Russian Language Exam
Spring 07

Functional Analysis

Введение
в выпуклый анализ

§ 1. Предварительные сведения из теории меры и функционального анализа

1. Пространства с мерой, основные определения. Пусть Ω — непустое множество. Для каждого класса $\mathscr{S}$ подмножеств Ω обозначим

$$\mathscr{S}^c = \{A\colon \Omega \setminus A \in \mathscr{S}\}, \qquad \sigma\mathscr{S} = \left\{A : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathscr{S}\right\}.$$

Класс $\mathscr{T}$ подмножеств Ω называется *σ-алгеброй* на Ω, если $\varnothing \in \mathscr{T}$ и $\mathscr{T} = \mathscr{T}^c = \sigma\mathscr{T}$. На Ω существуют минимальная и максимальная σ-алгебры, состоящие соответственно из двух множеств $\varnothing$, Ω и из всех подмножеств Ω. Для каждого непустого класса $\mathscr{S}$ подмножеств Ω существует наименьшая содержащая его σ-алгебра $\Sigma\mathscr{S}$; она совпадает с пересечением всех σ-алгебр на Ω, содержащих $\mathscr{S}$[1]. Если $\mathscr{T} = \Sigma\mathscr{S}$, то говорят, что σ-алгебра $\mathscr{T}$ порождена классом $\mathscr{S}$. Пара $(\Omega, \mathscr{T})$, составленная из множества $\Omega \neq \varnothing$ и σ-алгебры $\mathscr{T}$ на нем, называется *измеримым пространством*, а элементы $\mathscr{T}$ — *измеримыми множествами*. Очевидно, счетные объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.

Мерой на $(\Omega, \mathscr{T})$ называется всякая функция $\mu : \mathscr{T} \to R^1 \cup \{+\infty\}$, не равная тождественно $+\infty$ и счетно аддитивная, т. е. удовлетворяющая равенству

$$\mu \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n \tag{0.1}$$

для каждой последовательности попарно непересекающихся измеримых множеств A_n, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно этому определению $\mu\varnothing = 0$. Мера μ называется *неотрицательной*, если ее значения лежат в $R^1_+ \cup \{+\infty\}$. Неотрицательная мера, не равная тождественно 0, называется *положительной*.

[1] Легко видеть, что $\Sigma\mathscr{S} = \bigcup_{\alpha} \mathscr{S}^{\alpha}$, где α пробегает счетные порядковые числа, $\mathscr{S}^1 = \mathscr{S} \cup \mathscr{S}^c$, при $\alpha > 1$ класс $\mathscr{S}^{\alpha}$ состоит из множеств вида $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ или $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathscr{S}^{\alpha_n}$, $\alpha_n < \alpha$, $n = 1, 2, \ldots$

С каждой положительной мерой μ можно связать следующие классы измеримых множеств:

$$\mathscr{T}_0(\mu) = \{A \in \mathscr{T}:\ \mu A = 0\},$$

$$\mathscr{T}^*(\mu) = \{A \in \mathscr{T}:\ 0 < \mu A < +\infty\},$$

$$\mathscr{T}(\mu) = \mathscr{T}_0(\mu) \cup \mathscr{T}^*(\mu).$$

Положительная мера μ называется *конечной*, если $\Omega \in \mathscr{T}^*(\mu)$, и *σ-конечной*, если $\Omega \in \sigma\mathscr{T}^*(\mu)$.

Говорят, что σ-алгебра $\mathscr{T}$ *полна* относительно положительной меры μ, если $[A \in \mathscr{T}_0(\mu),\ B \subset A] \Rightarrow B \in \mathscr{T}_0(\mu)$. Существует наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathscr{T}$ и полная относительно μ. Она обозначается $\mathscr{T}_{\hat{\mu}}$ и определяется равенством $\mathscr{T}_{\hat{\mu}} = \Sigma\left(\mathscr{T} \cup \hat{\mathscr{T}_0}(\mu)\right)$, где

$$\hat{\mathscr{T}_0}(\mu) \overset{\text{def}}{=} \{B:\ \exists A \in \mathscr{T}_0(\mu),\ B \subset A\}.$$

Легко видеть, что

$$\mathscr{T}_{\hat{\mu}} = \{A \cup B : A \in \mathscr{T},\ B \in \hat{\mathscr{T}_0}(\mu)\},$$

