German-Geometry

HIRZEBRUCH, F. und HOPF, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 156—172 (1958)

Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Von

FRIEDRICH HIRZEBRUCH in Bonn und HEINZ HOPF in Zürich

Herrn H. BEHNKE zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Wir betrachten 4-dimensionale kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten M und in ihnen stetige Felder von orientierten Flächenelementen. Die nächstliegende Frage lautet: „*In welchen M existieren solche Felder ohne Singularitäten?*" Eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit besteht darin, daß diese M durch eine arithmetische Relation zwischen der Eulerschen Charakteristik e und der Poincaréschen Bilinearform $S(x,y)$ charakterisiert werden; $S(x,y)$ bezeichnet also die Schnittzahl der 2-dimensionalen Homologieklassen x und y, und zwar ist „Homologie" hier im einfachsten Sinne, nämlich als „Homologie mit Division" zu verstehen (x, y sind also Elemente der, modulo der Torsionsgruppe reduzierten, ganzzahligen Homologiegruppe). Übrigens werden wir uns der Cohomologie-Sprache bedienen, so daß nachher x, y Elemente der 2-dimensionalen, modulo der Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung reduzierten, ganzzahligen Cohomologiegruppe und $S(x,y)$ den Wert des 4-dimensionalen Cup-Produktes xy auf dem Grundzyklus der orientierten M bezeichnen werden. In der erwähnten arithmetischen Relation werden außer dem Trägheitsindex (oder der Signatur) τ (vgl. 4.1) einer symmetrischen Bilinearform $S(x,y)$ noch die folgenden Begriffe auftreten:

Auf dem p-dimensionalen Gitter (ganzzahligen Modul) H sei S eine ganzzahlige symmetrische bilineare Funktion von Gittervektoren x, y mit der Determinante ± 1. Dann gibt es solche Gittervektoren w, daß

$$(1) \qquad S(w,x) \equiv S(x,x) \mod 2 \text{ für jeden } x \in H$$

ist; in der Tat: hat S in bezug auf eine beliebig gewählte Basis von H die Matrix (a_{ij}), so besitzt der Vektor w, dessen Komponenten w_j durch das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} w_j = a_{ii}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

bestimmt sind, die Eigenschaft (1); ferner sieht man leicht, daß mit w alle Vektoren $w' = w + 2x$ ($x \in H$ beliebig), und nur diese w', ebenfalls (1) erfüllen. Somit bilden die durch (1) charakterisierten w eine Restklasse $W \in H/2H$.

Wir verstehen unter Ω die Menge aller Zahlen $S(w,w)$ mit $w \in W$. (Im Falle $p = 0$ verstehen wir unter Ω die nur aus der 0 bestehende Menge.)

Für eine Mannigfaltigkeit M ist also neben der Eulerschen Charakteristik e und dem Trägheitsindex τ die Zahlenmenge Ω definiert. Nun lautet die Antwort auf die anfangs formulierte Frage:

In M gibt es dann und nur dann Felder von Flächenelementen ohne Singularität, wenn

$$3\tau + 2e \in \Omega \quad \textit{und} \quad 3\tau - 2e \in \Omega .$$

Felder mit höchstens endlich vielen Singularitäten existieren nach einem Satz von Whitney (den wir übrigens in (4.1 vi) noch einmal beweisen werden) in jeder M. Jeder isolierten Singularität P_i ist in bekannter Weise ein Index zugeordnet: er ist die Homotopieklasse einer bestimmten Abbildung einer Sphäre $\mathbf{S}_3$ in die Mannigfaltigkeit Σ der orientierten Ebenen durch einen Punkt des euklidischen $\mathbf{R}^4$, also ein Element der Gruppe $\pi_3(\Sigma)$; da Σ homöomorph mit dem Sphärenprodukt $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ und da $\pi_3(\mathbf{S}_2)$ unendlich zyklisch ist, kann der Index bei Beachtung gewisser Orientierungskonventionen als Paar (a_i, b_i) ganzer Zahlen aufgefaßt werden; die Indexsumme des Feldes ist das Paar (a, b) mit $a = \Sigma a_i$, $b = \Sigma b_i$, summiert über alle Singularitäten. Wir fragen, welche Indexsummen in einer gegebenen M auftreten. Diese Indexsummen sind im allgemeinen nicht einander gleich; vielmehr gilt folgender Satz:

Dann und nur dann haben in M alle Indexsummen den gleichen Wert, wenn die zweite Bettische Zahl $b_2 = 0$ ist; und zwar ist dieser Wert

$$(a, b) = (-e/2,\ +e/2) = (-1 + b_1\,,\ 1 - b_1)\,,$$

wobei b_1 die erste Bettische Zahl ist. Wenn $b_2 \neq 0$ ist, so gibt es in M Felder mit unendlich vielen verschiedenen Indexsummen.

