ALGEBRA

Winter 05 Russian Exam

ГЛАВА II

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Как известно, комплексными числами называются выражения вида $a+bi$, где a и b — вещественные числа, i — некоторый символ, удовлетворяющий соотношению $i^2=-1$. Первые попытки введения в математику комплексных чисел были сделаны итальянскими математиками 16 в. Кардано и Бомбелли в связи с решением уравнений 3-й и 4-й степеней. Однако признание комплексных чисел как ценного орудия исследования происходило очень медленно. Недоверие вызывал сам символ i («мнимая единица»), заведомо не существующий среди вещественных чисел. Это недоверие усугублялось тем, что некритическое перенесение некоторых формул обычной алгебры на комплексные числа порождало неприятные парадоксы (например, $i^2=-1$, но вместе с тем, используя формальное выражение $i=\sqrt{-1}$ и обычные правила действий с квадратными корнями, получим $i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=$ $=\sqrt{1}=1$). Лишь в 19 в. Гауссу удалось дать достаточно убедительное обоснование понятия комплексного числа. Построенная в 19 в. на основе комплексных чисел теория функций комплексного переменного обогатила математический анализ новыми результатами, придала значительной части математического анализа чрезвычайную стройность и простоту, а в дальнейшем оказалась могущественным средством исследования в важных разделах механики и физики. Таким образом, «невозможные», «мнимые» числа явились ценнейшим средством исследования, и тем самым их введение в науку оказалось оправданным не только их непротиворечивостью, но и практической важностью.

§ 1. Обоснование комплексных чисел

1. Наводящие соображения. Задание комплексного числа $a+$ $+bi$ вполне определяется заданием двух обыкновенных вещественных чисел a и b, называемых его *компонентами.*

Вводя комплексные числа, необходимо ввести и арифметические действия над ними, по возможности с сохранением обычных правил действий, но с обязательством заменять символ i^2 на -1. Постараемся охарактеризовать правила этих действий в терминах компонент, без упоминания о «сомнительном» символе i. Так, если по обычным правилам элементарной алгебры «сложить» два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$, то мы получим комплексное число

$(a+c)+(b+d)i$, и при этом компоненты суммы двух комплексных чисел будут равны суммам соответствующих компонент слагаемых.

Далее, $(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+$ $+(bc+ad)i$, т. е. первая компонента произведения двух комплексных чисел равна разности произведений первых и вторых компонент, а вторая компонента равна сумме произведений первой компоненты одного из сомножителей на вторую компоненту другого.

Наконец, положив $b=0$ (и считая, что $0i=0$), получим $a+0i=a$, т. е. комплексное число с нулевой второй компонентой отождествляется с вещественным числом, именно, с первой компонентой.

Разумеется, все эти соображения имеют лишь наводящий характер — мы сформулировали в терминах компонент правила действий над комплексными числами, как будто мы уже каким-то образом убедились в закономерности введения этих странных математических объектов. Но то, что нам это удалось сделать, естественно наводит на мысль дать само определение комплексных чисел и действий над ними в терминах компонент, т. е. вещественных чисел.

2. Определение комплексных чисел. *Комплексными числами* называются упорядоченные пары вещественных чисел (компонент), для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с вещественными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам).

I. Пары (a, b) и (c, d) считаются *равными* в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$(a, b)\overset{\text{def}}{=}(c, d)\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\ b=d.\end{cases}$$

II. *Суммой* пар (a, b) и (c, d) называется пара $(a+c, b+d)$, т. е.

$$(a, b)+(c, d)\overset{\text{def}}{=}(a+c, b+d).$$

III. *Произведением* пар (a, b) и (c, d) называется пара $(ac-bd, ad+bc)$, т. е.

$$(a, b)(c, d)\overset{\text{def}}{=}(ac-bd, ad+bc).$$

IV. Пара $(a, 0)$ отождествляется с вещественным числом a, т. е. $(a, 0)\overset{\text{def}}{=}a$.

Таким образом, в данном определении комплексных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы, произведения, нет речи о каком-либо извлечении квадратного корня из отрицательных чисел. Все определения формулируются в терминах вещественных чисел и действий над ними.