и если $A \cup B = A' \cup B'$ суть два представления некоторого элемента $\mathscr{T}_{\hat{\mu}}$, то симметрическая разность $A \triangle A' \overset{\text{def}}{=} (A \setminus A') \cup (A' \setminus A)$ принадлежит $\mathscr{T}_0(\mu)$ и стало быть $\mu A = \mu A'$. Тогда μ продолжается на $\mathscr{T}_{\hat{\mu}}$ по формуле $\mu(A \cup B) = \mu A$. Непосредственно очевидно, что μ счетно аддитивна на $\mathscr{T}_{\hat{\mu}}$.

Таким образом, положительная мера μ, заданная первоначально на $\mathscr{T}$, может быть продолжена до положительной меры на $\mathscr{T}_{\hat{\mu}}$; поэтому всегда можно считать, что исходная σ-алгебра $\mathscr{T}$ полна относительно μ. Далее рассматриваются положительные меры μ, удовлетворяющие следующему условию:

$$[A \in \mathscr{T},\ \mu A = +\infty] \Rightarrow [\exists B \in \mathscr{T}^*(\mu),\ B \subset A]. \tag{0.2}$$

Любая σ-конечная положительная мера, очевидно, удовлетворяет ему.

Пусть μ — положительная мера, удовлетворяющая (0.2). Множество $A \subset \Omega$ называется *μ-измеримым*, если $A \cap B \in \mathscr{T}_{\hat{\mu}}$ для каждого $B \in \mathscr{T}(\mu)$. Непосредственно проверяется, что μ-измеримые множества образуют σ-алгебру; она обозначается $\mathscr{T}_\mu$. Очевидно, $\mathscr{T}_\mu \supset \mathscr{T}_{\hat{\mu}}$, а для σ-конечной меры это включение превращается в равенство. Мера μ продолжается до положительной меры на $\mathscr{T}_\mu$ по формуле [2]

$$\mu A = \sup\{\mu B:\ B \in \mathscr{T}(\mu),\ B \subset A\}, \quad A \in \mathscr{T}_\mu$$

и при этом $(\mathscr{T}_\mu)_\mu = \mathscr{T}_\mu$.

---

[2] Легко показать, что условие (0.2) не только достаточно, но и необходимо для продолжимости меры μ на $\mathscr{T}_\mu$.

Пример. Пусть Ω — квадрат со стороной длины 1, $\xi \in [0, 1]$, Ω_ξ — горизонтальный отрезок длины 1, отстоящий на расстоянии ξ от нижней стороны Ω, $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на Ω_ξ, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω, порожденная множествами вида $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{\xi_k}$, где $A_{\xi_k} \in \mathcal{F}_{\xi_k}$, $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (Легко видеть, что каждый элемент $\mathcal{F}$ имеет вид $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{\xi_k}$ или $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{\xi_k}\right) \cup \cup \left(\bigcup\limits_{\xi \in [0,1] \setminus \Xi_0} \Omega_\xi\right)$, где $A_{\xi_k} \in \mathcal{F}_{\xi_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, множество Ξ_0 конечно или счетно). Обозначим через μ_0 меру Лебега на $[0, 1]$ и положим $\mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 A_{\xi_k}$ для множеств вида $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{\xi_k}$ и $\mu A = +\infty$ для всех других $A \in \mathcal{F}$. Тогда μ — положительная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, удовлетворяющая (0.2), $\mathcal{F}$ полна относительно μ, $\mathcal{F}_\mu = \left\{A = \bigcup\limits_{\xi \in [0,1]} A_\xi : A_\xi \in \mathcal{F}_\xi\right\}$,

$$\mu A = \sum_{\xi \in [0,1]} \mu_0 A_\xi \qquad \forall A = \bigcup_{\xi \in [0,1]} A_\xi \in \mathcal{F}_\mu.$$

Пространством с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ вместе с положительной мерой μ на нем, удовлетворяющей условию (0.2). Всегда можно считать, не ограничивая общности, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu$.

