jedes Element a aus K gilt genau eine der Beziehungen*

$$a = 0, \qquad a > 0, \qquad -a > 0.$$

2. *Ist $a > 0$ und $b > 0$, so ist $a + b > 0$ und $ab > 0$.*

Ist $-a > 0$, so sagen wir: a ist negativ.

Definieren wir in einem geordneten Körper allgemein eine Größenbeziehung durch die Festsetzung

$$a > b \text{ (oder } b < a), \quad \text{wenn} \quad a - b > 0,$$

so zeigt man mühelos, daß die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

Verstehen wir ferner unter dem Betrag $|a|$ eines Elements das nicht-negative unter den Elementen $a, -a$, so gelten für das Rechnen mit Beträgen die Regeln

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \qquad |a + b| \leqq |a| + |b|.$$

Ebenso erkennt man die Richtigkeit von $|a|^2 = a^2$. Also ist ein Quadrat stets nicht-negativ. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$, folglich

[2]) E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. Hamb. Abh. Bd. 3 (1924), S. 319—323.

[3]) E. Artin, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate.

$-1 < 0$ und daher -1 in K nicht als Quadratsumme darstellbar. D. h.: Jeder geordnete Körper ist reell.

Ein Körper P heiße „reell abgeschlossen“[4]*, wenn zwar P reell, dagegen keine algebraische Erweiterung von P reell ist.*

Satz 1. *Jeder reell abgeschlossene Körper kann auf eine und nur eine Weise geordnet werden.*

Sei P reell abgeschlossen. Dann wollen wir zeigen:

Jedes von 0 verschiedene Element a aus P ist entweder selbst Quadrat oder aber ist $-a$ Quadrat, wobei diese Fälle einander ausschließen. Quadratsummen von Elementen aus P sind selbst Quadrate.

Hieraus wird Satz 1 unmittelbar folgen; denn durch die Festsetzung $a > 0$, wenn a Quadrat und von 0 verschieden ist, wird dann offenbar eine Ordnung des Körpers P definiert sein und sie ist die einzig mögliche, da ja Quadrate in jeder Ordnung $\geqq 0$ ausfallen müssen.

Ist γ nicht Quadrat eines Elements aus P, so ist $P(\sqrt{\gamma})$ eine algebraische Erweiterung von P, also nicht reell. Demnach gilt eine Gleichung

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \sqrt{\gamma} + \beta_\nu)^2$$

oder

$$-1 = \gamma \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2 + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \beta_\nu,$$

wobei die α_ν, β_ν zu P gehören. Hierin muß der letzte Term verschwinden, da sonst $\sqrt{\gamma}$ entgegen der Annahme in P läge. Dagegen kann das erste Glied nicht verschwinden, da andernfalls P nicht reell wäre. Daraus schließen wir zunächst, daß γ in P nicht als Quadratsumme darstellbar ist; denn sonst erhielten wir auch für -1 eine Darstellung als Quadratsumme. D. h.: Ist γ nicht Quadrat, so auch nicht Quadratsumme. Oder positiv gewendet: Jede Quadratsumme in P ist auch Quadrat in P.

Nunmehr erhalten wir

$$-\gamma = \frac{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2}$$

Zähler und Nenner dieses Ausdrucks sind Quadratsummen, also selbst Quadrate, daher ist $-\gamma = c^2$, wo c in P liegt. Demnach gilt für jedes Element aus P mindestens eine der Gleichungen $\gamma = b^2$,

[4]) Wir haben die kurze Bezeichnung „reell abgeschlossen“ der präziseren „reell-algebraisch abgeschlossen“ vorgezogen.

$-\gamma = c^2$; ist aber $\gamma \neq 0$, so können nicht beide bestehen, da sonst $-1 = \left(\frac{b}{c}\right)^2$ wäre, was nicht geht.

Auf Grund von Satz 1 nehmen wir im folgenden reell abgeschlossene Körper stets als geordnet an.

