START HERE

APPLIED MATH

Russian Exam Fall 2000

ГЛАВА IV

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Линейные итеративные процессы

Классический процесс Лиувилля — Неймана вычисления решения линейного неоднородного уравнения

$$x = Ax + f \tag{1}$$

строится следующим образом. Задаваясь произвольным элементом x_0, находят последовательные приближения по формуле

$$x_{n+1} = Ax_n + f.$$

Последовательность x_n согласно теореме V (Банаха) сходится к решению уравнения (1), если $\|A\| < 1$. Недостатками этого метода являются: во-первых, ограниченность круга задач, в которых он может быть использован, так как условие сходимости налагает весьма жесткое условие $\|A\| < 1$; во-вторых, даже в тех задачах, где этот процесс сходится, часто оказывается, что из-за медленной сходимости для фактического вычисления решения с удовлетворительной точностью приходится делать очень большое число приближений. В связи с этим в последние годы разработаны различные методы ускорения сходимости итеративных процессов, позволяющие как расширить круг задач, решаемых итеративными методами, так и сократить количество вычислений.

Методы ускорения сходимости итеративных процессов можно разбить на два типа. К первому типу относятся методы, в которых исходное уравнение (1) заменяется ему эквивалентным

$$x = P(A)\,x + Q(A)\,f,$$

где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$—полиномы, причем $Q(\lambda)=\frac{1-P(\lambda)}{1-\lambda}$, $P(1)=1$.

Полином $P(\lambda)$ подбирается так, чтобы норма оператора $P(A)$ была возможно меньше. В случае самосопряженного оператора норму $P(A)$ можно оценить с помощью соотношения

$$P(A)x=\int_m^M P(\lambda)\,d\mathcal{E}_\lambda x.$$

Если $|P(\lambda)|$ в промежутке $[m, M]$ не превосходит q, то

$$\|P(A)\|\leqslant q.$$

Поэтому в работах М. Гавурина [1] и Г. Шортли [1] предлагается использовать полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля в промежутке $[m, M]$, содержащем весь спектр оператора.

Ко второму типу относятся методы, в которых предлагается, не меняя исходного уравнения, использовать ряд вычисленных последовательных приближений для непосредственного нахождения решения. Идея подобных методов была предложена Л. Люстерником [1].

При применении этих методов исходят из следующих соображений: решается уравнение (1) методом последовательных приближений

$$x_{k+1}=Ax_k+f.$$

Оператор A будем считать для простоты самосопряженным и вполне непрерывным. Погрешность k-го приближения $\eta_k=x_*-x_k$ выражается формулой

$$\eta_k=A^k\eta_0,$$

поэтому, если разложить η_0 по собственным элементам оператора A:

$$\eta_0=\sum_{s=0}^{\infty}a_s u_s,$$

то

$$\eta_k=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_s^k a_s u_s.$$

При возрастании числа итераций члены, соответствующие малым по модулю собственным значениям, будут быстро убывать и при достаточно большом k

$$\left\|\sum_{s=n}^{\infty}\lambda_s^k a_s u_s\right\|^2 \leqslant |\lambda_n|^k \cdot \sqrt{\sum_{s=n}^{\infty} a_s^2} \approx 0,$$

No need to copy formulae into the translation

и

$$\eta_k \approx \sum_{s=0}^{n-1}\lambda_s^k a_s u_s,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ — наибольшие по модулю собственные числа.

Аналогичный факт имеет место и для последовательности поправок $\varepsilon_k = x_{k+1} - x_k$. А именно:

$$\varepsilon_k = A^k \varepsilon_0,$$

и при достаточно больших k

$$\varepsilon_k \approx \sum_{s=0}^{n-1}\lambda_s^k (\varepsilon_0, u_s)\, u_s,$$

где мы считаем

$$\left\|\sum_{s=n}^{\infty}\lambda_s^k (\varepsilon_0, u_s)\, u_s\right\| \leqslant |\lambda_n|^k \sqrt{\sum_{s=n}^{\infty}(\varepsilon_0, u_s)^2} \approx 0.$$

Пусть теперь уравнение n-й степени

$$G(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \lambda^k \qquad (\alpha_0 = 1)$$

имеет своими корнями n наибольших по модулю собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varepsilon_k \approx \sum_{s=0}^{n-1} G(\lambda_s)(\varepsilon_0, u_s)\, u_s = 0$$

и из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varepsilon_k = 0$$

тем или другим способом определяются коэффициенты α_k.