Dies ist ein Korollar des folgenden Hauptsatzes der Arbeit:

Als Indexsummen von Feldern mit endlich vielen Singularitäten in M treten die folgenden Zahlenpaare (a, b) und nur diese auf:

$$(2) \qquad a = \frac{1}{4}(\alpha - 3\tau - 2e)\,, \quad b = \frac{1}{4}(\beta - 3\tau + 2e) \ \textit{mit beliebigen } \alpha, \beta \in \Omega\ ^{1)}.$$

[1]) Da a und b nach Definition ganze Zahlen sind, sind auch die rechten Seiten in (2), die man als

$$\frac{1}{4}(\alpha - \tau) - \frac{1}{2}(\tau + e)\,, \quad \frac{1}{4}(\beta - \tau) - \frac{1}{2}(\tau - e)$$

schreiben kann, ganz; ferner ist $\tau \equiv e \bmod 2$ (da beide Zahlen mod. 2 der 2. Bettischen Zahl kongruent sind); daher ist die Ganzheit der obigen Zahlen gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Kongruenzen

$$(3) \qquad S(w, w) \equiv \tau \bmod 4 \ \text{für} \ w \in W\,.$$

Für diejenigen Bilinearformen S, welche als Poincarésche Formen in Mannigfaltigkeiten M auftreten, haben wir somit (3) auf dem Umweg über (2) bewiesen. Herr W. Ledermann hat auf algebraischem Wege gezeigt, daß (3) für alle symmetrischen ganzzahligen Bilinearformen S mit ungerader Determinante gilt (An arithmetical property of quadratic forms, Comment. Math. Helvet. Erscheint demnächst).

Wenn wir ein festes $w \in W$ auszeichnen und

$$w^2 - 3\tau - 2e = 4a_0\,, \quad w^2 - 3\tau + 2e = 4b_0$$

setzen, so können wir statt (2) auch schreiben:

$$(2') \qquad a = x^2 + wx + a_0\,, \quad b = y^2 + wy + b_0 \text{ mit beliebigen } x, y \in H$$

(wobei H die, modulo der Cotorsion reduzierte, ganzzahlige 2. Cohomologiegruppe ist und hier ein Produkt uv zweier Elemente $u, v \in H$ — also z. B. x^2, $wx, \ldots$ — ebenso wie $S(u,v)$ den Wert des 4-dimensionalen Cup-Produktes auf dem Grundzyklus von M bezeichnet).

2-Beine, d. h. geordnete Paare linear unabhängiger Richtungen, stellen Flächenelemente dar. Es gilt:

In M gibt es dann und nur dann Felder von 2-Beinen ohne Singularität (d. h. Paare von überall linear unabhängigen Richtungsfeldern), wenn $e = 0$ und $3\tau \in \Omega$ ist.

Auch die möglichen Indexsummen der Singularitäten von 2-Bein-Feldern werden bestimmt. Ferner werden Kriterien für die Existenz einer fastkomplexen Struktur sowie für die Parallelisierbarkeit von M angegeben. Alle Ergebnisse sind in (4.3 — 4.6) zusammengestellt.