Satz 2. *In einem reell abgeschlossenen Körper besitzt jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle.*

Der Satz ist für den Grad 1 trivial. Wir nehmen an, er sei bereits für alle ungeraden Grade $< n$ bewiesen; $f(x)$ sei ein Polynom des ungeraden Grades $n\,(>1)$. Ist $f(x)$ reduzibel in dem reell abgeschlossenen Körper P, so besitzt mindestens ein irreduzibler Faktor einen ungeraden Grad $< n$, also auch eine Nullstelle in P. Die Annahme, $f(x)$ wäre irreduzibel, soll jetzt ad absurdum geführt werden. Es sei nämlich α eine symbolisch adjungierte Nullstelle von $f(x)$. $P(\alpha)$ wäre dann nicht-reell, also hätten wir eine Gleichung

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(\alpha))^2, \tag{1}$$

wobei die $\varphi_\nu(x)$ Polynome höchstens $(n-1)$-ten Grades mit Koeffizienten aus P sind. Aus (1) erhalten wir eine Identität

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(x))^2 + f(x)\,g(x). \tag{2}$$

Die Summe der φ_ν^2 hat geraden Grad, da die höchsten Koeffizienten Quadrate sind und sich also beim Addieren nicht wegheben können. Ferner ist der Grad positiv, da sonst schon (1) einen Widerspruch enthielte. Demnach hat $g(x)$ einen ungeraden Grad $\leqq n-2$, also besitzt $g(x)$ jedenfalls eine Nullstelle a in P. Setzen wir aber a in (2) ein, so haben wir

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(a))^2,$$

womit wir bei einem Widerspruch angelangt sind, da die $\varphi_\nu(a)$ in P liegen.

Satz 3. *Ein reell abgeschlossener Körper ist nicht algebraisch abgeschlossen. Dagegen ist der durch Adjunktion von i[5]) entstehende Körper algebraisch abgeschlossen.*

Die erste Hälfte ist trivial. Denn die Gleichung $x^2+1=0$ ist in jedem reellen Körper unlösbar.

[5]) i bedeutet hier und im folgenden stets eine Nullstelle von x^2+1.

Analysis

Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip

(Die Randwerte von meromorphen Funktionen)

Von C. Carathéodory, München

1. Die Entdeckung der Lebesgueschen Integrationsmethoden war der Anlaß, die Theorie der analytischen Funktionen an vielen Stellen in bemerkenswerter und unerwarteter Weise zu bereichern. Aber es gibt noch heute, nach fast fünfzig Jahren, Fragen ganz elementaren Charakters, für welche die Lebesgueschen Resultate noch nicht ausgebeutet worden sind. So kann man das Spiegelungsprinzip von *H. A. Schwarz* auf einen Satz zurückführen, der von ebensolchem allgemeinem Interesse ist wie dieses.

Nach dem Resultat von Schwarz ist eine im Kreise $|z| < 1$ analytische Funktion, die auf einem Bogen AB der Kreisperipherie stetig und reell ist, regulär in jedem Punkte von AB. Obwohl nun der Schwarzsche Beweis in seiner ursprünglichen Fassung ohne die Forderung der Stetigkeit von $f(z)$ auf AB nicht denkbar ist, ist es nicht schwer, eine Variante dieses Beweises zu konstruieren, bei welcher die Stetigkeit überhaupt keine Rolle spielt.

Zu diesem Zweck braucht man nur den Begriff der *Randwerte* (oder wie manche Autoren sagen, der Häufungswerte) einer Funktion systematisch zu benutzen.

2. Wir gehen von folgender Definition aus:

Definition. *Ist $f(z)$ eine beliebige reelle oder komplexe Funktion, die in einem Gebiete G definiert ist, und bezeichnet man mit ζ irgendeinen Randpunkt von G, so wollen wir sagen, daß eine Zahl α ein Randwert von $f(z)$ im Punkte ζ ist, wenn es mindestens eine Folge von Punkten z_ν in G gibt, für welche die Gleichungen*

$$\lim_{\nu=\infty} z_\nu = \zeta \qquad \lim_{\nu=\infty} f(z_\nu) = \alpha \tag{2.1}$$

gleichzeitig bestehen.