Теперь может быть легко найдено искомое решение. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k \approx \sum_{s=0}^{n-1} G(\lambda_s) a_s u_s = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_* - x_k) \approx 0.$$

Отсюда

$$x \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}{G(1)}.$$

Этот способ ускорения сходимости итеративного процесса иногда называют методом экстраполяции.

END HERE

§ 2. Метод моментов и ускорение сходимости линейных итеративных процессов

Вернемся к уравнению

$$x = Ax + f, \tag{1}$$

и будем решать его обычным итеративным процессом, строя последовательные приближения по формуле

$$x_{k+1} = Ax_k + f.$$

Исходное приближение x_0 можно выбрать произвольно.

В процессе приближений удобно вычислять не сами приближения, а поправки к ним. Положим

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k.$$

Написав формулы двух последовательных приближений

$$x_k = Ax_{k-1} + f, \quad x_{k+1} = Ax_k + f$$

и вычтя одну из другой, получим

$$\varepsilon_k = A\varepsilon_{k-1}.$$

Таким образом, при использовании итеративного процесса мы фактически вычисляем ряд итераций элемента ε_0

ANALYSIS

START HERE

ГЛАВА ПЕРВАЯ

РАВНОМЕРНЫЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ (П.-П.) ФУНКЦИИ

§ 1. Определение и элементарные свойства равномерных п.-п. функций

1. В этом параграфе мы рассмотрим два различных, эквивалентных определения равномерных*) п.-п. функций. Первое определение, которое было положено в основу теории п.-п. функций Г. Бором, связано со следующим обобщением понятия периода:

Число τ *называется* ε-*почти-периодом* (ε-*смещением*) *функции* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, *если для всех действительных* x *выполняется неравенство*

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый период периодической функции можно рассматривать так же, как почти-период, соответствующий любому $\varepsilon > 0$. Далее заметим, что если p—период функции $f(x)$, то любое число, кратное p, есть также период функции $f(x)$. Поэтому периодическая функция имеет сколь угодно большие периоды.

Таким образом, если мы желаем естественно обобщить понятие периодичности, то следует добиваться того, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовали сколь угодно большие ε-почти-периоды. Оказалось, однако, что ограничиться только этим последним требованием нельзя. Г. Бор

*) В дальнейшем мы увидим, что и среди обобщенных п.-п. функций имеются непрерывные функции. Поэтому термин «непрерывная п.-п. функция» неудобен, и мы предпочли термин «равномерная п.-п. функция».

показал*), что класс функций, обладающих для каждого $\varepsilon > 0$ сколь угодно большими ε-почти-периодами, неинвариантен относительно сложения. Поэтому требования, налагаемые на почти-периоды, следует еще усилить. С этой целью мы введем понятие относительно плотного множества действительных чисел.

Множество E действительных чисел называется относительно плотным, если существует такое число $l > 0$, что в каждом интервале действительной оси длины l $(\alpha < x < \alpha + l)$ найдется хотя бы одно число множества E.

Например, числа арифметической прогрессии np ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, p — фиксированное положительное число) образуют относительно плотное множество чисел, точно так же, как и числа вида $\pm\sqrt{n}$ (n — целое положительное число). Напротив, числа вида $\pm n^2$ не образуют относительно плотного множества чисел.

Определение 1.1.1 (основное определение). *Непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется равномерной п.-п. функцией, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти-периодов функции $f(x)$.*

Иначе говоря: функция $f(x)$ называется равномерной п.-п. функцией, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Это определение п.-п. функций принадлежит Г. Бору. Покажем, что если при $\varepsilon \to 0$ числа $l(\varepsilon)$ остаются ограниченными, то $f(x)$ — обязательно периодическая функция. В самом деле, если числа $l(\varepsilon)$ ограничены числом $l < \infty$, то в интервале $(l, 2l)$ содержатся почти-периоды функции $f(x)$, отвечающие любому $\varepsilon > 0$. Предельная точка этих почти-периодов, которая существует в силу принципа Больцано-Вейерштрасса, будет, очевидно, периодом функции $f(x)$, и притом не равным нулю.