В первых трех аксиомах речь идет об определении разных понятий. Поэтому их сопоставление не может привести к каким-либо противоречиям. Единственное, чего можно опасаться, это нарушения обычных законов действий, которое априори могло бы произойти. Несколько в другом положении находится аксиома IV. Дело в том, что понятия равенства, суммы и произведения для вещественных чисел имеют определенный смысл, и если бы оказалось, что эти понятия расходятся с теми, которые возникают в силу аксиом I, II, III при рассмотрении вещественных чисел как пар специального вида, то это привело бы к такой путанице (пришлось бы отличать сумму вещественных чисел как таковых, от их суммы как пар, и т. д.), что следовало бы от аксиомы IV отказаться.

Поэтому прежде всего нужно сопоставить аксиому IV с аксиомами I, II, III.

I и IV. Пусть вещественные числа a и b равны, как отождествленные с ними пары $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Это будет, согласно аксиоме I, в том и только в том случае, когда $a = b$, т. е. если они равны в обычном смысле.

II и IV. Сумма вещественных чисел a и b, рассматриваемых как пары $(a, 0)$ и $(b, 0)$, равна, согласно аксиоме II, паре $(a+b, 0)$, отождествленной с числом $a+b$, т. е. с суммой a и b в обычном смысле.

III и IV. Произведение вещественных чисел a и b, рассматриваемых как пары $(a, 0)$ и $(b, 0)$, равно согласно аксиоме III паре $(ab - 0 \cdot 0,\ a0 + 0b) = (ab, 0)$, отождествленной с числом ac, т. е. с произведением a и b в обычном смысле. Таким образом, аксиома IV хорошо согласована с аксиомами I, II, III и не приводит к путанице, которой можно было бы опасаться.

Обратим внимание еще на одну формулу, непосредственно вытекающую из аксиом III, IV, именно,

$$m(a, b) = (ma, mb),$$

если m — какое угодно вещественное число. Действительно, $m(a, b) = (m, 0)(a, b) = (ma - 0b,\ mb + 0a) = (ma, mb)$. Допустим теперь, что m — натуральное число. В силу аксиомы II $(a, b) + (a, b) = (2a, 2b)$, $(2a, 2b) + (a, b) = (3a, 3b)$ и т. д., так что (ma, mb) есть результат последовательного сложения m слагаемых, равных (a, b), что хорошо согласуется с привычным представлением о том, что умножение на натуральное число m равносильно сложению m равных слагаемых. Это еще раз свидетельствует о хорошем согласовании аксиом.

3. Свойства действий. Теперь нам нужно проверить, что аксиомы II и III согласованы в себе и друг с другом так, что привычные нам свойства действий над числами сохраняются при пе-

3

LOGIC

Глава 1

Исчисление высказываний

§ 1. Пропозициональные связки. Истинностные таблицы

Из высказываний путем соединения их различными способами можно составлять новые, более сложные высказывания. Мы будем рассматривать одни только *истинностно-функциональные* комбинации, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих высказываний.

Отрицание является одной из простейших операций над высказываниями. Хотя в разговорном языке то или иное высказывание может быть отрицаемо многими способами, мы здесь будем это делать одним способом, помещая знак отрицания $\neg$ перед всем высказыванием. Так, если A есть высказывание, то $\neg A$ обозначает отрицание A и читается «не A».

Истинностно-функциональный характер отрицания становится ясным из рассмотрения следующей *истинностной таблицы*:

A	¬A
И	Л
Л	И

Когда A истинно, $\neg A$ ложно; когда A ложно, $\neg A$ истинно. Буквы И и Л мы употребляем для обозначения *истинностных значений*: «истина» и «ложь».

Другой распространенной истинностно-функциональной операцией является *конъюнкция*: «и». Конъюнкция высказываний A и B будет обозначаться через $A \& B$, она имеет следующую истинностную таблицу:

A	B	$A \& B$
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	Л
Л	Л	Л

Высказывание $A \& B$ истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. Высказывания A и B называются *конъюнктивными членами* или *членами конъюнкции* $A \& B$. Заметим, что в истинностной таблице для конъюнкции имеются четыре строки соответственно числу возможных распределений истинностных значений для A и B.