Mit Hilfe dieser Definition gilt nun der

Satz 1. *Im Inneren des Einheitskreises $|z| < 1$ sei die analytische Funktion $f(z)$ meromorph. Auf einem Bogen AB der Kreisperipherie seien alle Randwerte von $f(z)$ reell oder ∞. Dann ist die Funktion $f(z)$ in jedem Punkte ζ von AB regulär und reell oder sie besitzt einen Pol in ζ.*

Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - i}{f(z) + i} \tag{2.1}$$

ist in jedem Punkte des Kreises $|z| < 1$ meromorph. In jedem Punkte ζ von AB sind alle Randwerte von $|g(z)|$ identisch gleich Eins, weil durch die Abbildung

$$\omega = \frac{w - i}{w + i}$$

die reelle Achse der w-Ebene in den Kreis $|\omega| = 1$ transformiert wird. Ist dann ζ ein innerer Punkt des Bogens AB, so kann man die natürliche Zahl n so groß wählen, daß erstens die eine Seite des Kreisbogenzweiecks CD, welches die gemeinsamen inneren Punkte der beiden Kreise

$$|z| < 1 \ , \qquad |z - \zeta| < \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

enthält, aus einem Teilbogen CD von AB besteht und daß zweitens die Relation

$$\tfrac{1}{2} < |g(z)| < 2 \tag{2.3}$$

überall in diesem Kreisbogenzweieck verifiziert ist. Im entgegengesetzten Fall könnte man jeder natürlichen Zahl n einen Punkt z_n des Einheitskreises zuordnen, für welche $|z_n - \zeta| < \frac{1}{n}$ ist und eine der Relationen $|g(z_n)| \leqq \frac{1}{2}$ oder $|g(z_n)| \geqq 2$ erfüllt ist. Dann müßte aber $|g(z)|$ entgegen der Voraussetzung einen Randwert im Punkte ζ haben, der von 1 verschieden ist.

Wir bilden jetzt durch die Funktion

$$z = \psi(u) \tag{2.4}$$

das Kreisbogenzweieck CD auf den Kreis $|u| < 1$ ab, so daß die Seite CD des Zweiecks dem Halbkreise $C_1E_1D_1$ entspricht, der in der Halbebene $\Re\, u > 0$ liegt, und setzen

$$h(u) = g\big(\psi(u)\big) \ . \tag{2.5}$$

Nach unserer Konstruktion ist nun $\frac{1}{2} < |h(u)| < 2$; irgendein Zweig des Logarithmus $l\,h(u)$ ist somit regulär in $|u| < 1$ und besitzt dort einen beschränkten reellen Teil. Wir führen die Bezeichnung ein

$$\lambda(r, \vartheta) = \Re\big(l\,h(r\,e^{i\vartheta})\big) \qquad (0 < r < 1) \ . \tag{2.6}$$

Ist dann u ein beliebiger Punkt des Kreises $|u|<1$ und wählt man $r>|u|$ aber <1, so hat man nach der Formel des Poissonschen Integrals

$$l h(u) = \frac{l h(0) - \overline{l h(0)}}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(r, \vartheta)\, \frac{r e^{i\vartheta} + u}{r e^{i\vartheta} - u}\, d\vartheta\ . \qquad (2.7)$$

Da nun für $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und für $\frac{3\pi}{2} < \vartheta < 2\pi$ alle Randwerte von $|h(u)|$ gleich Eins und folglich $\lim\limits_{r=1} \lambda(r, \vartheta) = 0$ ist, hat man, indem man in (2.7) die Größe r gegen Eins konvergieren läßt und die Bezeichnung

$$\lambda(\vartheta) = \lim_{r=1} \lambda(r, \vartheta)$$

einführt,

$$l h(u) = \frac{l h(0) - \overline{l h(0)}}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \lambda(\vartheta)\, \frac{e^{i\vartheta} + u}{e^{i\vartheta} - u}\, d\vartheta\ . \qquad (2.8)$$

Aus dieser Darstellung von $l h(u)$ folgt nun unmittelbar, daß diese Funktion auf dem Halbkreis $C_1 E_1 D_1$ regulär ist; dasselbe gilt von $h(u)$ und es muß also auch $g(z)$ auf dem Kreisbogen CD analytisch sein, ein Resultat, das auch für $f(z)$ gilt. Hiermit ist der angekündigte Satz bewiesen[1]).