Отметим ряд элементарных свойств равномерных п.-п. функций, которые следуют непосредственно из их определения.

*) H. Bohr [1].

1) *Если* $f(x)$—*равномерная п.-п. функция, то* $\alpha f(x)$, $f(x+c)$ (c—действительное число, α—комплексное число) *суть также равномерные п.-п. функции.*

2) *Если* $f(x)$—*равномерная п.-п. функция, то и* $|f(x)|$—*равномерная п.-п. функция.* (Это следует из элементарного неравенства $\|f(x+\tau)|-|f(x)\|\leqslant|f(x+\tau)-f(x)|$.)

3) *Если* $f(x)$—*равномерная п.-п. функция и*

$$\inf_{-\infty<x<\infty}|f(x)|=\gamma>0,$$

то $\frac{1}{f(x)}$—*также равномерная п.-п. функция.*

(Действительно,

$$\left|\frac{1}{f(x+\tau)}-\frac{1}{f(x)}\right|=\frac{|f(x+\tau)-f(x)|}{|f(x+\tau)|\cdot|f(x)|}\leqslant\frac{1}{\gamma^2}|f(x+\tau)-f(x)|.$$

Поэтому каждый $\gamma^2\varepsilon$-почти-период $f(x)$ есть ε-почти-период $\frac{1}{f(x)}$.)

Легко доказать более общее предложение. Обозначим через E множество значений п.-п. функции $f(x)$. Тогда, *если функция* $F(z)$ *равномерно непрерывна на множестве* E, *то* $\varphi(x)=F[f(x)]$ *есть равномерная п.-п. функция.*

В самом деле, если τ есть ε-почти-период $f(x)$, то

$$\varphi(x+\tau)-\varphi(x)=F[f(x)+\varepsilon(x)]-F[f(x)],$$

где $|\varepsilon(x)|<\varepsilon$. Поэтому из равномерной непрерывности функции $F(z)$ следует, что

$$\sup_x|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, что и доказывает равномерную почти-периодичность функции $F[f(x)]$. END HERE

~~Следующие два свойства п.-п. функций менее элементарны. Так как в дальнейшем они играют существенную роль, то мы их сформулируем как отдельные теоремы.~~

F

Algebra

Start HERE

ГЛАВА VII

СТРУКТУРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ)

Изложенная в предыдущей главе аналитическая теория элементарных делителей дала нам возможность для любой квадратной матрицы определить подобную ей матрицу, имеющую «нормальную» или «каноническую» форму. С другой стороны, в главе III мы видели, что поведение линейного оператора в n-мерном пространстве в различных базисах задается при помощи класса подобных матриц. Наличие в этом классе матрицы, имеющей нормальную форму, тесно связано с важными и глубокими свойствами линейного оператора в n-мерном пространстве. Изучению этих свойств посвящена настоящая глава. Исследование структуры линейного оператора приводит нас независимо от содержания предыдущей главы к теории преобразования матрицы к нормальной форме. Поэтому содержание настоящей главы может быть названо *геометрической теорией элементарных делителей*[1]).

§ 1. Минимальный многочлен вектора, пространства (относительно заданного линейного оператора)

Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\boldsymbol{R}$ над полем K и линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в этом пространстве.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор из $\boldsymbol{R}$. Составим ряд векторов

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\ \ldots \tag{1}$$

В силу конечномерности пространства найдется такое целое число $p\ (0 \leqslant p \leqslant n)$, что векторы $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \ldots,\ \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}$ линейно независимы, а $\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{x}$ есть линейная комбинация этих векторов с коэффициентами из поля K:

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{x} = -\gamma_1\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x} - \gamma_2\boldsymbol{A}^{p-2}\boldsymbol{x} - \ldots - \gamma_p\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

Составим многочлен $\varphi(\lambda) = \lambda^p + \gamma_1\lambda^{p-1} + \ldots + \gamma_{p-1}\lambda + \gamma_p$. Тогда равенство (2) запишется так:

$$\varphi(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = 0. \tag{3}$$

Всякий многочлен $\varphi(\lambda)$, для которого имеет место равенство (3), мы будем называть *аннулирующим многочленом для вектора* $\boldsymbol{x}$[2]). Но нетрудно

[1]) В основу излагаемой здесь геометрической теории элементарных делителей положена статья автора [60а]. Другие геометрические построения теории элементарных делителей см. в [13], §§ 96—99, а также [21] и [37б].