Daß die Indexsummen (a, b) durch die Werte zweier Cohomologie-Polynome 2. Grades von der Art (2′) bestimmt sind, war bereits — übrigens auf einem anderen Wege als dem, den wir jetzt benutzen werden — in den Noten [8] und [9] von HOPF festgestellt worden; jedoch gelang damals die Bestimmung der Koeffizienten dieser Polynome nur in Spezialfällen, z. B. für die komplexe projektive Ebene, aber nicht für beliebige M. Der allgemeine Fall wurde dann von HIRZEBRUCH erledigt. Die ganze Untersuchung betrifft natürlich Faserbündel, Hindernisse und charakteristische Klassen. Wir werden in unserer Darstellung Sätze aus diesen Theorien ohne Kommentar benutzen; wir verweisen auf [12] (besonders für die Hindernis-Theorie) und auch auf [1, 2, 3, 6] (für Faserbündel und charakteristische Klassen). Die Tatsache, daß unsere Sätze, zu denen wir auf erst in den letzten Jahren erschlossenen Wegen gelangen, ganz im Rahmen der alten Poincaréschen Begriffe formuliert werden können (wie wir es oben getan haben), hat vielleicht keine besonders große prinzipielle Bedeutung (da sie sich kaum auf höhere Dimensionszahlen übertragen lassen dürfte); aber wir halten sie doch für bemerkenswert nicht nur als Kuriosum, sondern auch im Hinblick auf die Beziehungen zwischen alten Begriffen und neuen Methoden, die sich in ihr äußern.

Aus Gründen teils sachlicher, teils persönlicher Natur, die wir angedeutet haben, macht es uns besondere Freude, diese Arbeit Herrn BEHNKE zu widmen, dessen Interessen und dessen Wirksamkeit in so hohem Maße der gegenseitigen Durchdringung der „klassischen“ und der „modernen“ Mathematik sowie der Zusammenarbeit zwischen Mathematikern verschiedener Generationen gelten.

§ 1. Homomorphismen und charakteristische Klassen

1.1. Wie in [2] werden Faserbündel durch ein Symbol, meistens durch einen kleinen griechischen Buchstaben, angedeutet. Ist ξ ein Faserbündel, dann wird mit E_ξ der Totalraum und mit B_ξ die Basis von ξ bezeichnet. Es sei G eine kompakte Liesche Gruppe und ξ ein G-Prinzipalfaserbündel. Wenn G auf dem Raum F operiert, dann hat man bekanntlich das zu ξ assoziierte Faserbündel (ξ, F) mit F als Faser, dessen Totalraum $E_\xi \times_G F$ ist, das ist der Quotient von $E_\xi \times F$ modulo der Äquivalenzrelation $(x, f) \approx \approx (x \cdot g, g^{-1} \cdot f)$. Es sei G' eine weitere kompakte Liesche Gruppe und λ ein Homomorphismus von G in G'. Jedem G-Prinzipalfaserbündel ξ ist dann die λ-Erweiterung $\lambda_* \xi$ zugeordnet, das ist ein G'-Prinzipalfaserbündel, ebenfalls mit der Basis B_ξ, dessen Totalraum $E_\xi \times_G G'$ ist, wo G auf G' durch $g \cdot g' = = \lambda(g) \cdot g'$ operiert. Operiert G' auf F, dann operiert auch G auf F durch $g \cdot f = \lambda(g) \cdot f$ und der Totalraum von $(\lambda_* \xi, F)$ ist kanonisch homöomorph zum Totalraum von (ξ, F):

$$(E_\xi \times_G G') \times_{G'} F \cong E_\xi \times_G F\,.$$

Dieser Homöomorphismus ist fasertreu. Weiter werde an folgendes erinnert: Wenn ξ ein G-Prinzipalfaserbündel und U eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, dann ist E_ξ/U der Totalraum des zu ξ assoziierten Faserbündels mit G/U als Faser, wo G auf G/U durch Linkstranslationen operiert.

$$E_\xi/U = E_\xi \times_G G/U\,.$$

Dieses G/U-Faserbündel hat dann und nur dann einen Schnitt über B_ξ, wenn ξ die ι-Erweiterung eines U-Prinzipalfaserbündels über B_ξ ist, wo ι die Einbettung von U in G ist. — In [2] wird ein Verfahren zur Berechnung der charakteristischen Klassen von $\lambda_* \xi$ aus denen von ξ angegeben, das wir auf Homomorphismen von $\mathbf{SO}(4)$ in $\mathbf{SO}(3)$ und von $\mathbf{U}(2)$ in $\mathbf{SO}(3)$ anwenden werden. Wie üblich ist $\mathbf{SO}(k)$ die Gruppe der orthogonalen Abbildungen des $\mathbf{R}^k$ mit der Determinante 1 und $\mathbf{U}(k)$ die unitäre Gruppe im $\mathbf{C}^k$. Die in dieser Arbeit auftretenden G-Prinzipalfaserbündel haben folgende charakteristische Klassen:

i) $G = \mathbf{SO}(4)$. Man hat die Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_2(\xi) \in H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2)$ und $W_3(\xi) \in H^3(B_\xi, \mathbf{Z})$, ferner die Eulersche Klasse $W_4(\xi) \in H^4(B_\xi, \mathbf{Z})$ und die Pontrjaginsche Klasse $p_1(\xi) \in H^4(B_\xi, \mathbf{Z})$.