В разговорных языках связка «или» употребляется в двух различных смыслах — разделительном и соединительном. В первом случае утверждение «A или B» означает, что утверждается одно и только одно из высказываний A и B, а во втором случае — хотя бы одно из этих высказываний. Для связки «или» в этом втором, соединительном смысле мы и введем специальный знак: $\vee$. Эта операция имеет следующую истинностную таблицу:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

Таким образом, $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда и A и B ложны. Высказывание «$A \vee B$» называется *дизъюнкцией* с *дизъюнктивными членами* A и B.

Упражнение

Построить истинностную таблицу для «или» в разделительном смысле.

Другой важной истинностно-функциональной операцией является *следование*: «если A, то B». Смысл обычного употребления здесь неясен. Разумеется, высказывание «если A, то B» ложно, когда *посылка* A истинна, а *заключение* B ложно. Однако в других случаях, при обычном употреблении этой связки, мы не имеем вполне определенного истинностного значения. Неясно, например, истинными или ложными следует считать высказывания:

(1) Если $1+1=2$, то Париж есть столица Франции.
(2) Если $1+1\neq 2$, то Париж есть столица Франции.
(3) Если $1+1\neq 2$, то Рим есть столица Франции.

Смысл их неясен, поскольку мы привыкли к тому, что между посылкой и заключением имеется определенная (обычно причинная) связь. Мы условимся считать, что «если A, то B» ложно тогда и только тогда, когда истинно A и ложно B. Таким образом, высказывания (1) — (3) будут считаться истинными. Обозначим «если A, то B» через $A \supset B$. Это последнее выражение называется *импликацией*. Вот истинностная таблица для $\supset$:

A	B	$A \supset B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Такое уточнение смысла высказывания «если A, то B» не противоречит обычной практике, скорее даже ее расширяет *).

Известным оправданием приведенной истинностной таблицы для $\supset$ может служить наше желание, чтобы высказывание «если A и B, то B» было всегда истинным. Так, случай, когда A и B истинны, оправдывает первую строку в нашей истинностной таблице для $\supset$, поскольку «A и B» и B оба истинны. Если A ложно и B истинно, то «A и B» ложно, в то время как B истинно. Это соответствует второй строке таблицы. Наконец, если A ложно и B ложно, то «A и B» ложно и B ложно. Это дает нам четвертую строку таблицы. Еще больше уверенности в разумности нашего определения придает нам смысл таких предложений, как, например: «Для любого x, если x есть нечетное целое положительное число, то x^2 есть нечетное целое положительное число». Здесь утверждается, что для любого x предложение «если x есть нечетное целое положительное число, то x^2 есть нечетное целое положительное число» истинно. При этом мы, разумеется, не хотим рассматривать как контрпримеры к нашему общему утверждению случаи, когда x не есть нечетное целое положительное число. Это обеспечивается второй и четвертой строками нашей таблицы истинности. Наконец, каждый случай, когда x и x^2 суть нечетные целые положительные числа, подтверждает наше общее утверждение. Это соответствует первой строке нашей таблицы.

Обозначим выражение «A тогда и только тогда, когда B» через «$A \equiv B$». Такое выражение называется *эквивалентностью*. Очевидно, $A \equiv B$ истинно тогда и только тогда, когда A и B имеют одно и то же истинностное значение. Поэтому мы имеем следующую истинностную таблицу:

A	B	$A \equiv B$
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	Л
Л	Л	И

*) Иногда встречается некоторое не истинностно-функциональное понимание высказывания «если A, то B», связанное с законами причинности. Высказывание «если этот кусок железа положен в воду в момент времени t, то железо растворится» рассматривается как ложное даже в том случае, если кусок железа не положен в воду в момент времени t, т. е. даже если посылка ложна. Другое не истинностно-функциональное употребление связки «если ..., то ...» имеет место в так называемых контрфактических условных предложениях, таких как содержательно ложное высказывание «если бы сэр Вальтер Скотт не написал ни одного романа, то не было бы гражданской войны в США». При истинностно-функциональном подходе это высказывание следовало бы признать истинным ввиду ложности посылки. К счастью, математика и логика не нуждаются в законах причинности и контрфактических условных предложениях. Подробнее об условных предложениях и других связках см. Куайн [1951].

GEOMETRY

выполняется равенство

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}=\frac{1}{R}.$$

Когда окружность C, «расширяясь», переходит в пределе в прямую c при $R\to\infty$, тогда $h'\to -h$, т. е. в пределе инверсия дает отражение относительно прямой c.