3. Bei der Auswertung des Poissonschen Integrals (2.7) haben wir die Voraussetzungen des Satzes 1 nicht voll ausgenutzt. Das Schlußresultat (2.8) hätten wir schon erzielen können, wenn nicht sämtliche Randwerte von $f(z)$, sondern lediglich diejenigen, die man bei *radialer Annäherung* erhält, reell sind. Diese letztere Voraussetzung reicht aber nicht mehr aus, um schließen zu können, daß $f(z)$ keine singulären Stellen auf dem Rande besitzt. Zum Beispiel ist

$$f(z) = e^{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2}$$

wesentlich singulär für $z = 1$, aber die Grenzwerte $\lim\limits_{r=1} f(re^{i\vartheta})$ existie-

[1]) Man beachte, daß wir bisher von der Lebesgueschen Theorie keinen Gebrauch gemacht haben, und daß unsere obigen Schlüsse von derselben Art sind, wie diejenigen, die auch Schwarz zur Hand hatte.

ren für jeden Wert von ϑ und sind reell (und sogar endlich). Wenn man aber die Möglichkeit des Auftretens von Singularitäten zuläßt, so zeigt sich, daß man schon bei überraschend geringen Annahmen über das Verhalten von $f(z)$ in der Nähe des Randes eine befriedigende Antwort auf alle Fragen erhält, die zu stellen man geneigt sein könnte. Wir wollen mit folgenden Voraussetzungen arbeiten:

Annahme: *Die analytische Funktion $f(z)$ soll meromorph im Inneren des Kreises $|z| < 1$ sein. Jedem Punkte ζ eines Kreisbogens AB der Kreisperipherie $|z| = 1$, der nicht auf einer festen Punktmenge e_0 vom linearen Maße Null liegt, soll mindestens eine gegen ζ konvergierende Folge von Punkten z_ν des Einheitskreises zugeordnet werden können, die zwischen zwei in ζ sich begegnenden Sehnen des Einheitskreises liegen, und für welche* $\lim f(z_\nu)$ *existiert und reell oder gleich ∞ ist.*

Wie schwach diese Voraussetzungen sind, zeigt schon der Umstand, daß die Modulfunktion $\nu(z)$, die man durch die konforme Abbildung der oberen w-Halbebene in üblicher Normierung auf ein in den Kreis $|z| = 1$ eingeschriebenes Moduldreieck erhält, den obigen Bedingungen gerecht wird. Denn auf jedem Radius des Kreises $|z| < 1$, der in einem Punkte ζ endet, konvergiert $\nu(z)$ gegen 0, 1 oder ∞, wenn dieser Radius nur endlich viele Dreiecke der Modulfigur durchsetzt, und auf einem solchen Radius existieren unendlich viele Punkte, in denen $\nu(z)$ reell ist, wenn er durch unendlich viele solche Dreiecke hindurchgeht.

Da nun der Kreis $|z| = 1$ eine natürliche Grenze für die Funktion $\nu(z)$ ist, zeigt dieses Beispiel, daß sogar alle Punkte des Bogens AB bei den von uns gemachten Voraussetzungen singuläre Punkte von $f(z)$ sein können. Es wird sich aber herausstellen, daß diese singulären Punkte von ganz besonderer Art sind. Das Resultat, das wir erhalten werden, ist nämlich mit dem Satze von *Casorati-Weierstraß* über isolierte wesentlich singuläre Stellen aufs äußerste verwandt. Dieser letztere Satz kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Ist eine analytische Funktion $f(z)$ in einem punktierten Kreise $0 < |z - \zeta_0| < \varrho$ eindeutig und meromorph, so sind nur zwei verschiedene Möglichkeiten vorhanden. Entweder überdeckt die Menge W aller Randwerte von $f(z)$ im Punkte ζ_0 die ganze Zahlebene mit Einschluß des Punktes ∞, oder $f(z)$ ist regulär (oder hat einen Pol) im Punkte ζ_0. Eine Aussage ganz ähnlichen Charakters bildet aber der Inhalt von

Satz 2. *Unter den angegebenen Voraussetzungen für $f(z)$ sind in jedem Punkte ζ_0 des Kreisbogens AB nur folgende drei Möglichkeiten vorhanden:*

Geometry

Beiträge zur Homotopietheorie

Von Heinz Hopf, Zürich

Diese Beiträge setzen die Untersuchung der Zusammenhänge fort, die zwischen den Homotopiegruppen von Hurewicz, der Fundamentalgruppe und den Homologiegruppen bestehen; derartige Untersuchungen sind bereits in den grundlegenden Arbeiten von Hurewicz [**1**], in einer Arbeit von Eilenberg [**2**] und in zwei Arbeiten von mir [**3**, **4**] angestellt worden[1]); Begriffe, Methoden und Sätze aus diesen Arbeiten werden im folgenden benutzt.

