Russian EXAM

Fall 2002

1 START

ГЛАВА IV

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ И МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕНЫ МАТРИЦЫ

С каждой квадратной матрицей связаны два многочлена: характеристический и минимальный. Эти многочлены играют большую роль в различных вопросах теории матриц. Так, например, понятие о функции от матрицы, которое мы введем в следующей главе, будет целиком основываться на понятии о минимальном многочлене матрицы. В этой главе рассматриваются свойства характеристического и минимального многочлена. Этому исследованию предпосылаются основные сведения о многочленах с матричными коэффициентами и о действиях над ними.

§ 1. Сложение и умножение матричных многочленов

Рассмотрим квадратную *многочленную* матрицу $A(\lambda)$, т. е. квадратную матрицу, элементами которой являются многочлены относительно λ (с коэффициентами из данного числового поля K):

$$A(\lambda)=\|a_{ik}(\lambda)\|_1^n=\|a_{ik}^{(0)}\lambda^m+a_{ik}^{(1)}\lambda^{m-1}+\ldots+a_{ik}^{(m)}\|_1^n. \qquad (1)$$

Матрицу $A(\lambda)$ можно представить в виде многочлена с матричными коэффициентами, расположенного по степеням λ:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\ldots+A_m, \qquad (2)$$

где

$$A_j=\|a_{ik}^{(j)}\|_1^n \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ m). \qquad (3)$$

Число m называется *степенью* многочлена, если $A_0\neq 0$. Число n называется *порядком* многочлена. Многочлен (1) будем называть *регулярным*, если $|A_0|\neq 0$.

Многочлен с матричными коэффициентами мы будем иногда называть *матричным многочленом*. В отличие от матричного многочлена обычный многочлен со скалярными коэффициентами будем называть *скалярным многочленом*.

Рассмотрим основные действия над матричными многочленами. Пусть даны два матричных многочлена одного и того же порядка $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Обозначим через m наибольшую из степеней этих многочленов. Эти многочлены можно записать в виде

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\ldots+A_m,$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^m+B_1\lambda^{m-1}+\ldots+B_m.$$

Тогда

$$A(\lambda)\pm B(\lambda)=(A_0\pm B_0)\lambda^m+(A_1\pm B_1)\lambda^{m-1}+\ldots+A_m\pm B_m,$$

т. е. *сумма (разность) двух матричных многочленов одного и того же порядка может быть представлена в виде многочлена, степень которого не превосходит наибольшей из степеней данных многочленов.*

Пусть даны два матричных многочлена $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ степеней m и p одного и того же порядка n:

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m \qquad (A_0 \neq 0),$$
$$B(\lambda) = B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \ldots + B_p \qquad (B_0 \neq 0).$$

Тогда

$$A(\lambda)B(\lambda) = A_0B_0\lambda^{m+p} + (A_0B_1 + A_1B_0)\lambda^{m+p-1} + \ldots + A_mB_p. \tag{4}$$

Если бы мы перемножили $B(\lambda)$ на $A(\lambda)$ (т. е. изменили бы порядок сомножителей), то мы получили бы, вообще говоря, другой многочлен.

Умножение матричных многочленов обладает еще одним специфичным свойством. В отличие от произведения скалярных многочленов произведение матричных многочленов (4) может иметь степень, меньшую $m+p$, т. е. меньшую суммы степеней сомножителей. Действительно, в (4) произведение матриц A_0B_0 может равняться нулю при $A_0 \neq 0$ и $B_0 \neq 0$. Однако, если хотя бы одна из матриц A_0 и B_0 неособенная, то из $A_0 \neq 0$ и $B_0 \neq 0$ следует: $A_0B_0 \neq 0$. Таким образом, *произведение двух матричных многочленов равно многочлену, степень которого меньше или равна сумме степеней сомножителей. Если хотя бы один из двух сомножителей регулярный многочлен, то в этом случае степень произведения всегда равна сумме степеней сомножителей.*

§ 2. Правое и левое деление матричных многочленов

Пусть даны два матричных многочлена $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ одного и того же порядка n, причем $B(\lambda)$ — регулярный многочлен:

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m \qquad (A_0 \neq 0),$$
$$B(\lambda) = B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \ldots + B_p \qquad (|B_0| \neq 0).$$

Мы будем говорить, что матричные многочлены $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$ являются соответственно *правым частным* и *правым остатком* при делении $A(\lambda)$ на $B(\lambda)$, если

$$A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda) \tag{5}$$

и степень $R(\lambda)$ меньше степени $B(\lambda)$.