Простейший пример пространства с мерой, для которого $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu$,— это пространство с конечной мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, где $\mathcal{F}$ полна относительно μ. Из пространств с конечной мерой можно строить более общие пространства с мерой подобно тому, как это сделано в примере выше. Пусть Ξ — произвольное непустое множество, для каждого $\xi \in \Xi$ задано пространство с конечной мерой $(\Omega_\xi, \mathcal{F}_\xi, \mu_\xi)$ и σ-алгебра $\mathcal{F}_\xi$ полна относительно μ_ξ. Обозначим через Ω прямую сумму множеств Ω_ξ, $\xi \in \Xi$, отождествляемую с объединением их попарно непересекающихся экземпляров. Возьмем σ-алгебру

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \cap \Omega_\xi \in \mathcal{F}_\xi \quad \forall \xi \in \Xi\}$$

на Ω и положим

$$\mu A = \sum_{\xi \in \Xi} \mu_\xi (A \cap \Omega_\xi) \quad \forall A \in \mathcal{F}. \tag{0.3}$$

Очевидно μ — положительная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Имеем

$$\Omega_\xi \in \mathcal{F}^*(\mu) \quad \forall \xi \in \Xi,$$

$$A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cap \Omega_\xi \in \mathcal{F} \quad \forall \xi \in \Xi,$$

$$A \in \mathcal{F}_0(\mu) \Leftrightarrow A \cap \Omega_\xi \in \mathcal{F}_{\xi 0}(\mu_\xi) \quad A \xi \in \Xi,$$

$$A \in \mathcal{F}(\mu) \Leftrightarrow \Big[A \cap \Omega_\xi \in \mathcal{F}_{\xi 0}(\mu_\xi) \quad \forall \xi \notin \Xi_0,$$

$$\sum_{\xi \in \Xi_0} \mu_\xi (A \cap \Omega_\xi) < +\infty\Big],$$

где $\Xi_0 = \Xi_0(A)$ — конечное или счетное подмножество Ξ.

Отсюда видно, что μ удовлетворяет (0.2) и $\mathscr{T}=\mathscr{T}_\mu$. Пространство с мерой $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ называется *прямой суммой* пространств $(\Omega_\xi, \mathscr{T}_\xi, \mu_\xi)$, $\xi\in\Xi$.

Пространство $(\Omega, \mathscr{T}_\mu, \mu)$ из примера выше — частный случай конструкции прямой суммы, в котором Ξ имеет мощность континуума, а каждое $(\Omega_\xi, \mathscr{T}_\xi, \mu_\xi)$ есть отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. Другим примером может служить произвольное пространство с σ-конечной мерой, относительно которой полна σ-алгебра $\mathscr{T}$. В этом случае Ξ счетно, а если мера конечна, то можно считать, что Ξ состоит из одного элемента.

Пусть $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mathscr{T}=\mathscr{T}_\mu$. Говорят, что μ обладает *свойством прямой суммы*, если существует семейство попарно непересекающихся множеств $\Omega_\xi\in\mathscr{T}^*(\mu)$, $\xi\in\Xi$ такое, что $\Omega\setminus\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}\Omega_\xi\in\mathscr{T}_0(\mu)$ и каждое $A\in\mathscr{T}^*(\mu)$ может быть представлено в виде

$$A=A_0\cup\Big(\bigcup_{\xi\in\Xi_0}(A\cap\Omega_\xi)\Big), \tag{0.4}$$

где $A_0\in\mathscr{T}_0(\mu)$, $\Xi_0=\Xi_0(A)$ — конечное или счетное подмножество Ξ. Если при этом $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}\Omega_\xi=\Omega$, то говорят, что $\{\Omega_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — *разложение* Ω *в прямую сумму*. Присоединяя множество $\Omega\setminus\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}\Omega_\xi$ к какому-нибудь из Ω_ξ, можно всегда считать без ограничения общности, что $\{\Omega_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — разложение Ω в прямую сумму.

Лемма 0.1. *Пусть* $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ — *пространство с мерой,* $\mathscr{T}=\mathscr{T}_\mu$. *Мера* μ *обладает свойством прямой суммы тогда и только тогда, когда* $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ *представимо как прямая сумма пространств* $(\Omega_\xi, \mathscr{T}_\xi, \mu_\xi)$, $\xi\in\Xi$, *где каждая* μ_ξ *конечна,* $\mathscr{T}_\xi$ *полна относительно* μ_ξ.