ii) $G = \mathbf{SO}(3)$. Man hat die Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_2(\xi) \in H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2)$ und $W_3(\xi) \in H^3(B_\xi, \mathbf{Z})$, ferner die Pontrjaginsche Klasse $p_1(\xi) \in H^4(B_\xi, \mathbf{Z})$.

iii) $G = \mathbf{U}(n)$. Man hat die Chernschen Klassen $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi, \mathbf{Z})$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

In i) und ii) ist $W_3 = \delta_* w_2$, wo δ_* der zur Koeffizientensequenz $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2 \to 0$ gehörige Homomorphismus $H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2) \to H^3(B_\xi, \mathbf{Z})$ ist. Also ist $2\,W_3 = 0$. Die Stiefel-Whitneyschen, die Eulerschen und die Chernschen Klassen können bekanntlich als erste Hindernisse gewisser assoziierter Faserbündel definiert werden [12]. Die Pontrjaginsche Klasse $p_1(\xi)$ ist gleich

German-Algebra

Invent. math. 73, 349–366 (1983)

Inventiones mathematicae

Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern

G. Faltings

Fachbereich Mathematik, Bergische Universitäts-Gesamthochschule Wuppertal, Gaußstr. 20, D-5600 Wuppertal 1, Bundesrepublik Deutschland

§ 1. Einleitung

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$, A eine über K definierte abelsche Varietät, $\pi=\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ die absolute Galois-Gruppe von K, l eine Primzahl. Dann operiert π auf dem Tate-Modul

$$T_l(A)=\varprojlim A[l^n](\bar{K}).$$

Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der folgenden Resultate:

a) Die Darstellung von π auf $T_l(A)\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l$ ist halbeinfach.

b) Die Abbildung

$$\mathrm{End}_K(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_l\to\mathrm{End}_\pi(T_l(A))$$

ist ein Isomorphismus.

c) Sei S eine endliche Menge von Stellen von K, $d>0$. Dann gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen d-fach polarisierter abelscher Varietäten über K, welche gute Reduktion außerhalb S haben.

a) und b) sind bekannt unter dem Namen Tate-Vermutung, c) als Shafarevich-Vermutung. Weiter weiß man ([9]), daß aus c) die Mordell-Vermutung folgt. Die Tate-Vermutung ist von Tate selbst für abelsche Varietäten über endlichen Körpern gezeigt worden. Zarhin verallgemeinerte dies auf Funktionenkörper ([15, 16]) über solchen, und unser Beweis ist eine Übertragung seiner Methoden auf den Zahlkörper-Fall. Das zur Übersetzung notwendige Wörterbuch hat Arakelov geliefert ([2]), und seine Methoden sind vom Verfasser ausgebaut worden ([5]). Kurz gesagt handelt es sich darum, „alles" mit hermiteschen Metriken zu versehen.

Der Beweis für c) erfolgt so, daß zunächst nur die Endlichkeit für Isogenie-Klassen gezeigt wird. Die grundlegende Idee dazu hat mir der Gutachter der „Inventiones" anläßlich der Veröffentlichung meiner Arbeit [6] mitgeteilt, und ich mußte sie nur noch von der Hodge-Theorie in die étale Kohomologie über-setzen. Ich möchte daher dem mir persönlich unbekannten Gutachter an dieser Stelle für seine Anregung herzlich danken.

Der Rest des Beweises von c) benutzt eine Variante der bei a) und b) verwendeten Methoden.

Die Arbeit beginnt zunächst mit einigen technischen Details über Höhen. Die Komplikationen ergeben sich daraus, daß meines Wissens noch kein guter Modulraum semiabelscher Varietäten über $\mathbb{Z}$ existiert. (Mit ähnlichen Problemen hat sich auch L. Moret-Bailly zu kämpfen, der die Verhältnisse über Funktionenkörpern untersucht ([7]).) Danach werden die sehr schönen Ergebnisse von Tate ([13]) über p-divisible Gruppen benutzt. Der Schluß ist dann wieder etwas technischer.