Совершенно аналогично будем называть многочлены $\widehat{Q}(\lambda)$ и $\widehat{R}(\lambda)$ соответственно *левым частным* и *левым остатком* при делении $A(\lambda)$ на $B(\lambda)$, если

$$A(\lambda) = B(\lambda)\widehat{Q}(\lambda) + \widehat{R}(\lambda) \tag{6}$$

и степень $\widehat{R}(\lambda)$ меньше степени $\widehat{B}(\lambda)$.

Обратим внимание читателя, что при «правом» делении (т. е. при нахождении правого частного и правого остатка) в (5) на «делитель» $B(\lambda)$ частное $Q(\lambda)$ умножается справа, а при «левом» делении в (6) на делитель $B(\lambda)$ частное $\widehat{Q}(\lambda)$ умножается слева. В общем случае многочлены $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$ не совпадают с $\widehat{Q}(\lambda)$ и $\widehat{R}(\lambda)$.

Покажем, что *как правое, так и левое деление матричных многочленов одного и того же порядка всегда выполнимо и однозначно, если делитель — регулярный многочлен.*

END

2 START

Закон больших чисел, в силу которого, с вероятностью сколь угодно близкою к достоверности, можно утверждать, что среднее арифметическое из нескольких величин, при достаточно большом числе этих величин, будет произвольно мало отличаться от средней арифметической из их математических ожиданий, выведен Чебышевым* из рассмотрения математического ожидания квадрата разности между суммой этих величин и суммой их математических ожиданий. А именно, из рассуждений Чебышева ясно, что указанный закон больших чисел должен оправдываться во всех тех случаях, когда математическое ожидание квадрата разности между суммой величин и суммой их математических ожиданий, при беспредельном возрастании числа величин, возрастает медленнее, чем квадрат их числа, так что отношение этого математического ожидания к квадрату числа величин имеет пределом нуль.

В своих выводах Чебышев ограничился простейшим и потому наиболее интересным случаем независимых величин; в этом простейшем случае, как показал Чебышев, математическое ожидание вышеуказанного квадрата, при беспредельном возрастании числа величин, может возрастать только с такой же быстротой, как число их, если математические ожидания квадратов самих величин остаются конечными, а не возрастают беспредельно.

---

* Сочинения П. Л. Чебышева, т. I, о средних величинах [1].

Конечно, условия Чебышева далеко не исчерпывают всех случаев, к которым можно применить вышеуказанный закон, если даже мы ограничимся независимыми величинами. Мы не имеем, однако, в виду заниматься разысканием условий, необходимых и достаточных для применимости этого закона, а укажем только, что выводы Чебышева можно распространить и на некоторые случаи довольно общего характера, когда величины зависят друг от друга.

§ 1. На первом плане можно поставить случай, когда связь величин такова, что увеличение любой из них влечет за собой уменьшение математических ожиданий остальных.

Остановимся на этом случае; пусть рассматриваемые нами величины будут

$$x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

а математические ожидания их соответственно равны

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;$$

положим еще для краткости

$$x_l - a_l = z_l.$$

Рассматривая математическое ожидание квадрата

$$(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2,$$

разлагаем его на слагаемые

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + \ldots + 2z_{n-1}z_n$$

и пользуемся известным предложением, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Для независимых величин математические ожидания произведений вида z_lz_k все равны нулю, и потому математическое ожидание $(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2$ приводится к сумме математических ожиданий квадратов величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$. В нашем же случае математическое ожидание каждого произведения $z_l z_k$ — число отрицательное и потому

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2 < \Sigma \text{ м. о. } z_k^2 \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