Die Ergebnisse sind in den Abschnitten 2.1, 2.2, 3.5, 4.3, 4.9, 5.4, 5.5 formuliert; die Erklärung der in diesen Sätzen vorkommenden Begriffe findet man in den Abschnitten 1.1 bis 1.5, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. In den Abschnitten 2.7 und 5.6 ff. wird durch einige spezielle Beispiele gezeigt, in welchen Richtungen sich die allgemeinen Sätze anwenden lassen.

1. Definition der Gruppen Π_0^n, Γ^n, Δ^n

1.1. $\mathfrak{K}$ sei ein beliebiger zusammenhängender, simplizialer Komplex, endlich oder unendlich, und $\overline{\mathfrak{K}}$ das durch $\mathfrak{K}$ bestimmte Polyeder[2]). Die Homotopiegruppen von $\overline{\mathfrak{K}}$ nennen wir auch die Homotopiegruppen des Komplexes $\mathfrak{K}$ und bezeichnen sie mit $\Pi^n(\mathfrak{K})$ oder, wenn kein Mißverständnis möglich ist, kurz mit Π^n; $(n = 1, 2, \ldots)$.

Die Definition dieser Gruppen ist bekannt ([**1**], (I)). Es sei hier nur an folgendes erinnert: Die Elemente von Π^n sind die Äquivalenzklassen derjenigen Abbildungen[3]) einer Sphäre S^n in das Polyeder $\overline{\mathfrak{K}}$, welche einen festen Punkt $a \in S^n$, den „Pol", auf einen festen Eckpunkt o von $\mathfrak{K}$, den „Nullpunkt" abbilden; dabei gelten zwei Abbildungen f, g als äquivalent, wenn man sie unter Festhaltung des Bildes von a stetig ineinander deformieren kann.

1.2. Ein „stetiger Zyklus" $[f(z)]$ in $\overline{\mathfrak{K}}$ ist durch eine Abbildung f eines Polyeders $\bar{z}$ in das Polyeder $\overline{\mathfrak{K}}$ bestimmt, wobei z ein Zyklus ist

[1]) Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Terminologie immer wie in [5]. — Nur statt „algebraischer Komplex" sage ich jetzt „Kette".

[3]) Alle Abbildungen von Sphären und anderen Polyedern sollen stetig, alle Abbildungen von Komplexen simplizial sein.

([5], p. 332ff.). Ist speziell $z = S^n$ der Grundzyklus einer orientierten n-dimensionalen Sphäre, so nennen wir $[f(S^n)]$ eine „stetige (n-dimensionale) Sphäre". Die Elemente der oben betrachteten Äquivalenzklassen sind also stetige Sphären.

Die stetigen Sphären $[f(S^n)]$, $[g(S^n)]$ heißen „homotop" zueinander, wenn die Abbildungen f, g homotop sind, d. h. wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen, wobei im Gegensatz zu oben kein Pol a ausgezeichnet ist. Je zwei stetige Sphären aus einer Äquivalenzklasse sind homotop; daraus folgt: wenn eine stetige Sphäre aus der Äquivalenzklasse α zu einer stetigen Sphäre aus der Äquivalenzklasse α' homotop ist, so ist jede stetige Sphäre aus α zu jeder stetigen Sphäre aus α' homotop; in diesem Falle nennen wir die Elemente α, α' zueinander homotop. Die Gruppe Π^n zerfällt so in Homotopieklassen.

Es kann vorkommen, daß jede Homotopieklasse von Π^n nur ein einziges Element enthält, daß also zwei verschiedene Elemente von Π^n niemals zueinander homotop sind. In diesem Falle heißt $\mathfrak{K}$ „einfach" in der Dimension n. Dies ist speziell dann der Fall, und zwar für alle n, wenn $\mathfrak{K}$ einfach zusammenhängend, d. h. wenn die Fundamentalgruppe $\Pi^1 = 0$ ist [2].

