Russian Spring 2002

Analysis.

ГЛАВА I

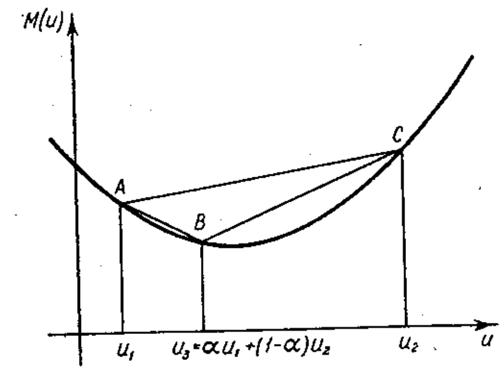
СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. N-функции

1. Выпуклые функции. Вещественная функция $M(u)$ вещественного переменного u называется ***выпуклой***, если при всех значениях u_1 и u_2 выполняется неравенство

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[M(u_1)+M(u_2)]. \qquad (1.1)$$

Нас будут интересовать только непрерывные выпуклые функции. Условие (1.1) означает, что середина хорды, соеди-



Черт. 1.

няющей две точки графика функции $M(u)$, лежит над соответствующей точкой графика. Геометрически ясно (черт. 1), что вся хорда лежит над графиком функции, т. е. что при всех α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ выполняется неравенство

$$M[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2] \leqslant \alpha M(u_1) + (1-\alpha) M(u_2). \qquad (1.2)$$

Это неравенство называется *неравенством Иенсена*. Неравенство Иенсена можно доказать и аналитически. Допустим, действительно, что неравенство (1.2) выполняется не при всех α из $[0,1]$. Тогда наибольшее значение M_0 на $[0,1]$ непрерывной функции

$$f(\alpha) = M[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2] - \alpha M(u_1) - (1-\alpha) M(u_2)$$

будет положительным. Обозначим через α_0 наименьшее значение аргумента, при котором $f(\alpha)$ принимает значение M_0. Пусть $\delta > 0$ такое число, что отрезок $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ содержится в $[0,1]$. Применяя неравенство (1.1) к точкам

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta) u_2,$$
$$u_2^* = (\alpha_0 - \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta) u_2,$$

и переходя к функции $f(\alpha)$, получим:

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0.$$

Мы пришли к противоречию, что и доказывает неравенство (1.2).

Если $u_1 \neq u_2$, то знак равенства в (1.2) достигается или только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, или при всех $\alpha \in [0,1]$. Действительно, пусть при некотором $\alpha_0 \in (0,1)$ в (1.2) достигается знак равенства. Это означает, что $f(\alpha_0) = 0$. Покажем, что в этом случае $f(\alpha) = 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Легко проверить, что непрерывная функция $f(\alpha)$ выпукла. Поэтому она также удовлетворяет неравенству Иенсена. Допустим, что при некотором $\alpha_1 \in (0, 1)$ $f(\alpha_1) < 0$ (по уже доказанному $f(\alpha)$ не может быть положительной). Допустим, для определенности, что $\alpha_1 < \alpha_0$. Так как $\alpha_0 = \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}\alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1-\alpha_1}$, то по неравенству Иенсена

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1} f(\alpha_1) - \frac{\alpha_0-\alpha_1}{1-\alpha_1} f(1) = \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1} f(\alpha_1) < 0,$$

что противоречит условию $f(\alpha_0) = 0$.

Неравенство (1.1) допускает еще одно обобщение: при любых $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}[M(u_1) + M(u_2) + \ldots + M(u_n)]. \tag{1.3}$$

Последовательным применением (1.1) неравенство (1.3) доказывается для всех n вида 2^k. Более сложным является случай произвольного n. Пусть m — такое число, что $n + m = 2^k$. Тогда

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n + mu^*}{n+m}\right) \leqslant \frac{1}{n+m}[M(u_1) + M(u_2) + \ldots + M(u_n) + mM(u^*)].$$

Положив $u^* = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$, получим (1.3).