Замечание 2. Отображение, сохраняющее углы между кривыми, называется *конформным*. На плоскости существует чрезвычайно много конформных отображений. Так, внутренность круга допускает конформное отображение на любую односвязную область (т. е. такую, в которой всякая замкнутая кривая может быть стянута в точку). Это теорема Римана. Конформные отображения на плоскости представляются аналитическими функциями комплексной переменной, и всякая такая функция задает конформное отображение.

Но в пространстве всякое конформное отображение любой области является композицией инверсий и отражений относительно плоскостей — «инверсий» относительно сфер бесконечного радиуса. (Это теорема французского математика Ж. Лиувилля (1809—1882).)

Глава III

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Параллельное проектирование

Будем считать всякую прямую параллельной самой себе[1]).

Аналогично, будем считать отрезки, лежащие на одной прямой, параллельными.

Определение. *Параллельным проектированием на плоскость α вдоль прямой a*, пересекающей α, называется отображение, сопоставляющее точке X ту точку

[1]) Это необходимо, когда рассматривается какое-либо множество параллельных прямых a, b, c и т. д. Известно, что если $a\parallel b$ и $b\parallel c$, то $a\parallel c$. Поэтому если $a\parallel b$, $b\parallel c$, то $c\parallel a$, и мы логически приходим к тому, что $a\parallel a$. Когда мы говорим о прямых, параллельных данной прямой a, то естественно включать в них ее саму и говорить, что все они друг другу параллельны.

X', в которой проходящая через X прямая, параллельная a, пересекает плоскость α (рис. 56). О прямой a говорят, что она задает *направление проектирования.*

Основные свойства параллельного проектирования выражаются следующей теоремой, известной еще из школьного курса.

Теорема 1. *При параллельном проектировании для прямых и отрезков, не параллельных направлению проектирования, выполняются следующие свойства.*

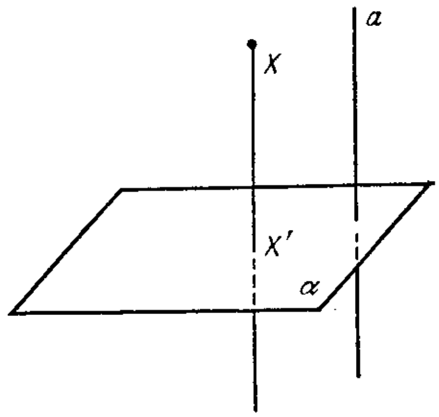

Рис. 56

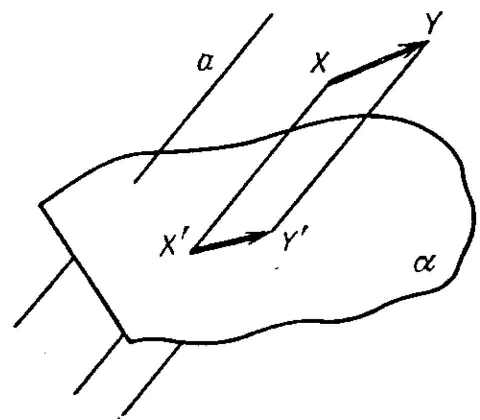

Рис. 57

1. *Проекция прямой есть прямая, проекция отрезка — отрезок.*
2. *Проекции параллельных прямых параллельны.*
3. *Отношение длин проекций параллельных отрезков равно отношению длин самих этих отрезков. Другими словами, при параллельном проектировании отношения параллельных отрезков сохраняются.*

Мы докажем эту теорему, рассмотрев, что происходит при проектировании с векторами.

Отображения векторов. При отображении какой-либо фигуры F точкам сопоставляются точки, и соответственно фигурам, содержащимся в F, сопоставляются фигуры. А что происходит при этом с векторами — направленными отрезками? Даем определение.

Если при некотором отображении точки X, Y отображаются на X', Y', то вектору $\overrightarrow{XY}$ сопоставляется вектор $\overrightarrow{X'Y'}$. То есть образом данного вектора считается вектор, начало и конец которого являются образами начала и конца данного вектора $\overrightarrow{XY}$ (рис. 57).