Доказательство. Пусть μ обладает свойством прямой суммы, $\{\Omega_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — соответствующее семейство множеств из $\mathscr{T}^*(\mu)$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\{\Omega_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — разложение Ω в прямую сумму. Положим

$$\mathscr{T}_\xi=\mathscr{T}|_{\Omega_\xi}\overset{\text{def}}{=}\{A\cap\Omega_\xi : A\in\mathscr{T}\}$$

и обозначим через μ_ξ ограничение μ на $\mathscr{T}_\xi$. Очевидно, мера μ_ξ конечна и $\mathscr{T}_\xi$ полна относительно μ_ξ, $\xi\in\Xi$. Лемма будет доказана, если мы проверим, что $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ есть прямая сумма пространств $(\Omega_\xi, \mathscr{T}_\xi, \mu_\xi)$, $\xi\in\Xi$, т. е.

$$\mathscr{T}=\{A : A\cap\Omega_\xi\in\mathscr{T}\ \forall\xi\in\Xi\}$$

и имеет место формула (0.3).

Пусть $A\cap\Omega_\xi\in\mathscr{T}$ $\forall\xi\in\Xi$. Возьмем произвольное множество $B\in\mathscr{T}^*(\mu)$ и представим его в виде $B=B_0\cup\Big(\bigcup\limits_{\xi\in\Xi_0}(B\cap\Omega_\xi)\Big)$, где

Differential Equations

3. ДРУГОЙ ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

3.1. Постановка задачи

В этом параграфе мы изучим уравнение

$$u'' - \Delta u + |u'|^{\rho} u' = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T[\tag{3.1}$$

($\rho > 0$ — заданное число и, как в предыдущих параграфах, $u' = \partial u/\partial t$, $u'' = \partial^2 u/\partial t^2$) с граничными и начальными условиями

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{3.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \bullet \tag{3.3}$$

Таким образом, речь идет о задаче, в каком-то смысле аналогичной той, которую мы рассмотрели в § 1, причем член $|u'|^{\rho} u'$ заменяет $|u|^{\rho} u$.

Здесь нелинейность «более сильная», поскольку нелинейный член является функцией от u', а не от u. Тем не менее настоящая задача решается проще, чем задача из § 1; последнее связано с двумя обстоятельствами:

(i) как и в § 1, можно получить априорную оценку, позволяющую воспользоваться соображениями компактности (этому посвящен п. 3.2);

(ii) можно воспользоваться методами, основанными на монотонности, см. гл. 2, § 6●

3.2. Теорема существования и единственности

Теорема 3.1. *Пусть заданы функции f, u_0, u_1, причем*

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q), \tag{3.4}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{3.5}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.6}$$

Предположим, что Ω — ограниченная область с гладкой границей.

Тогда существует функция u, являющаяся единственным решением задачи (3.1), (3.2), (3.3) *и такая, что*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{3.7}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{3.8}$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.9}$$

$$u' \in L^{\rho+2}(Q). \tag{3.10}$$

Доказательство теоремы 3.1. *Единственность* доказывается непосредственно[1]). Если u и v — два решения, то $w=u-v$ удовлетворяет уравнению

$$w''-\Delta w+|u'|^{\rho}u'-|v'|^{\rho}v'=0. \tag{3.11}$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства (3.11) с $w'(t)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2)+\int\limits_{\Omega}(|u'|^{\rho}u'-|v'|^{\rho}v')(u'-v')\,dx=0, \tag{3.12}$$

где

$$\|\varphi\|^2=\int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad}\varphi)^2\,dx. \tag{3.13}$$

Однако (это первый пример монотонности, с которым мы встречаемся)

$$\int\limits_{\Omega}(|u'|^{\rho}u'-|v'|^{\rho}v')(u'-v')\,dx\geqslant 0, \tag{3.14}$$

и из (3.12) следует, что $\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2)\leqslant 0$, и, значит, $w=0$●

Доказательство теоремы 3.1. *Существование.*

1° *Приближенное решение.* Как и в п. 1.7, мы воспользуемся методом Фаэдо — Галёркина с выбором специального базиса. Пусть w_j — собственные функции задачи Дирихле для оператора $-\Delta$:

$$-\Delta w_j=\lambda_j w_j,\quad j=1,\ \dots,\ w_j=0 \text{ на } \Gamma. \tag{3.15}$$