Допустим, что $u_1 \leqslant u_3 \leqslant u_2$. Тогда

$$u_3 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} u_1 + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} u_2,$$

и в силу неравенства (1.2)

$$M(u_3) \leqslant \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} M(u_1) + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} M(u_2),$$

откуда следует, что

$$\frac{M(u_3) - M(u_1)}{u_3 - u_1} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_3)}{u_2 - u_3}. \tag{1.4}$$

Полученное неравенство (см. черт. 1) означает, что угловой коэффициент хорды AB меньше углового коэффициента хорды AC, который в свою очередь меньше углового коэффициента хорды BC.

2. Интегральное представление выпуклой функции.

Лемма 1.1. *Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ имеет в каждой точке правую производную $p_+(u)$ и левую производную $p_-(u)$, причем*

$$p_-(u) \leqslant p_+(u). \tag{1.5}$$

Доказательство. В силу (1.4) при $0 < h_1 < h_2$

$$\frac{M(u) - M(u-h_2)}{h_2} \leqslant \frac{M(u) - M(u-h_1)}{h_1} \leqslant \frac{M(u+h_1) - M(u)}{h_1} \leqslant \frac{M(u+h_2) - M(u)}{h_2}. \tag{1.6}$$

Из этих неравенств вытекает, что отношение

$$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}$$

не убывает при $h \to +0$ и, следовательно, имеет предел $p_-(u)$. Аналогично, отношение $\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$ не возрастает при $h \to +0$ и имеет предел $p_+(u)$. Неравенство (1.5) также вытекает из (1.6).

Лемма 1.2. *Правая производная $p_+(u)$ непрерывной выпуклой функции $M(u)$ является неубывающей непрерывной справа функцией.*

Доказательство. Пусть $u_1 < u_2$. Тогда при достаточно малых положительных h

$$u_1 + h < u_2 - h$$

и в силу (1.4)

$$\frac{M(u_1+h)-M(u_1)}{h} \leqslant \frac{M(u_2)-M(u_2-h)}{h}.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$p_+(u_1) \leqslant p_-(u_2). \tag{1.7}$$

Из этого неравенства и (1.5) вытекает, что

$$p_+(u_1) \leqslant p_+(u_2). \tag{1.8}$$

Таким образом, монотонность функции $p_+(u)$ доказана.

Как было показано при доказательстве леммы 1.1, при всех $h > 0$

$$p_+(u) \leqslant \frac{M(u+h)-M(u)}{h}.$$

Фиксируя h и переходя к пределу при $u \to u_0 + 0$, получим в силу непрерывности функции $M(u)$:

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \leqslant \frac{M(u_0+h)-M(u_0)}{h}. \tag{1.9}$$

Предел в левой части неравенства существует в силу монотонности функции $p_+(u)$. Переходя в (1.9) к пределу при $h \to +0$, получим:

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \leqslant p_+(u_0).$$

С другой стороны, $p_+(u) \geqslant p_+(u_0)$ при $u \geqslant u_0$, в силу чего

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \geqslant p_+(u_0).$$

Таким образом,

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) = p_+(u_0).$$

Это равенство и означает непрерывность функции $p_+(u)$ справа.

Лемма доказана.

Замечание. Аналогично можно доказать, что левая производная $p_-(u)$ является неубывающей непрерывной слева функцией.

Лемма 1.3. *Выпуклая функция $M(u)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в каждом конечном интервале.*

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь промежуток $[a, b]$. Пусть $a < u_1 < u_2 < b$. В силу (1.4)

$$\frac{M(u_1)-M(a)}{u_1-a} \leqslant \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1} \leqslant \frac{M(b)-M(u_2)}{b-u_2}.$$

Из последних неравенств следует, что

$$p_+(a) \leqslant \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1} \leqslant p_-(b),$$

т. е. что величина $\left|\frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}\right|$ ограничена для всех u_1, u_2 из промежутка $[a, b]$.

Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Всякая выпуклая функция $M(u)$, удовлетворяющая условию $M(a)=0$, представима в виде*

$$M(u) = \int_a^u p(t)\,dt, \tag{1.10}$$

где $p(t)$ — неубывающая непрерывная справа функция.

Доказательство. Заметим прежде всего, что функция $M(u)$ почти везде имеет производную. Действительно, в силу (1.7) и (1.5) при $u_2 > u_1$

$$p_-(u_2) \geqslant p_+(u_1) \geqslant p_-(u_1). \tag{1.11}$$

Так как функция $p_-(u)$ монотонна, то она почти везде непрерывна. Пусть u_1 — точка непрерывности функции $p_-(u)$. Переходя к пределу в (1.11) при $u_2 \to u_1$, получим:

$$p_-(u_1) \geqslant p_+(u_1) \geqslant p_-(u_1),$$

т. е.

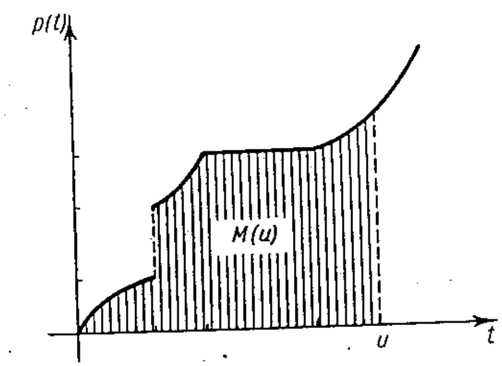
$$p_-(u_1) = p_+(u_1).$$

Таким образом, почти везде

$$M'(u) = p(u) = p_+(u).$$

Так как функция $M(u)$ в силу леммы 1.3 абсолютно непрерывна, то она является (см., например, [38]) неопределенным интегралом своей производной.

Теорема доказана.



Черт. 2.

3. Определение N-функции. Функция $M(u)$ называется *N-функцией*, если она допускает представление

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, dt, \tag{1.12}$$

где $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geqslant 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty. \tag{1.13}$$

Грубо говоря, указанные выше условия означают, что функция $p(t)$ должна иметь график такого вида, как на черт. 2. Знаравенств, что позволит изучать настоящую книгу и читателю, незнакомому с вариационными неравенствами.

Вторая глава посвящена методам, используемым для решения конечномерных задач. Эту главу можно рассматривать как самостоятельный раздел, в котором излагаются методы нелинейного программирования.

В гл. 3 подробно на примерах рассмотрена реализация общих методов и приведено достаточное количество численных решений, что дает возможность провести сравнение различных методов. Проведено достаточно полное исследование задачи упругопластического кручения цилиндрических стержней. Эта задача была выбрана в качестве объекта возможно более полного исследования, поскольку она интересна как с физической точки зрения, так и с позиций общей теории. При численном ее решении встречаются многие из основных трудностей теории, в частности много вопросов возникает при аппроксимации множества K, которое в данном случае определяется формулой

(12) $$K=\{v \mid |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду в } \Omega;\ v=0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Russian OZ

Глава 1 Applied

ОБЩИЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

План изложения

В настоящей главе приведены примеры стационарных неравенств (подробный вывод можно найти в книге Дюво и Лионса [1]), после этого даны *общие методы* их аппроксимации.

Далее эти методы применены к конкретным задачам, основные встречающиеся здесь технические трудности во всех деталях рассмотрены в последующих четырех главах для трех различных классов примеров.

Читатель, желающий возможно быстрее получить общее представление о проблематике стационарных и эволюционных неравенств, может перейти к чтению гл. 6 непосредственно после гл. 1, но изучение гл. 2 и 5 совершенно необходимо для фактической реализации описанных в данной книге методов.