Ich habe viel über das Thema von L. Szpiro gelernt, dem ich an dieser Stelle für seine Einführung in diesen Problemkreis danke. P. Deligne hat mich auf eine Unstimmigkeit in der ursprünglichen Fassung der Arbeit aufmerksam gemacht.

§ 2. Semiabelsche Varietäten

Definition. Sei S ein Schema (oder ein algebraic stack). Eine semiabelsche Varietät der relativen Dimension g über S ist eine glatte algebraische Gruppe p: $G \to S$, so daß die Fasern von p zusammenhängend von der Dimension g sind, und Erweiterungen einer abelschen Varietät durch einen Torus.

Beispiel. Sei q: $C \to S$ eine stabile Kurve vom Geschlecht g ([4]). Dann ist

$$J = \mathrm{Pic}^{\mathrm{r}}(C/S) \to S$$

eine semiabelsche Varietät der relativen Dimension g.

Wir benötigen das folgende

Lemma 1. *Sei S normal, $U \subset S$ offen und dicht p_1: $A_1 \to S$ und p_2: $A_2 \to S$ zwei semiabelsche Varietäten, ϕ: $A_1/U \to A_2/U$ ein über U definierter Homomorphismus algebraischer Gruppen. Dann läßt sich ϕ eindeutig auf ganz S fortsetzen.*

Beweis. Dies ist wohlbekannt, falls S Spektrum eines kompletten diskreten Bewertungsringes ist. Im allgemeinen reduziert man sofort auf S noethersch und exzellent, und bezeichnet mit

$$X \subseteq A_1 \times_s A_2$$

den Abschluß des Graphen von ϕ.

Nach Basiswechsel mit geeigneten Bewertungsringen sieht man, daß die Projektion pr_1: $X \to A_1$ eigentlich ist, und daß ihre Fasern nur einen Punkt besitzen. Da A_1 normal ist, muß pr_1 ein Isomorphismus sein, und X der Graph der eindeutig bestimmten Fortsetzung von ϕ. (Eindeutigkeit folgt zum Beispiel durch Betrachtung von Torsionspunkten, oder auf tausend andere Arten.)

Definition. Sei p: $A \to S$ eine semiabelsche Varietät der relativen Dimension g, s: $S \to A$ der Nullschnitt.

Setze:

$$\omega_{A/S} = s^*(\Omega^g_{A/S}),$$

$$\omega_{A/S} \text{ ist ein Geradenbündel auf } S.$$

Bemerkungen. a) Wenn p eigentlich ist, so ist $\omega_{A/S} \cong p_*(\Omega^g_{A/S})$.

b) $\omega_{A/S}$ kommutiert mit Basiswechsel.

c) Wenn $A = \mathrm{Pic}^\tau(C/S)$ mit einer stabilen Kurve $q\colon C \to S$, so ist $\omega_{A/S} \cong \Lambda^g q_*(\omega_{C/S})$, wobei $\omega_{C/S}$ den relativen dualisierenden Modul bezeichnet.

d) Wenn $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ und p eigentlich ist (d.h., $A/\mathbb{C}$ ist eine komplexe abelsche Varietät), so besitzt

$$\omega_{A/S} \cong \Gamma(A, \Omega^g_{A/\mathbb{C}})$$

ein kanonisches hermitesches Skalarprodukt:

Wenn α, β holomorphe Differentialformen auf A sind, so setze

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \left(\frac{i}{2}\right)^g \int_A \alpha \wedge \bar{\beta}.$$

Wir benötigen einige Tatsachen über die Modulräume stabiler Kurven und abelscher Varietäten. Dazu scheint die Sprache der „algebraic stacks" am angemessensten zu sein. Falls dem Leser diese Notation zu abstrakt erscheint, so möge er die folgenden Überlegungen durchführen:

Es geht eigentlich um Endlichkeitsaussagen.

Wenn $\mathfrak{S}$ einer der demnächst einzuführenden algebraic stacks ist, und S den zugehörigen groben Modulraum bezeichnet, so gibt es stets eine offene Überdeckung

$$S = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$$

und endlich surjektive Abbildungen $V_i \to U_i$, so daß über V_i das „universelle Objekt zu $\mathfrak{S}$" existiert. Man kann dann alle Rechnungen in den V_i durchführen.