1.3. Unter Π^n_0 verstehen wir die Untergruppe von Π^n, die von allen Differenzen $\alpha - \alpha'$ erzeugt wird, wobei α, α' beliebige zueinander homotope Elemente von Π^n sind; sie besteht aus allen Summen $\Sigma(\alpha_i - \alpha'_i)$, wobei immer α_i und α'_i homotop sind.

Wenn $\mathfrak{K}$ in der Dimension n einfach, also insbesondere wenn $\mathfrak{K}$ einfach zusammenhängend ist, ist $\Pi^n_0 = 0$.

1.4. Jeder stetige Zyklus in $\overline{\mathfrak{K}}$ gehört zu einer bestimmten Homologieklasse von $\mathfrak{K}$ ([5], p. 334). Homotope stetige Zyklen gehören zu derselben Homologieklasse; hieraus folgt erstens, daß jedem Element $\alpha \in \Pi^n$ eine bestimmte Homologieklasse $h\alpha$ zugeordnet ist, und zweitens: sind α, α' homotope Elemente von Π^n, so ist $h\alpha = h\alpha'$.

Aus den Definitionen der Addition in Π^n und in der Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^n$ von $\mathfrak{K}$ ergibt sich, daß h eine homomorphe Abbildung von Π^n in $\mathfrak{B}^n$ ist. Der Kern dieses Homomorphismus, also das Urbild des Nullelementes von $\mathfrak{B}^n$, ist eine Untergruppe von Π^n, die wir Γ^n nennen; sie besteht also aus denjenigen Elementen von Π^n, die die Eigenschaft haben, daß die in ihnen enthaltenen stetigen Sphären homolog 0 sind. (Wenn $\mathfrak{K}$ n-dimensional ist, so darf man hierbei statt „homolog 0" auch „gleich 0", im Sinne der Addition von Ketten, sagen.) Wir werden die in Γ^n enthaltenen Elemente von Π^n selbst „homolog 0" nennen.

1.5. Wenn α, α' zueinander homotop sind, so ist, wie in 1.4 festgestellt wurde, $h\alpha = h\alpha'$, also $h(\alpha - \alpha') = 0$, d. h. $\alpha - \alpha'$ homolog 0, und folglich sind alle Elemente der Gruppe Π_0^n homolog 0; man kann sagen, daß das diejenigen Elemente von Π^n sind, welche bereits auf Grund ihrer Homotopieeigenschaften „trivialerweise" homolog 0 sind.

Es ist also $\Pi_0^n \subset \Gamma^n$, und mithin ist die Faktorgruppe $\Delta^n = \Gamma^n / \Pi_0^n$ erklärt. Diese Gruppen Δ^n werden den Hauptgegenstand unserer Untersuchung bilden; in ihrer Struktur äußern sich die Existenz und Eigenschaften solcher Elemente von Π^n, welche homolog 0 sind, für welche dies aber nicht „trivial" — in dem soeben besprochenen Sinne — ist.

Wenn $\mathfrak{K}$ in der Dimension n einfach, also insbesondere wenn $\mathfrak{K}$ einfach zusammenhängend ist, ist $\Delta^n = \Gamma^n$.

1.6. Die Gruppe Π^1 ist die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$. Sie ist, im Gegensatz zu Π^n, $n > 1$, im allgemeinen nicht kommutativ, und man schreibt sie, im Gegensatz zu Π^n, $n > 1$, nicht additiv, sondern multiplikativ. Zwei Elemente $\alpha, \alpha' \in \Pi^1$ sind dann und nur dann homotop, wenn sie ähnlich sind, d. h. wenn ein $\beta \in \Pi^1$ existiert, sodaß $\alpha' = \beta\alpha\beta^{-1}$ ist ([6], p. 176); an die Stelle der oben betrachteten Differenzen $\alpha - \alpha'$ treten also die Kommutatoren $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, und Π_0^1 ist die Kommutatorgruppe von Π^1. Andererseits sind die Elemente der Kommutatorgruppe von Π^1 dadurch charakterisiert, daß die sie repräsentierenden geschlossenen Wege, als stetige Zyklen aufgefaßt, homolog 0 sind ([6], p. 173); folglich ist auch Γ^1 die Kommutatorgruppe von Π^1. Es ist also $\Pi_0^1 = \Gamma^1$ und damit $\Delta^1 = 0$. — Die Gruppen Δ^n verdienen also nur für $n > 1$ Interesse.