1. Примеры

1.1. Задачи о движении жидкости в области, ограниченной полупроницаемой мембраной

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ (в приложениях обычно $n=1$, 2 или 3) с границей Γ; предположим, что область Ω заполнена некоторой жидкостью, совершающей установившееся движение при давлении $u(x)$[1]. Предполагается, что жидкость может свободно втекать в область Ω через границу Γ, но обратное движение невозможно. Зададим на границе Γ (вне Ω) давление жидкости $h=h(x)$. При выполнении известных предположений давление u внутри Ω удовлетворяет уравнению

(1.1) $$-\Delta u = f,$$

где $\Delta=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $f=f(x)$ — заданная в Ω функция. При задании граничных условий необходимо различать два случая;

[1]) Через $x=(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается произвольная точка области Ω. Будем полагать $dx=dx_1, \ldots, dx_n$.

в первом

(i) $$u(x) > h(x);$$

здесь жидкость стремится вытекать из области Ω, но мембрана Γ препятствует такому движению, следовательно, расход жидкости равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \text{ [1]}, \tag{1.2}$$

во втором случае, когда

(ii) $$u(x) \leqslant h(x),$$

жидкость стремится втекать в Ω; свойства мембраны таковы, что такое движение возможно, следовательно, расход жидкости ненулевой и имеет место неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geqslant 0, \tag{1.3}$$

причем величина $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ *конечна*. Для бесконечно тонкой мембраны из непрерывности $u(x)$ в окрестности точки x следует (см. Дюво—Лионс [1]), что $u(x) = h(x)$. Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$(u-h) \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0, \quad (u-h)\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \ ■ \tag{1.4}$$

Замечание 1.1. Очевидно, граница Γ разделяется на две подобласти Γ_1 и Γ_2, в первой из которых $u = h$, во второй $\partial u/\partial n = 0$. Однако эти области заранее неизвестны и их нахождение эквивалентно решению задачи, следовательно, речь идет о задаче с неизвестной границей[2]). ■

Преобразование задачи

Приведем теперь задачу (1.1), (1.4) к некоторой (достаточно простой) задаче *вариационного исчисления*. Это нам позволит:

(i) доказать (при надлежащих предположениях), что задача „поставлена корректно“;

(ii) создать основу для построения конструктивных приближенных методов решения. ■

Мы будем использовать некоторые понятия функционального анализа. Для ознакомления с этими понятиями можно обра-

[1]) $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная на Γ, направленная *вне* Ω (для определенности)

[2]) Это замечание относится ко всем задачам, рассматриваемым в данной книге.

титься к книге Дюво и Лионса [1], гл. 1. Здесь мы напомним только определения (исчерпывающее изложение аппарата соболевских пространств можно найти, например, в книге Нечаса [1], Лионса и Мадженеса [1][1]).

Через $H^1(\Omega)$ обозначается соболевское пространство (порядка 1) функций v[2]), таких, что (см. Соболев [1]):

$$v \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

где $L^2(\Omega)$ — пространство функций (классов функций) суммируемых с квадратом в Ω[3]); производные в формуле (1.5) понимаются в смысле распределений на[4]) Ω. Снабженное скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \tag{1.6}$$

пространство $H^1(\Omega)$ является гильбертовым.

Известно (см. цитированные выше книги), что в случае, когда граница Γ области Ω ограничена и достаточно регулярна, можно определить единственным образом след функции $v \in H^1(\Omega)$ на Γ, обозначаемый в дальнейшем через γv, $\gamma v \in L^2(\Gamma)$. Отображение $v \to \gamma v$ является линейным и непрерывным из $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Gamma)$[5]).

Таким образом, если функция h задана на Γ, можно определить подмножество K пространства $H^1(\Omega)$ по формуле

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \ \gamma v \geqslant h \text{ почти всюду на } \Gamma\}. \tag{1.7}$$

Нетрудно проверить, что K является замкнутым выпуклым подмножеством $H^1(\Omega)$.

Введем теперь форму

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \tag{1.8}$$

и функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v), \tag{1.9}$$

[1]) Все функции, рассматриваемые в данной книге, принимают только вещественные значения.

[2]) См. также С. Л. Соболев. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.—*Прим. ред.*

[3]) Следовательно, $\varphi \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \varphi$ измерима на Ω и $\int_\Omega \varphi(x)^2\,dx < \infty$.