8

(Что происходит при этом с точками, лежащими на отрезке XY, не играет роли; с ними может ничего не происходить, если отображение на них не распространяется, как, например, при отображении (сжатии) окружности в эллипс и т. п.)

Замечание. Вводя понятие вектора, мы различали конкретные и абстрактные — свободные — векторы. Конкретный вектор изображается направленным отрезком, но фактически в понятии о нем играют роль только его начало и конец. «Конкретный вектор» — это упорядоченная пара точек, а не фигура, и отрезок с нею связывается лишь для наглядности.

Для конкретных векторов определяется равенство (равные векторы представляют один абстрактный, свободный, вектор); операции с векторами определяются на основе перенесения вектора к любому началу; т. е. всякий данный конкретный вектор можно заменить равным вектором. Поэтому рассматривать такие отображения векторов, при которых нарушается их равенство, имеет мало смысла.

Векторы при параллельном проектировании. Заметим, что если мы хотим, пользуясь векторами, доказать, что при параллельном проектировании отрезки проектируются в отрезки, то рассматривать векторы как направленные отрезки нецелесообразно (раз еще нужно доказать, что отрезок отображается на отрезок). И поэтому тоже векторы нужно рассматривать как упорядоченные пары точек и понимать отображения векторов как было только что определено.

Итак, рассмотрим проектирование вдоль прямой a на плоскость α.

Как было доказано, каждый вектор однозначно разлагается на составляющие: одну — параллельную плоскости α, другую — параллельную прямой a.

Теорема 2. *При разложении вектора $\overrightarrow{XY}$ на составляющие, параллельные плоскости α и прямой a, составляющие на плоскости α получаются параллельным проектированием вдоль прямой a. То есть если X', Y' — проекции точек X, Y, то вектор $\overrightarrow{X'Y'}$ и есть составляющая вектора $\overrightarrow{XY}$ на плоскости α* (рис. 57).

Доказательство. Для доказательства достаточно вспомнить, как строятся составляющие

9

вектора, параллельные данной плоскости и данной прямой.

Пусть дан вектор — направленный отрезок $\overrightarrow{XY}$, — строим его составляющие вдоль прямой a и плоскости α.

Через начало вектора $\overrightarrow{XY}$ проводим плоскость β, параллельную α, и из конца вектора проводим прямую b, параллельную прямой a. Точка Y'' ее пересечения с плоскостью β и дает конец вектора $\overrightarrow{XY''}$, служащего составляющей вектора $\overrightarrow{XY}$ на плоскости β. Проводя через X и Y прямые, параллельные a, до пересечения с плоскостью α, получаем в ней точки X', Y'. При этом, как очевидно[1]), будет $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY''}$. Итак, $\overrightarrow{X'Y'}$ — это составляющая вектора $\overrightarrow{XY}$ на плоскости α при его разложении вдоль прямой a и вдоль плоскости α. Вместе с тем проведенное построение этой составляющей представляет собой не что иное, как параллельное проектирование точек X, Y на плоскость α вдоль прямой a. Теорема 2 доказана. □

Из этой теоремы следует

Теорема 3. *При параллельном проектировании сохраняются линейные соотношения между векторами, т. е. если* $\overrightarrow{AB} = p\overrightarrow{CD} + q\overrightarrow{EF}$, *то* $\overrightarrow{A'B'} = p\overrightarrow{C'D'} + q\overrightarrow{E'F'}$. *Тем самым равным векторам отвечают равные (например* $p = 1$, $q = 0$), *сумме — сумма, произведению на число — произведение на то же число.*

Доказательство. Основное свойство составляющих любых векторов состоит в том, что линейным соотношениям между векторами соответствуют такие же соотношения между их составляющими. Это заключает в себе сказанное в теореме 3. □

Теперь свойства, указанные в теореме 1, вытекают из теоремы 3 благодаря следующему предложению.

Лемма. *Если при некотором отображении сохраняются линейные соотношения векторов, то при этом*

---

[1]) Прямые XX', YY' параллельны и стало быть лежат в одной плоскости γ. Эта плоскость пересекает α и β по параллельным прямым. Итак, $XX' \parallel Y''Y'$, $XY'' \parallel X'Y'$. Поэтому отрезки XY'' и $X'Y'$ — стороны параллелограмма и, значит, $\overrightarrow{XY''} = \overrightarrow{X'Y'}$.