Мы предполагаем, что граница Γ области Ω достаточно гладкая, так что

$$w_j\in H^2(\Omega) \quad\text{и}\quad w_j\in L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.16}$$

Выберем u_{0m}, $u_{1m}\in[w_1,\ \dots,\ w_m]$ таким образом, чтобы

$$u_{0m}\to u_0 \quad\text{в}\quad H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \tag{3.17}$$

$$u_{1m}\to u_1 \quad\text{в}\quad H_0^1(\Omega)\cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.18}$$

Такой выбор возможен. Определим далее $u_m(t)$ как решение задачи

$$\begin{gathered}(u_m''(t),\ w_j)+a(u_m(t),\ w_j)+(|u_m'(t)|^{\rho}u_m'(t),\ w_j)=(f(t),\ w_j),\\ 1\leqslant j\leqslant m,\qquad u_m(t)\in[w_1,\ \dots,\ w_m]\end{gathered} \tag{3.19}$$

[1]) И имеет место при более общих условиях, см. гл. 2, § 6.

$$\left(\text{где } a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx\right),$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u'_m(0) = u_{1m}. \tag{3.20}$$

Система (3.19), (3.20) разрешима локально на некотором интервале $[0, t_m]$.

Как и в § 1, мы выведем априорные оценки, из которых будет следовать, что $t_m = T$.

2° *Априорная оценка* (I). Если $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$, то, умножая (3.19) на $g'_{jm}(t)$ и суммируя по j, найдем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \int_{\Omega} |u'_m(t)|^{\rho+2} dx = (f(t), u'_m(t)),$$

откуда

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \int_0^t \int_{\Omega} |u'_m(x, \sigma)|^{\rho+2} dx\, d\sigma =$$

$$= \int_0^t (f(\sigma), u'_m(\sigma))\, d\sigma + \frac{1}{2}(|u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2), \tag{3.21}$$

и, следовательно,

$$|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leqslant C, \tag{3.22}$$

$$\int_Q |u'_m|^{\rho+2} dx\, dt \leqslant C. \tag{3.23}$$

Из этих оценок уже вытекает, что $t_m = T\ \forall m$.

3° *Априорная оценка* (II). Благодаря (3.15) мы можем заменить в (3.19) w_j на $-\Delta w_j$; опять умножая (3.19) на $g'_{jm}(t)$ и суммируя по j, находим

$$a(u''_m(t), u'_m(t)) + (\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\rho} u'_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} dx = a(f(t), u'_m(t)). \tag{3.24}$$

Член из (3.24), не являющийся билинейным, можно переписать в виде

$$(\rho + 1) \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(|u'_m|^{\rho/2} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right)^2 dx = \frac{(\rho + 1)}{\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\rho/2} u'_m)\right)^2 dx,$$

и в силу (3.24) мы получим

$$\frac{1}{2}(\| u_m'(t)\|^2+|\Delta u_m(t)|^2)+\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m'|^{\rho/2}u_m')\right)^2 dx\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2}(\| u_{1m}\|^2+|\Delta u_{0m}|^2)+\int_0^t a(f(\sigma),\ u_m'(\sigma))\,d\sigma. \quad (3.25)$$

Используя (3.17), (3.18), мы заключаем, что

$$u_m' \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \quad (3.26)$$

$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega))\ ^{1)}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m'|^{\rho/2}u_m'),\ i=1,\ \ldots,\ n, \text{ ограничены в } L^2(Q). \quad (3.28)$$

4° *Априорная оценка* (III). Из (3.19) следует, что

$$|u_m''(0)|^2=(\Delta u_{0m},\ u_m''(0))+(f(0),\ u_m''(0))-(|u_{1m}|^\rho u_{1m},\ u_m''(0)),$$

откуда вытекает, что

$$|u_m''(0)|\leqslant|\Delta u_{0m}|+|f(0)|+\left(\int_\Omega |u_{1m}|^{2(\rho+1)}dx\right)^{1/2}$$

и, следовательно, ввиду (3.17), (3.18)

$$|u_m''(0)|\leqslant C. \quad (3.29)$$

Продифференцировав (3.19) по t, найдем

$$(u_m'''(t),\ w_j)+a(u_m'(t),\ w_j)+(\rho+1)(|u_m'(t)|^\rho u_m''(t),\ w_j)=$$
$$=(f'(t),\ w_j). \quad (3.30)$$