END

Чтобы в этом удостовериться, положим, что совокупность чисел

$$z_l', z_l'', \ldots, z_l^{(\omega)},$$

расположенных в возрастающем порядке, представляет все возможные значения z_l, а вероятности их соответственно равны

$$p_l', p_l'', \ldots, p_l^{(\omega)},$$

пусть, наконец, при

$$z_l = z_l', z_l'', \ldots, z_l^{(\omega)}$$

математическое ожидание z_k соответственно равно

$$a_k', a_k'', \ldots, a_k^{(\omega)}.$$

При таких обозначениях математическое ожидание произведения $z_l z_k$ выражается суммою

$$p_l' z_l' a_k' + p_l'' z_l'' a_k'' + \ldots + p_l^{(\omega)} z_l^{(\omega)} a_k^{(\omega)},$$

а математические ожидания самих величин z_l, z_k, равные нулю, могут быть представлены в виде сумм

$$p_l' z_l' + p_l'' z_l'' + \ldots + p_l^{(\omega)} z_l^{(\omega)}$$

и

$$p_l' a_k' + p_l'' a_k'' + \ldots + p_l^{(\omega)} a_k^{(\omega)}.$$

И так как для рассматриваемого нами случая, согласно предположению, должно быть

$$a_k' > a_k'' > \ldots > a_k^{(\omega)},$$

(3) START

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Пространства $C(\mathscr{E})$ и $L_p(\mathscr{E})$

В этой книге будут рассматриваться функции, зависящие, вообще говоря, от многих переменных.

Символ R_n $(n=1, 2, \ldots)$ всегда будет обозначать n-мерное евклидово пространство точек $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ с действительными координатами. Длина вектора $\boldsymbol{x}$ будет обозначаться так:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_1^n x_k^2}. \tag{1}$$

Если $\mathscr{E}$ есть замкнутое множество, принадлежащее к R_n ($\mathscr{E} \subset R_n$), то $C(\mathscr{E})$ будет обозначать совокупность всех равномерно непрерывных на $\mathscr{E}$ (действительных или комплекснозначных) функций $f=f(\boldsymbol{x})$.

Каждой функции $f \in C(\mathscr{E})$ приведем в соответствие ее норму (в смысле $C(\mathscr{E})$)

$$\|f\|_{C(\mathscr{E})} = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}} |f(\boldsymbol{x})|. \tag{2}$$

В случае ограниченного (замкнутого) множества $\mathscr{E}$ sup можно заменить на max.

Если p есть действительное число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqslant p < \infty$, и на некотором измеримом не обязательно ограниченном множестве $\mathscr{E} \subset R_n$, принадлежащем к R_n, задана измеримая действительная или комплекснозначная функция f такая, что функция $|f|^p$ интегрируема (суммируема) в смысле Лебега на $\mathscr{E}$, то положим

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} = \left(\int_{\mathscr{E}} |f|^p \, d\mathscr{E}\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Величина (3) называется нормой функции f в смысле $L_p(\mathscr{E})$. Через $L_p(\mathscr{E})$ будет обозначаться совокупность всех функций, имеющих конечную норму (3).

Мы не будем различать две *эквивалентные* функции f_1 и $f_2 \in L_p(\mathscr{E})$, т. е. отличающиеся на множестве меры нуль. Будем считать их равными одному и тому же элементу функционального пространства $L_p(\mathscr{E})$ и писать $f_1 = f_2$. В частности, если функция $f \in L_p(\mathscr{E})$ равна нулю почти для всех $x \in \mathscr{E}$, будем писать $f = 0$, отождествляя таким образом эту функцию с функцией, тождественно равной нулю на $\mathscr{E}$. Таким образом, из равенства $\|f_1 - f_2\|_{L_p(\mathscr{E})} = 0$ следует, что $f_1 - f_2 = 0$ и $f_1 = f_2$.