Nun zu den hier verwendeten algebraic stacks.

1. $\overline{\mathfrak{M}}_g$ klassifiziere die stabilen Kurven vom Geschlecht g ([4]). $\overline{\mathfrak{M}}_g$ ist eigentlich über $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, und der zugehörige grobe Modulraum heiße $\bar{M}_g$.

2. $\mathfrak{A}_g$ klassifiziere die prinzipal-polarisierten abelschen Varietäten der relativen Dimension g, und A_g sei der zugehörige Modulraum.

$\mathfrak{A}_g$ ist nicht eigentlich über $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, aber die folgenden Tatsachen sind bekannt:

a) Wenn

$$p\colon A \to \mathfrak{A}_g$$

die universelle abelsche Varietät über $\mathfrak{A}_g$ bezeichnet, so gibt es ein $r > 0$, für welches $(\omega_{A/\mathfrak{A}_g})^{\otimes r}$ ein sehr amples Geradenbündel auf $A_g/\mathbb{Q}$ definiert ([3]). Sei $\bar{A}_g/\mathbb{Q}$ der Zariski-Abschluß von $A_g/\mathbb{Q}$ in dem zugehörigen projektiven Raum $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$, $\bar{A}_g/\mathbb{Z}$ der Zariski-Abschluß in $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}$, und $\mathcal{M}$ das Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$ auf $\bar{A}_g/\mathbb{Z}$. ($\mathcal{M}$ setzt auf $\bar{A}_g/\mathbb{Q}$ $(\omega_{A/\mathfrak{A}_g})^{\otimes r}$ fort.)

b) Es gibt über $\mathbb{C}$ einen eigentlichen dominanten Morphismus

$$\phi\colon \mathfrak{N} \to \bar{A}_g/\mathbb{C},$$

so daß über $\mathfrak{N}$ eine semiabelsche Varietät existiert, welche die universelle abelsche Varietät über $\mathfrak{A}_g$ fortsetzt (siehe [8], §9). Außerdem ist bekannt, daß $\omega^{\otimes r}$ dieser semiabelschen Varietät isomorph zu $\phi^*(\mathcal{M})$ ist. (Hierzu muß man direkt rechnen, siehe meine Ausführungen dazu in [6], §2.)

Lemma 2. *Es gibt über* Spec($\mathbb{Z}$) *einen eigentlichen algebraic stack* $\mathfrak{Z}$, *eine offene Teilmenge* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{Z}$ *und einen eigentlichen Morphismus* $\psi\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{A}_g$, *welcher sich zu einem* $\bar{\psi}\colon \mathfrak{Z}/\mathbb{Q} \to \bar{A}_g/\mathbb{Q}$ *fortsetzt, so daß über* $\mathfrak{Z}$ *die folgenden Objekte existieren:*

a) *Eine stabile Kurve* $q\colon C \to \mathfrak{Z}$.

b) *Ein Untergeradenbündel (=lokal direkter Sumand)* $\mathscr{L} \subseteq \Lambda^g q_*(\omega_{C/\mathbb{Z}})$.

c) *Über* $\mathfrak{U}$ *ein Paar von Gruppenhomomorphismen*

$$\alpha\colon \operatorname{Pic}^\tau(C/\mathfrak{Z}) \to \psi^*(A),$$
$$\beta\colon \psi^*(A) \to \operatorname{Pic}^\tau(C/\mathfrak{Z})$$

mit

$$\alpha \circ \beta = \textit{Multiplikation mit einem } d \in \mathbb{N},\ d \neq 0.$$

(Dabei sei A wieder die universelle abelsche Varietät über $\mathfrak{A}_g$.)

d) *Auf* $\mathfrak{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ *existiert ein Isomorphismus* $\mathscr{L}^{\otimes r} = \bar{\psi}^*(\mathcal{M})$, *und* $\mathscr{L}$ *ist über* $\mathfrak{U}/\mathbb{Q}$ *das Bild von*

$$\alpha^*\colon \psi^*(\omega_{A/\mathfrak{A}_g}) \to \Lambda^g q_*(\omega_{C/Z}).$$

Der daraus resultierende Isomorphismus (über $\mathfrak{U}/\mathbb{Q}$)

$$\psi^*(\omega_{A/\mathfrak{A}_g})^{\otimes r} \cong \psi^*(\mathcal{M})$$

ist ψ^**-Pullback des bei der Konstruktion von* $\mathcal{M}$ *angegebenen Isomorphismus über* A_g.