1.7. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Homotopie zwischen zwei Elementen $\alpha, \alpha' \in \Pi^n$ nach Eilenberg [2] auch folgendermaßen charakterisiert werden kann (diese Charakterisierung wird nur einmal, in 2.6, explizit eine Rolle spielen): Den Elementen x der Fundamentalgruppe Π^1 sind in natürlicher Weise Automorphismen A_x der Gruppe Π^n zugeordnet; Π^n ist also als „Gruppe mit Operatoren" aufzufassen, wobei Π^1 der Operatorenbereich ist. Es gilt der Satz: „Die Elemente $\alpha, \alpha' \in \Pi^n$ sind dann und nur dann homotop, wenn es ein $x \in \Pi^1$ gibt, sodaß $\alpha' = A_x\alpha$ ist" ([2], §§ 9,11). — (Für $n = 1$ sind die A_x die inneren Automorphismen von Π^1.)

Hieraus folgt, daß durch die Struktur von Π^n als Gruppe mit Operatoren in dem soeben erklärten Sinne die Gruppe Π_0^n vollständig bestimmt ist.

2. Der Zusammenhang zwischen den Gruppen $\Delta^n(\mathfrak{K}^n)$ und der Fundamentalgruppe

2.1. $\mathfrak{K}$ heißt „asphärisch" in der Dimension n, wenn $\Pi^n(\mathfrak{K}) = 0$ ist, d. h. wenn jede stetige n-dimensionale Sphäre in $\overline{\mathfrak{K}}$ auf einen Punkt zusammengezogen werden kann ([1], (IV)).

Wir betrachten N-dimensionale Komplexe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^N$ und werden zeigen:

Es sei $N \geqslant 2$, und $\mathfrak{K}^N$ sei asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$. Dann ist die Struktur der Gruppe $\Delta^N(\mathfrak{K}^N)$ durch die Struktur der Fundamentalgruppe $\Pi^1(\mathfrak{K}^N)$ bestimmt.

Die Voraussetzung über $\mathfrak{K}^N$ ist inhaltlos, wenn $N = 2$ ist; daher enthält dieser Satz den folgenden:

Für jeden zweidimensionalen Komplex $\mathfrak{K}^2$ ist die Struktur der Gruppe $\Delta^2(\mathfrak{K}^2)$ durch die Struktur der Fundamentalgruppe $\Pi^1(\mathfrak{K}^2)$ bestimmt.

2.2. Diese Sätze lassen sich noch präzisieren. Jeder abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ sind durch einen algebraischen Prozeß, den ich früher dargestellt habe, Abelsche Gruppen $\mathfrak{G}^1, \mathfrak{G}^2, \ldots$ zugeordnet, die „zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Bettischen Gruppen" ([4], § 1)[4]. Welche Eigenschaften dieser Gruppen wir hier brauchen, wird unten in 2.4 gesagt werden. Es gilt

Satz I. *Es sei $N \geqslant 2$, und $\mathfrak{K}^N$ sei ein N-dimensionaler Komplex, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt und asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$ ist. Dann ist $\Delta^N(\mathfrak{K}^N) \cong \mathfrak{G}^{N+1}$.* [5]

Speziell gilt also, analog wie in 2.1,

Satz I'. *Für jeden zweidimensionalen Komplex $\mathfrak{K}^2$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist $\Delta^2(\mathfrak{K}^2) = \mathfrak{G}^3$.*

2.3. *Beweis von Satz I.* K sei der universelle Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^N$. Die Abbildung, die jedem Punkt $\overline{p} \in \overline{K}$ den von ihm überlagerten Punkt $p \in \overline{\mathfrak{K}}$ zuordnet, heisse U. Der Homomorphismus $\overline{h}$ sei für K ebenso erklärt, wie in 1.4 der Homomorphismus h für $\mathfrak{K}$.

Die nachstehenden Tatsachen a), b), c) sind aus der Theorie von Hurewicz bekannt:

a) U bildet für $n > 1$ die Gruppe $\Pi^n(K)$ isomorph auf die Gruppe $\Pi^n(\mathfrak{K})$ ab ([1], (I), Satz IV).

[4]) Der Koeffizientenbereich ist immer der Ring der ganzen Zahlen.

[5]) Durch diesen Satz wird die am Schluß von [4] angekündigte Beziehung hergestellt.