Умножая на $g_{jm}''(t)$ и суммируя по j, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_m''(t)|^2+\|u_m'(t)\|^2)+(\rho+1)\int_\Omega |u_m'(t)|^\rho u_m''(t)^2\,dx=$$
$$=(f'(t),\ u_m''(t)). \quad (3.31)$$

Член в (3.31), не являющийся билинейным, равен

$$\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}(|u_m'(t)|^{\rho/2}u_m'(t))\right)^2dx.$$

---

[1]) Мы здесь воспользовались неравенством $|\Delta\varphi|\geqslant C\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$, где $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $\Delta\varphi\in L^2(\Omega)$, которое выполнено в случае достаточно регулярной границы Г.

Следовательно, из (3.31) вытекает, что

$$\frac{1}{2}(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) + \frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m)\right)^2 dx\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}|u''_m(0)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2 + \int_0^t (f'(\sigma),\ u''_m(\sigma))\,d\sigma. \quad (3.32)$$

Отсюда, благодаря (3.29) мы можем еще раз получить (3.26) и, кроме того, получаем, что

$$u''_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m) \text{ ограничены в } L^2(Q). \quad (3.34)$$

5° *Предельный переход.* Благодаря (3.22), (3.23), (3.26), (3.27), (3.28), (3.33), (3.34) мы можем из последовательности u_m выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.35)$$

$$u'_\mu \to u' \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \quad (3.36)$$

$$u''_\mu \to u'' \ \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \quad (3.37)$$

$$u'_\mu \to u' \ \textit{сильно} \text{ в } L^2(Q) \text{ и почти всюду на } Q, \quad (3.38)$$

$$|u'_\mu|^\rho u'_\mu \to \psi \text{ слабо в } L^{(\rho+2)/(\rho+1)}(Q), \quad (3.39)$$

$$|u'_\mu|^{\rho/2}u'_\mu \to \chi \text{ слабо в } H^1(Q). \quad (3.40)$$

Согласно лемме 1.3,

$$\psi = |u'|^\rho u', \quad \chi = |u'|^{\rho/2}u'.$$

Наша теорема теперь доказывается без труда (таким же образом, как теорема 1.1 в § 1, но при этом проще, поскольку мы получаем «более сильное» решение) ●

Замечание 3.1. Мы одновременно получили, что

$$|u'|^{\rho/2}u' \in H^1(Q) \;● \quad (3.41)$$

Замечание 3.2. Теорема распространяется на случай *неограниченной* области Ω с помощью «аппроксимации» Ω последовательностью ограниченных областей ●

Замечание 3.3. Используя более специальную, чем (1.42), теорему о компактности, можно получить (см. § 5) решение (более слабое) при более общих условиях; дальше в гл. 2 мы покажем, что методы монотонности позволяют получать решения (более слабые) при еще более общих условиях ●

Differential Geometry

ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Основным геометрическим понятием при построении асимптотических решений уравнений с малым параметром с помощью канонического оператора Маслова является понятие лагранжева многообразия в фазовом пространстве. Настоящая глава посвящена систематическому исследованию тех топологических свойств лагранжевых многообразий, которые необходимы при построении канонического оператора.

§ 2.1. Лагранжевы многообразия в гамильтоновом пространстве

Пусть $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ — вещественное $2n$-мерное векторное пространство с отмеченным базисом $(e, f) = (e_1, \dots, e_n, f^1, \dots, f^n)$. Пространство $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ будем называть фазовым пространством. Координаты произвольного вектора $\xi \in \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ мы будем разбивать на две группы: x-координаты $(x^1, \dots, x^n)$ и p-координаты $(p_1, \dots, p_n)$:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x^k e_k + \sum_{k=1}^{n} p_k f^k.$$

Рассмотрим в фазовом пространстве $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ внешнюю дифференциальную форму

$$dp \wedge dx = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dx^k. \qquad (1.1)$$

Поскольку коэффициенты формы (1.1) постоянны, то в каждой точке $\xi \in \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ фазового пространства эта форма индуцирует одну и ту же билинейную кососимметрическую форму $\langle\ ,\ \rangle$ на касательном пространстве, которое мы можем отождествить с самим фазовым пространством $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$. Эта билинейная форма в базисе (e, f) записывается с помощью кососимметрической матрицы I_n, равной

$$I_n=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Пусть $\varphi\colon M\to\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ — n-мерное подмногообразие в фазовом пространстве. Если ограничение формы (1.1) на подмногообразие M тождественно равно нулю:

$$\varphi^*(dp\wedge dx)\equiv 0,$$

то многообразие M называется *лагранжевым многообразием фазового пространства* $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$.