[2]) Конечно, подразумевается: относительно данного оператора $\boldsymbol{A}$. Это обстоятельство мы для краткости в определении не оговариваем, поскольку на протяжении всей этой главы мы будем иметь дело с одним оператором $\boldsymbol{A}$.

видеть, что из всех аннулирующих многочленов для вектора x построенный нами многочлен является аннулирующим многочленом наименьшей степени со старшим коэффициентом 1. Такой многочлен мы будем называть *минимальным аннулирующим многочленом вектора* x или просто *минимальным многочленом вектора* x.

Заметим, что *произвольный аннулирующий многочлен* $\tilde{\varphi}(\lambda)$ *вектора* x *делится нацело на минимальный многочлен* $\varphi(\lambda)$.

В самом деле, пусть

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\varphi(\lambda)\varkappa(\lambda)+\rho(\lambda),$$

где $\varkappa(\lambda)$, $\rho(\lambda)$ — частное и остаток от деления $\tilde{\varphi}(\lambda)$ на $\varphi(\lambda)$. Тогда

$$\tilde{\varphi}(A)\,x=\varkappa(A)\,\varphi(A)\,x+\rho(A)\,x=\rho(A)\,x$$

и, следовательно, $\rho(A)\,x=0$. Но степень остатка $\rho(\lambda)$ должна быть меньше степени минимального многочлена $\varphi(\lambda)$. Значит, $\rho(\lambda)\equiv 0$.

Из доказанного предложения следует, в частности, что каждому вектору x отвечает *только один* минимальный многочлен.

Выберем в пространстве R некоторый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Обозначим через $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$ минимальные многочлены базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а через $\psi(\lambda)$ — наименьшее общее кратное этих многочленов ($\psi(\lambda)$ берем со старшим коэффициентом 1). Тогда $\psi(\lambda)$ будет аннулирующим многочленом для всех базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Так как произвольный вектор $x \in R$ представляется в виде $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, то

$$\psi(A)\,x=x_1\psi(A)\,e_1+x_2\psi(A)\,e_2+\ldots+x_n\psi(A)\,e_n=0,$$

т. е.

$$\psi(A)=0. \tag{4}$$

Многочлен $\psi(\lambda)$ является *аннулирующим многочленом для всего пространства* R. Пусть $\tilde{\psi}(\lambda)$ — произвольный аннулирующий многочлен для всего пространства R. Тогда $\tilde{\psi}(\lambda)$ будет аннулирующим многочленом для базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Следовательно, $\tilde{\psi}(\lambda)$ должен быть общим кратным для минимальных многочленов $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$ этих векторов, и потому многочлен $\tilde{\psi}(\lambda)$ должен делиться на н а и м е н ь ш е е общее кратное $\psi(\lambda)$ без остатка. Отсюда следует, что из всех аннулирующих многочленов для всего пространства R построенный нами многочлен $\psi(\lambda)$ имеет наименьшую степень и старший коэффициент 1. Такой многочлен однозначно определяется заданием пространства R и оператора A и называется *минимальным многочленом пространства* R[1]). Единственность минимального многочлена пространства R следует из установленного выше положения: *произвольный аннулирующий многочлен* $\tilde{\psi}(\lambda)$ *пространства* R *делится нацело на минимальный многочлен* $\psi(\lambda)$. Хотя само построение минимального многочлена $\psi(\lambda)$ было связано с определенным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, однако многочлен $\psi(\lambda)$ не зависит от выбора этого базиса (это вытекает из единственности минимального многочлена для пространства R).

[1]) Если оператору A в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответствует матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$, то аннулирующий или минимальный многочлен пространства R (относительно A) будет аннулирующим или соответственно минимальным многочленом матрицы A и наоборот. Ср. с гл. IV, § 6.