Beweis. In dem generischen Punkte von $\mathfrak{A}_g$ ist die zugehörige abelsche Varietät Quotient einer Jacobischen. Die zugehörige Kurve entspricht einer rationalen Abbildung von $\mathfrak{A}_g$ in $\overline{\mathfrak{M}}_{\tilde{g}}$, für ein $\tilde{g}$.

Wenn man den Graphen dieser Abbildung betrachtet, so erhält man (mit Hilfe einiger trivialer Zusatzüberlegungen) einen ersten Kandidaten $\mathfrak{Z}$, so daß schon a) und (nach Lemma 1) c) erfüllt sind. $\mathscr{L}$ ist dann über $\mathfrak{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ durch d) schon festgelegt, und liefert eine rationale Abbildung von $\mathfrak{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ in ein geeignetes projektives Bündel über $\mathfrak{Z}$. Man ersetzt $\mathfrak{Z}$ durch die Normalisierung des Abschlusses des zugehörigen Graphen, und dann sind auch b) und der zweite Teil von d) erfüllt. Zum Rest von d) ist zu vermerken, daß man den gesuchten Isomorphismus schon über $\mathfrak{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ konstruiert hat, und man muß nur noch die Fortsetzbarkeit auf $\mathfrak{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ zeigen. Dazu kann man den Grundkörper von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{C}$ erweitern, und es reicht, die Fortsetzbarkeit für ein $\tilde{\mathfrak{Z}}/\mathbb{C}$ zu zeigen, welches dominant und eigentlich über $\mathfrak{Z}$ liegt.

Mit Hilfe des weiter oben eingeführten $\phi\colon \mathfrak{N} \to \bar{A}_g/\mathbb{C}$ konstruiert man ein normales $\tilde{\mathfrak{Z}}$, so daß $\psi^*(A)$ sich auf $\tilde{\mathfrak{Z}}$ zu einer semiabelschen Varietät fortsetzt. Nach Lemma 1 kann man auch α und β fortsetzen, und diese liefern den gewünschten Isomorphismus über $\tilde{\mathfrak{Z}}$.

Korollar. *Es gibt eine natürliche Zahl* $e > 0$ *mit der folgenden Eigenschaft:*

German - Analysis

Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.

(Aus einem Briefe an Herrn Hamburger[1].)

Von

Carl Siegel in Göttingen.

Sie haben in Ihrer Arbeit: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Erste Mitteilung) [Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 240 bis 254] folgenden Satz bewiesen:

Es sei $G(s)$ eine ganze transzendente Funktion endlichen Geschlechts von $s=\sigma+ti$, $P(s)$ ein Polynom und $f(s)=\frac{G(s)}{P(s)}$ für $\sigma>1$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

darstellbar. Ist dann

$$f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=g(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}, \tag{2}$$

wo $g(1-s)$ in eine für $\sigma<-\alpha<0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$g(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{1-s}} \tag{3}$$

entwickelt werden kann, so ist $f(s)=a_1\zeta(s)$.

Ich gebe hier einen Beweis, der wohl kürzer und einfacher als der Ihrige ist. Er benutzt nur die beiden bekannten Formeln

---

[1]) Herr Hamburger hat inzwischen in den Math. Ann. **85** den Inhalt eines in Hamburg am 5. Oktober 1921 gehaltenen Vortrages publiziert, in welchem er einen in wesentlichen Punkten mit dem hier veröffentlichten übereinstimmenden Beweis gegeben hat. Ich betone, daß Herr Hamburger von meinen Untersuchungen vor Empfang meines Briefes keine Kenntnis hatte. (Zusatz bei der Korrektur.)

$$(4) \qquad e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} y^{-s}\,\Gamma(s)\,ds \qquad (y > 0),$$

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-a^2 x - \frac{b^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-2ab} \qquad (a > 0,\ b \geqq 0).$$

Die absolute Konvergenz von (1) braucht dabei nicht für $\sigma > 1$, sondern nur für $\sigma > 2 - \theta$ $(\theta > 0)$ vorausgesetzt zu werden.