Частным случаем лагранжевых многообразий являются линейные подпространства $\varphi\colon L\to\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$, на которых ограничение формы (1.1) тождественно равно нулю. Такие линейные подпространства, одновременно являющиеся лагранжевыми многообразиями, мы будем называть лагранжевыми плоскостями в фазовом пространстве $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$.

Совершенно очевидно, что n-мерное подмногообразие $\varphi\colon M\to\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ является лагранжевым многообразием тогда и только тогда, когда все его касательные пространства $T_m(M)$, $m\in M$, являются лагранжевыми плоскостями, при вложении $d\varphi\colon T_m(M)\to\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$.

Типичным примером лагранжева многообразия является график градиента гладкой функции переменных $(x^1, \ldots, x^n)$. Именно, пусть $S(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкая функция, определенная в некоторой области V n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ с базисом $e=(e_1, \ldots, e_n)$ и координатами $x=(x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим вложение

$$\varphi\colon V\to\Phi_{\mathbf{R}}^{-}(2n),$$

задаваемое равенствами

$$\begin{aligned} x^k &= x^k, && 1\leqslant k\leqslant n,\\ p^k &= \frac{\partial S}{\partial x^k}(x^1, \ldots, x^n), && 1\leqslant k\leqslant n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда подмногообразие V является лагранжевым многообразием. В самом деле, ограничение $\varphi^*(dp\wedge dx)$ формы (1.1) в локальной системе координат $x=(x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$\varphi^*(dp\wedge dx)=\sum_{k=1}^{n}\left(d\frac{\partial S}{\partial x^k}\wedge dx^k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x^k\,\partial x^l}dx^l\wedge dx^k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{(dx^k)^2}dx^k\wedge dx^k+\sum_{k\neq l}\frac{\partial^2 S}{\partial x^k\,\partial x^l}(dx^l\wedge dx^k+dx^k\wedge dx^l)\equiv 0.$$

В некотором смысле всякое лагранжево многообразие может быть представлено в виде (1.3). Точная формулировка будет приведена ниже под названием леммы о локальных канонических координатах.

Пусть I, J обозначают некоторые подмножества индексов от 1 до n, $\bar I$ обозначает дополнение к I, $\bar I=\{1, \ldots, n\}-I$. Обозначим через $\mathbf{R}^I\times\mathbf{R}_J\subset\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ подпространство порожденное векторами $\{e_k,\ k\in I;\ f^l,\ l\in J\}$. Соответственно координаты векторов из $\mathbf{R}^I\times\mathbf{R}_J$ будем обозначать через (x^I, p_J). Пусть

$$P_J^I:\ \Phi_{\mathbf{R}}(2n)\to\mathbf{R}^I\times\mathbf{R}_J$$

обозначает проекцию фазового пространства $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ вдоль дополнительного подпространства $\mathbf{R}^{\bar I}\times\mathbf{R}_{\bar J}$. Из теоремы о неявных функциях следует, что для подмногообразия φ: $M\to\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ координаты (x^I, p_J) служат локальной системой координат для многообразия M в окрестности точки $m\in M$ тогда и только тогда, когда проекция

$$P_J^I:\ T_m(M)\to\mathbf{R}^I\times\mathbf{R}_J$$

является изоморфизмом. Эти же координаты $(x^I,\ p_J)$ являются системой координат (линейной) и для самого касательного пространства $T_m(M)$.

Л е м м а 1.1 (лемма о локальной канонической системе координат). *Для любой лагранжевой плоскости* φ: $L\subset\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ *существует такой набор индексов* I, *что* *проекция*

$$P_{\bar I}^{I}:\ L \to \mathbf{R}^{I}\times \mathbf{R}_{\bar I}$$

является изоморфизмом, т. е. координаты $(x^I, p_{\bar I})$ *образуют систему координат плоскости* L.