[4]) В отечественной литературе распределения чаще называют обобщенными функциями.—*Прим. ред.*

[5]) Можно усилить этот результат: образ $H^1(\Omega)$ при отображении γ уже, нежели $L^2(\Gamma)$, и совпадает с $H^{1/2}(\Gamma)$ (см., например, книгу Лионса и Мадженеса [1], гл. 1).

где

(1.10) $$(f,\ v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

Докажем теперь, что задача (1.1), (1.4) эквивалентна задаче минимизации функционала $J(v)$ на K.

Доказательство основывается на следующих замечаниях общего характера:

1) если функционал $v \to J(v)$ выпуклый и дифференцируемый, то его производная, определяемая по формуле[1])

(1.11) $$(J'(u),\ v) = \frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda v)\big|_{\lambda=0},$$

равна

(1.12) $$(J'(u),\ v) = a(u,\ v) - (f,\ v);$$

2) если u реализует минимум функционала $J(v)$ на K, т. е.

(1.13) $$J(u) \leqslant J(v) \quad \forall v \in K,$$

то

(1.14) $$(J'(u),\ v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K,$$

и наоборот: из (1.14) следует (1.13).

Следовательно, используя формулу (1.12), можем заключить, что вариационная задача $\inf J(v)$, $v \in K$ эквивалентна вариационному неравенству:

(1.15) $$\begin{aligned} &u \in K \\ &a(u,\ v-u) \geqslant (f,\ v-u) \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что задача (1.1), (1.4) эквивалентна (1.15).

Обозначим через $\mathscr{D}(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с носителем, компактным в Ω; если $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, то

(1.16) $$v = u \pm \varphi$$

принадлежит K. Полагая в неравенстве (1.15) $v = u \pm \varphi$, получим, что

$$a(u,\ \varphi) = (f,\ \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

откуда следует уравнение (1.1) (из определения производных в теории распределений). Умножая теперь (1.1) скалярно на $(v-u)$ и интегрируя по частям, найдем

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\, d\Gamma + a(u,\ v-u) = (f,\ v-u),$$

[1]) В формуле (1.11) $J'(u)$ означает элемент пространства $(H^1(\Omega))'$, двойственного пространству $H^1(\Omega)$, $(J'(u),\ v)$ означает скалярное произведение, определяющее двойственность пространств $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))'$.

откуда с учетом неравенства (1.15) следует, что

(1.17) $$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\, d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Выбирая здесь $v = u + \psi$, где $\psi \geqslant 0$ — произвольная функция (регулярная), заданная на Γ, получим, что

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\psi\, d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall \psi \geqslant 0 \text{ на } \Gamma,$$

следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0 \text{ на } \Gamma.$$

Полагая после этого $v = h$, затем $v = 2u - h$ на Γ (предполагая h достаточно регулярной на Γ), находим отсюда, что

$$\frac{\partial u}{\partial n}(u-h) = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

откуда следует (1.4); обратно, из условий (1.4) вытекает неравенство (1.17), что и завершает доказательство указанной выше эквивалентности. ■

Резюме: физическая задача привела нас к задаче (1.1), (1.4), содержащей неравенства, и мы только что доказали, что она эквивалентна некоторой задаче вариационного исчисления. Последняя имеет две эквивалентные формулировки

1) $\inf\limits_{v \in K} J(v)$;

2) найти $u \in K$, такое, что

$$a(u,\ v-u) \geqslant (f,\ v-u) \quad \forall v \in K.$$

Замечание 1.2. Установленная эквивалентность не позволяет нам в настоящий момент утверждать, что решение исследуемой задачи существует. Соображения, касающиеся проблемы существования и относящиеся к ее постановке в форме задачи вариационного исчисления, будут приведены в разд. 2. ■

План дальнейшего исследования

В настоящем разделе будут даны примеры, отличные от приведенных выше и сформулированные сразу на языке вариационного исчисления. ■