Множество $\mathscr{E}$ может иметь измерение m, меньшее, чем n, и тогда интеграл, входящий в равенство (3), понимается в смысле естественной (m-мерной) лебеговой меры, определяемой на множестве $\mathscr{E}$. Нам не понадобится рассмотрение сложных по своей конструкции множеств $\mathscr{E}$. Часто $\mathscr{E}$ будет совпадать со всем пространством R_n или будет некоторым его m-мерным подпространством или m-мерным кубом или шаром, принадлежащим к R_n. Наконец, $\mathscr{E}$ может быть гладкой или кусочно-гладкой гиперповерхностью, состоящей из достаточно гладких кусков, и тогда мера измеримого подмножества $\mathscr{E}$, на базе которой определяется интеграл, входящий в правую часть (3), представляет собой обобщение (распространение) обычного понятия площади гиперповерхности.

Определение (3) естественно распространяется и на случай $p = \infty$. Действительно, если функция $f(x)$ измерима и существенно ограничена на ограниченном множестве $\mathscr{E}$, т. е. для нее существует величина

$$\sup_{x \in \mathscr{E}} \operatorname{vrai} |f(x)| = M_f,$$

называемая *существенным максимумом* *) $|f(x)|$ на $\mathscr{E}$, то имеет место равенство

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} = M_f. \tag{4}$$

Оно доказывается следующим образом. Пусть μe обозначает меру e. Если $M_f = 0$ или $\mu\mathscr{E} = 0$, то равенство (4) очевидно. Будем считать, что $0 < M_f < \infty$. Если $\mathscr{E}$ — ограниченное измеримое множество, то

$$\left(\int_{\mathscr{E}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant M_f (\mu\mathscr{E})^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{p \to \infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant M_f. \tag{5}$$

Если $\mathscr{E}$ — неограниченное измеримое множество, то неравенство (5), вообще говоря, не выполняется (например, $\mathscr{E} = R_n$, $f(x) \equiv 1$). Однако можно доказать

*) M_f есть наименьшее число среди чисел M, обладающих тем свойством, что множество всех $x \in \mathscr{E}$, для которых $|f(x)| > M$, имеет меру нуль. Легко видеть, что оно существует.

это неравенство в предположении, что $f(x) \in L_p(\mathscr{E})$ для всех достаточно больших p и что $\varlimsup\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} < \infty$. В этом случае

$$\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M_f^{1/2}\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^{p/2}\,dx\right)^{1/p},$$

поэтому

$$\varlimsup_{p\to\infty}\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M_f^{1/2}\left[\varlimsup_{p\to\infty}\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right]^{1/2},$$

откуда и вытекает неравенство (5).

С другой стороны, из определения существенного максимума функции следует существование ограниченного множества $\mathscr{E}_1$ положительной меры такого, что для всех его точек выполняется неравенство

$$|f(x)| > M_f - \varepsilon,$$

где $0 < \varepsilon \leqslant M_f$. Поэтому

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant \left(\int\limits_{\mathscr{E}_1} (M_f-\varepsilon)^p\,d\mathscr{E}_1\right)^{1/p} = (M_f-\varepsilon)\,(\mu\mathscr{E}_1)^{1/p},$$

откуда

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant M_f - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant M_f. \tag{6}$$

Отметим, что неравенство (6) справедливо для любого измеримого множества $\mathscr{E}$.

Из (5) и (6) следует (4).

Таким образом, доказано, что если функция $f(x)$ существенно ограничена на ограниченном измеримом множестве $\mathscr{E}$, то существует конечный предел

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})}, \tag{7}$$

равный существенному максимуму $f(x)$ на $\mathscr{E}$.

С другой стороны, из существования предела (7) следует существенная ограниченность $f(x)$ на $\mathscr{E}$. В самом деле, если бы это было не так, то как бы ни было велико N существовало бы измеримое и ограниченное подмножество $\mathscr{E}'$ множества $\mathscr{E}$ положительной меры, на котором

$$|f(x)| > N.$$

Тогда для любого $p \geqslant 1$

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant N\,(\mu\mathscr{E}')^{1/p},$$

откуда

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant N.$$

Так как N как угодно велико, то предел (7) не может быть конечным, и мы пришли к противоречию.

~~Приведенные соображения указывают на целесообразность следующего обозначения:~~

END

$$\cancel{\|f\|_{L_\infty(\mathscr{E})} = \sup_{x\in\mathscr{E}} \operatorname{vrai} |f(x)|}, \tag{8}$$