Доказательство. Рассмотрим проекцию

$$P^n\colon \Phi_{\mathbf{R}}(2n)\to \mathbf{R}^n;$$

здесь n обозначает множество всех индексов $(1, \ldots, n)$. Пусть $L'=P^n(L)$ — линейное подпространство в $\mathbf{R}^n$, $\dim L'\leqslant \dim L$. Совершенно очевидно, что

$$L=L'\oplus L'',\quad L''=\operatorname{Ker}P^n,\ L'\subset \mathbf{R}^n.$$

Пусть I — такой набор индексов, что проекция

$$P^I:\ L'\to \mathbf{R}^I$$

является изоморфизмом. Покажем, что тогда проекция

$$P_{\bar I}^{I}:\ L\to \mathbf{R}^I\times \mathbf{R}_{\bar I}$$

тоже является изоморфизмом. Для этого достаточно показать, что $\operatorname{Ker}(P_{\bar I}^{I})|_L=0$, поскольку

$$n=\dim L=\dim \mathbf{R}^I+\dim \mathbf{R}_{\bar I}.$$

Пусть $\xi\in L$ — такой вектор, что

$$P_{\bar I}^{I}(\xi)=0.$$

Тогда координаты вектора ξ имеют вид $\xi=(0, x^{\bar I}, p_I, 0)$ в разложении $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)=\mathbf{R}^I\times\mathbf{R}^{\bar I}\times\mathbf{R}_I\times\mathbf{R}_{\bar I}$. В частности, $P^{\bar I}(\xi)=0$, т. е. $P^n(\xi)=0$. Следовательно, $\xi\in L''\subset\mathbf{R}_I$, т. е. $x^{\bar I}=0$. Таким образом, $\xi=(0, 0, p_I, 0)$. Поскольку проекция P^I: $L\to\mathbf{R}^I$ — эпиморфизм, то для любого набора координат x^I найдется такой вектор η, что $P^I(\eta)=x^I$. Тогда $\eta=(x^I, x^{\bar I}, p_I, p_{\bar I})$. Вычислим значение билинейной формы $\langle\ ,\ \rangle$ на паре векторов ξ, η (см. (1.2)):

$$\langle\xi,\eta\rangle=\sum_{k\in I}p_k x^k.$$

Поскольку для лагранжевой плоскости L значение $\langle \xi, \eta \rangle$ тождественно равняется нулю, мы получаем тождество

$$\sum_{k \in I} p_k x^k \equiv 0$$

по переменным x^k, откуда следует, что $p_k = 0$, $k \in I$. Таким образом, $\xi = 0$, т. е. $\operatorname{Ker} P^I_{\bar{I}} = 0$. Лемма 1.1 доказана.

Из леммы 1.1 следует, что для любого лагранжева многообразия $\varphi\colon M \to \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ и любой его точки $m \in M$ найдется такая окрестность $U \ni m$ и такой набор индексов I, что в качестве локальной системы координат могут служить функции $(x^I, p_{\bar{I}})$ — координаты точки m в фазовом пространстве $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$. Остальные координаты $(x^{\bar{I}}, p_I)$ точки m в фазовом пространстве $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$, следовательно, являются функциями от переменных $(x^I, p_{\bar{I}})$:

$$\begin{aligned} x^{\bar{I}} &= x^{\bar{I}}(x^I, p_{\bar{I}}), \\ p_I &= p_I(x^I, p_{\bar{I}}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Карта U, на которой в качестве локальной системы координат можно взять координаты $(x^I, p_{\bar{I}})$, будет называться *канонической картой* и обозначается через U_I. Тогда из леммы 1.1 следует, что на любом лагранжевом многообразии M существует атлас $\{U_I\}$ *канонических карт*.

Аналогично формулам (1.3) попытаемся найти функцию $S_I(x^I, p_{\bar{I}})$, удовлетворяющую равенствам

$$\frac{\partial S_I}{\partial x^I} = p_I, \quad \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}} = -x^{\bar{I}}. \tag{1.5}$$

Система (1.5) эквивалентна уравнению в терминах дифференциальных форм

$$dS_I = p_I\, dx^I - x^{\bar{I}}\, dp_{\bar{I}}. \tag{1.6}$$