END HERE

Russian 802

Algebra

ГЛАВА III

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ (ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА)

В этой главе мы будем изучать произвольные линейные преобразования в комплексном линейном пространстве. Мы решим вопрос о разыскании базиса, в котором матрица линейного преобразования имела бы возможно более простой вид. Для произвольного линейного преобразования не существует, вообще говоря, базиса, в котором матрица этого преобразования была бы диагональной. (Такой базис существует лишь тогда, когда данное преобразование имеет n линейно независимых собственных векторов, см. § 10.) Тем не менее нам удастся найти базис, в котором матрица линейного преобразования достаточно проста — имеет так называемую жорданову нормальную форму.

Читателя может поразить следующая кажущаяся несообразность. Мы изучаем в этой главе линейные преобразования в аффинном пространстве. Тем не менее мы пользуемся понятиями ортогональности, сопряжённого преобразования, введёнными нами пока лишь в эвклидовом пространстве. Таким образом, рассматривая линейное преобразование в аффинном пространстве, мы должны ввести в этом пространстве предварительно каким-либо способом скалярное произведение. На самом же деле в этом нет никакой необходимости. Вместо того чтобы вводить скалярное произведение, можно воспользоваться введённым в § 23 понятием ортогонального дополнения и сопряжённого преобразования в аффинном пространстве. Формулировки и доказательства теорем настоящей главы остаются в этом случае без изменений. При этом все теоремы имеют место не только в комплексном пространстве, но и в пространстве над любым алгебраически замкнутым полем.

Эта глава состоит из шести параграфов. Первые два из них (§§ 17 и 18) являются вспомогательными для дальнейшего. Однако их содержание (особенно § 18) представляет и самостоятельный интерес.

Мы будем рассматривать эвклидово пространство, так как не предполагаем, что читатель знаком с изложенным в § 23 гл. 4 понятием сопряжённого пространства.

§ 17. Вспомогательные сведения о линейных подпространствах

1. Сумма и пересечение подпространств.

Определение 1. *Пусть R_1 и R_2 — подпространства линейного пространства R. Совокупность всех векторов x, представимых в виде $x = y + z$, где $y \in R_1$, а $z \in R_2$, называется суммой подпространств R_1 и R_2.*

Сумма подпространств R_1 и R_2 обозначается $R_1 + R_2$. Легко видеть, что сумма двух подпространств есть снова подпространство. Действительно, если

$$x_1,\ x_2 \in R_1 + R_2,$$

т. е.

$$x_1 = y_1 + z_1,\ x_2 = y_2 + z_2;\ y_1, y_2 \in R_1,\ z_1, z_2 \in R_2,$$

то

$$x_1 + x_2 = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2);$$
$$y_1 + y_2 \in R_1, \quad z_1 + z_2 \in R_2,$$
$$\lambda x_1 = \lambda (y_1 + z_2) = \lambda y_1 + \lambda z_1;$$
$$\lambda y_1 \in R_1,\ \lambda z_1 \in R_2,$$

т. е.

$$x_1 + x_2 \in R_1 + R_2 \quad \text{и} \quad \lambda x_1 \in R_1 + R_2.$$

Понятие суммы двух подпространств непосредственно обобщается на случай любого конечного числа подпространств. Именно, суммой подпространств $R_1, R_2, \ldots, R_k$ пространства R называется совокупность всех векторов вида

$$x = y_1 + y_2 + \ldots + y_k; \quad y_i \in R_i,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Определение 2. *Пусть R_1 и R_2 — подпространства линейного пространства R. Совокупность векторов, принадлежащих одновременно к R_1 и к R_2, называется пересечением подпространств R_1 и R_2 и обозначается $R_1 \cap R_2$.*

Легко видеть, что пересечение подпространств есть снова линейное подпространство пространства R.

Примеры: 1. R_1 и R_2 — две различные прямые, проходящие через начало координат в трёхмерном пространстве R. Тогда $R_1 + R_2$ — плоскость, содержащая эти две прямые. $R_1 \cap R_2$ состоит лишь из 0, т. е. есть нулевое подпространство,

2. R — трёхмерное пространство, R_1 и R_2 — две различные плоскости, проходящие через 0. Тогда $R_1+R_2=R$, а $R_1 \cap R_2$ — прямая, проходящая через 0, т. е. одномерное подпространство.