Für jedes $x > 0$ ist nach (1) und (2)

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,x^{-\frac{s}{2}}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} g\,(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\,x^{-\frac{s}{2}}\,ds = S_2.$$

Hier ist links wegen der Beschränktheit von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ für $\sigma = 2$ Vertauschung von Integration und Summation gestattet; nach (4) ist daher

$$(6) \qquad S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} (\pi n^2 x)^{-s}\,\Gamma(s)\,ds = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\pi n^2 x}.$$

Aus den Voraussetzungen über $f(s)$ und (2) folgt die Existenz zweier Zahlen $T > 0$, $\gamma > 0$, so daß im Gebiet $-\alpha - 1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \geqq T$ die Funktion $g\,(1-s)$ regulär und $O(e^{|t|^\gamma})$ ist. Ferner ist sie wegen (3) auf der Geraden $\sigma = -\alpha - 1$ beschränkt; für $\sigma = 2$ ist sie $O(|t|^{\frac{3}{2}})$, wegen (1), (2) und der dort gültigen Relation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = O(\,|t|^{\frac{3}{2}}).$$

Folglich gilt $g\,(1-s) = O(|t|^{\frac{3}{2}})$ für $|t| \geqq T$, $-\alpha - 1 \leqq \sigma \leqq 2$; und es ist

$$(7) \qquad S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-1-\infty i}^{-\alpha-1+\infty i} g(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\,x^{-\frac{s}{2}}\,ds + \sum_{\nu=1}^{m} R_\nu,$$

wo $R_1, \ldots, R_m$ die Residua des Integranden bei seinen im Gebiet $-\alpha - 1 < \sigma < 2$ gelegenen Polen $s_1, \ldots, s_m$ bedeutet. Aus (2) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{m} R_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-\frac{s_\nu}{2}}\,Q_\nu(\log x) = Q(x),$$

wo Q_ν ein Polynom in $\log x$ bedeutet, und

$$\Re s_\nu \leqq 2-\theta \qquad (\nu=1,\ldots,m). \tag{8}$$

Wegen (3) liefert (7)

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+2-\infty i}^{\alpha+2+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{1-s}{2}}\, ds + Q(x) \tag{9}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x).$$

Aus (6) und (9) folgt

$$2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x} = \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x) \qquad (x>0).$$

Diese Gleichung multipliziere ich für festes $t>0$ mit $e^{-\pi t^2 x}$ und integriere nach x von 0 bis ∞; da die Reihe der Integrale über die absoluten Beträge der Glieder konvergiert, gliedweise Integration also erlaubt ist, so folgt nach (5)

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\pi(t^2+n^2)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{t}e^{-2\pi n t} + \int_0^{\infty} Q(x)e^{-\pi t^2 x}\,dx. \tag{10}$$

Hierin darf das Integral auf der rechten Seite gliedweise ausgeführt werden, denn nach (8) ist in $Q(x)$ jeder Term $O(x^{-1+\frac{\theta}{4}})$ für $x\to 0$; es ist also

$$\int_0^{\infty} Q(x)e^{-\pi t^2 x}\,dx = \frac{1}{t^2}\int_0^{\infty} Q\left(\frac{x}{t^2}\right)e^{-\pi x}\,dx = \sum_{\nu=1}^{m} t^{s_\nu-2}H_\nu(\log t) = H(t), \tag{11}$$

wo H_ν ein Polynom in $\log t$ bedeutet.

(10) und (11) ergeben

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{t+ni}+\frac{1}{t-ni}\right) - \pi t H(t) = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2\pi n t}. \tag{12}$$

In (12) ist

1. die Reihe auf der linken Seite in jedem endlichen Gebiet der t-Ebene exkl. $t=\pm ki$ $(k=1,2,\ldots)$ gleichmäßig konvergent; sie ist also die Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion mit *Polen erster Ordnung in $t=\pm ki$ vom Residuum a_k*,

2. $H(t)$ eine in der von 0 nach $-\infty$ aufgeschnittenen t-Ebene eindeutige *für* $t \neq 0$ *reguläre Funktion von* t,

3. die rechte Seite für $\Re t > 0$ eine *periodische Funktion von* t *mit der Periode* i.

Folglich sind die Residua in den Punkten ki und $(k+1)i$ gleich, d. h. $a_k = a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $a_k = a_1$,

$$f(s) = a_1 \zeta(s),$$

q. e. d.

Göttingen, 30. September 1921.

(Eingegangen am 2. 10. 1921.)