Между приведёнными в примерах 1 и 2 суммами подпространств имеется следующее существенное различие.

В первом из этих примеров каждый вектор из R_1+R_2 представим лишь единственным способом как сумма векторов из R_1 и R_2. В примере 2 это не так. Действительно, пусть x_0 — какой-либо ненулевой вектор, лежащий в пересечении плоскостей R_1 и R_2. Если вектор $x \in R = R_1+R_2$ записывается в виде

$$x = y + z, \quad y \in R_1, \ z \in R_2,$$

то его можно представить также в виде

$$x = (y + x_0) + (z - x_0),$$

причём $y + x_0 \in R_1$, $z - x_0 \in R_2$ (читателю рекомендуется сделать чертёж).

Нетрудно доказать следующее:

Пусть R_0 есть сумма подпространств R_1 и R_2 пространства R. Для того чтобы каждый вектор из R_0 мог быть разложен на сумму векторов из R_1 и R_2 только одним способом, необходимо и достаточно, чтобы пересечение подпространств R_1 и R_2 было равно нулю: $R_1 \cap R_2 = 0$.

Доказательство. Пусть R_1 и R_2 имеют общим только нулевой вектор. Покажем, что для каждого вектора $x \in R_0$ разложение единственно. Предположим, что нам заданы два разложения вектора $x \in R_0$:

$$x = y_1 + z_1; \quad y_1 \in R_1, \quad z_1 \in R_2$$
$$x = y_2 + z_2; \quad y_2 \in R_1, \quad z_2 \in R_2.$$

Вычитая, получаем:

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1;$$

значит вектор $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ принадлежит обоим подпространствам и, следовательно, по предположению, равен нулю:

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0,$$

т. е. $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Единственность таким образом доказана.

Обратно, пусть каждый вектор x из R_0 представим лишь единственным способом в виде

$$x = y + z, \quad y \in R_1, \quad z \in R_2.$$

Покажем, что R_1 и R_2 имеют общим лишь нулевой вектор. Предположим противное, т. е. предположим, что существует вектор $x_0 \neq 0$, $x_0 \in R_1$ и $x_0 \in R_2$. Тогда, кроме разложения

$$x = y + z; \ y \in R_1, \ z \in R_2,$$

имеем также разложение

$$x = (y + x_0) + (z - x_0),$$

где

$$y + x_0 \in R_1 \quad (\text{так как } x_0 \in R_1)$$
$$z - x_0 \in R_2 \quad (\text{так как } x_0 \in R_2),$$

т. е. вектор x представим двумя различными способами в виде суммы векторов из R_1 и R_2. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

2. Прямая сумма.

Определение 3. *Подпространство R_0 называется прямой суммой подпространств R_1 и R_2, если каждый вектор из R_0 может быть представлен, и притом только одним способом, как сумма векторов из R_1 и R_2.*

Более общо: R_0 называется прямой суммой подпространств $R_1, R_2, \ldots, R_k$ (обозначение: $R_0 = R_1 \dot{+} R_2 \dot{+} \ldots \dot{+} R_k$), если каждый вектор из R_0 может быть одним и только одним способом представлен как сумма векторов из $R_1, R_2, \ldots, R_k$.

Согласно п. 1, для того чтобы R_0 было прямой суммой R_1 и R_2, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_1 + R_2 = R_0, \quad R_1 \cap R_2 = 0.$$

Подпространство $R_0 = R_1 \dot{+} R_2$ может, конечно, совпадать со всем пространством R. Тогда говорят, что *пространство R разложено в прямую сумму подпространств R_1 и R_2.*

Предположим, что R разложено в прямую сумму, $R = R_1 \dot{+} R_2$. Тогда, выбрав базис $e_1, e_2, \ldots, e_p$ в R_1 и базис $f_1, f_2, \ldots, f_q$ в R_2, мы получим $p+q$ векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q. \tag{1}$$

Покажем, что эти векторы образуют базис в R.

По определению прямой суммы каждый вектор можно представить в виде:

$$x = y + z, \quad y \in R_1, \quad z \in R_2.$$

Вектор y (соответственно z) представим линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \ldots, e_p$ (соответственно $f_1, f_2, \ldots, f_k$), так как это суть базисы в R_1 и R_2. Следовательно, каждый вектор $x \in R$ можно представить в виде линейной комбинации векторов (1).

Для того чтобы показать, что векторы (1) образуют базис, остаётся показать их линейную независимость.

Пусть

$$0 = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p) + (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_q f_q).$$

Нуль (как и всякий другой вектор из R) представляется единственным образом в виде суммы векторов из R_1 и R_2, а именно, в виде суммы $0 = 0 + 0$. Так как выражения в скобках принадлежат соответственно R_1 и R_2, то

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p = 0,$$
$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_q e_q = 0.$$

Так как $e_1, e_2, \ldots, e_p$ линейно независимы, то все α_i равны нулю. Аналогично равны нулю все β_i. Линейная независимость векторов (1) доказана.

Из доказанного утверждения следует, в частности, что *если $R = R_1 \dot{+} R_2$, то сумма $p + q$ размерностей подпространств R_1 и R_2 равна n.*

Действительно, $p + q$ векторов (1) образуют базис в R, а всякий базис в R состоит из n векторов.

Мы предоставляем читателю проверить, что *если система векторов, полученная объединением базисов подпространств R_1 и R_2, линейно независима, то сумма $R_1 + R_2$ есть прямая сумма.*

Аналогично доказанному выше можно показать, что *если*

$$R = R_1 \dot{+} R_2 \dot{+} \ldots \dot{+} R_k,$$

то, выбрав базисы в каждом из подпространств $R_1, R_2, \ldots, R_k$ и объединив их, мы получим базис в R.

Упражнения: 1. Пусть R есть сумма подпространств R_1, R_2 и R_3. Показать, что для того чтобы R было *прямой* суммой этих подпространств, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$R_1 \cap (R_2 + R_3) = 0, \; R_2 \cap (R_1 + R_3) = 0, \; R_3 \cap (R_1 + R_2) = 0.$$

2. Показать, что если R есть сумма подпространств R_1 и R_2, то в R можно выбрать базис $e_1, e_2, \ldots, e_k, f_1, f_2, \ldots, f_l, v_1, v_2, \ldots, v_m$, так что $e_1, e_2, \ldots, e_k, f_1, f_2, \ldots, f_l$ есть базис в R_1, $f_1, f_2, \ldots, f_l, v_1, v_2, \ldots, v_m$ — базис в R_2, а $f_1, f_2, \ldots, f_l$ — базис в $R_1 \cap R_2$.

3. Показать, что для любых двух подпространств R_1 и R_2 n-мерного пространства R размерность их суммы $R_1 + R_2$ плюс размерность их пересечения равна сумме размерностей R_1 и R_2. Stop

§ 18. Ортогональные дополнения. Двойственность

1. Ортогональные дополнения.

Определение 1. *Пусть R_1 — подпространство n-мерного эвклидова пространства R. Совокупность R_1' всех векторов, ортогональных к каждому вектору из R_1, называется ортогональным дополнением подпространства R_1.*

Легко видеть, что ортогональное дополнение R_1' к R_1 есть подпространство. В самом деле, пусть $x' \in R_1'$ и $y' \in R_1'$, т. е.

$$(x', x) = 0, \; (y', x) = 0$$

для всех $x \in R_1$; тогда

$$(x' + y', x) = 0$$

для всех $x \in R_1$, т. е. $x' + y' \in R_1'$. Аналогично $\lambda x' \in R_1'$.

Если R_1 имеет размерность k, то его ортогональное дополнение имеет размерность $n - k$. Действительно, пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис R_1. Если x' ортогонален к векторам $e_1, e_2, \ldots, e_k$, то он ортогонален и к любой их линейной комбинации, т. е. к любому вектору из R_1. Поэтому условие $x' \in R_1'$, т. е. $(x', x) = 0$ для любого $x \in R_1$ эквивалентно условию

$$(x', e_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

Выбрав во всём R какой-либо ортогональный нормированный