Russian Exam Spring 2009

Applied / Probability

Do not rewrite all formulae — you can refer to them by number.

О СРЕДНИХ ВЕЛИЧИНАХ*

Start

Если мы примем называть вообще *математическим ожиданием* какой-либо величины сумму всех возможных для нее значений, умноженных на вероятности их, то нетрудно показать относительно пределов, в которых будет содержаться сумма каких-либо величин, такую весьма простую теорему:

Теорема. *Если математические ожидания величин* $x, y, z, \ldots$ *суть*

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,$$

а математические ожидания квадратов $x^2, y^2, z^2, \ldots$ *суть*

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots,$$

то вероятность, что сумма

$$x+y+z+\cdots$$

заключается в пределах

$$a+b+c\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots},$$
$$a+b+c\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots},$$

при всяком значении α *остается больше* $1-\frac{1}{\alpha^2}$.

Доказательство. Пусть будут

$$\begin{array}{c} x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_l, \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_m, \\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

все возможные значения величин $x, y, z, \ldots$ и

$$\begin{array}{c} p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_l, \\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_m, \\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

вероятности этих значений, или, иначе, вероятности предположений

$$\begin{array}{c} x=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_l, \\ y=y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_m, \\ z=z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

---

* Опубликовано в Матем. Сборнике, II (1867), стр. 1—9, и в Journ. de math. pures et appl., II série, XII (1867), стр. 177—184; см. также Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, том I, СПб. 1899, стр. 687—694. — *Ред.*

При этом знакоположении математические ожидания величин

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,$$
$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ \ldots,$$

представятся так:

$$\left.\begin{array}{l} a = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_lx_l\,, \\ b = q_1y_1 + q_2y_2 + q_3y_3 + \cdots + q_my_m, \\ c = r_1z_1 + r_2z_2 + r_3z_3 + \cdots + r_nz_n\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + \cdots + p_lx_l^2\,, \\ b_1 = q_1y_1^2 + q_2y_2^2 + q_3y_3^2 + \cdots + q_my_m^2\,, \\ c_1 = r_1z_1^2 + r_2z_2^2 + r_3z_3^2 + \cdots + r_nz_n^2\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (2)$$

С другой стороны, так как выше показанные предположения относительно величин $x,\ y,\ z,\ \ldots$ суть единственно возможные, то вероятности их будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l = 1, \\ q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_m = 1, \\ r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (3)$$

На основании уравнений (1), (2), (3), нетрудно найти, к чему приводится сумма всех значений выражения

$$(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots$$

при $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l$; $\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$; $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$; $\ldots$

Для этого мы замечаем, что это выражение, по раскрытии скобки, напишется так:

$$p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots y_\mu^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots z_\nu^2 +$$
$$+ 2p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda y_\mu + 2p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda z_\nu + 2p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots y_\mu z_\nu + \cdots$$
$$- 2(a + b + c + \cdots) p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda - 2(a + b + c + \cdots) p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots y_\mu -$$
$$- 2(a + b + c + \cdots) p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots z_\nu - \cdots + (a + b + c + \cdots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots$$

Давая здесь числу λ все значения от $\lambda = 1$ до $\lambda = l$ и складывая получаемые при этом выражения, мы находим такую сумму:

$$q_\mu r_\nu \cdots (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + \cdots + p_lx_l^2) +$$
$$+ (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l)\, q_\mu r_\nu \cdots y_\mu^2 + (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)\, q_\mu r_\nu \cdots z_\nu^2 +$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$+ 2(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_lx_l)\, q_\mu r_\nu \cdots y_\mu +$$
$$+ 2(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_lx_l)\, q_\mu r_\nu \cdots z_\nu +$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ 2(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l)\, q_\mu r_\nu \cdots y_\mu z_\nu + \cdots$$
$$- 2(a + b + c + \cdots)(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_lx_l)\, q_\mu r_\nu \cdots$$
$$- 2(a + b + c + \cdots)(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l)\, q_\mu r_\nu \cdots y_\mu$$
$$- 2(a + b + c + \cdots)(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l)\, q_\mu r_\nu \cdots z_\nu$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ (a + b + c + \cdots)^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l)\, q_\mu r_\nu \cdots$$

Заменяя здесь по (1), (2), (3) суммы

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_lx_l,$$
$$p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2+\cdots+p_lx_l^2,$$
$$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_l,$$

ез a, a_1, 1, мы получаем такую формулу:

$$a_1q_\mu r_\nu\cdots+q_\mu r_\nu\cdots y_\mu^2+q_\mu r_\nu\cdots z_\nu^2+\cdots$$
$$+2aq_\mu r_\nu\cdots y_\mu+2aq_\mu r_\nu\cdots z_\nu+\cdots+2q_\mu r_\nu\cdots y_\mu z_\nu+\cdots$$
$$-2(a+b+c+\cdots)aq_\mu r_\nu\cdots-2(a+b+c+\cdots)q_\mu r_\nu\cdots y_\mu-$$
$$-2(a+b+c+\cdots)q_\mu r_\nu\cdots z_\nu-\cdots+(a+b+c+\cdots)^2q_\mu r_\nu\cdots$$

вая здесь числу μ значения

$$\mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$$

складывая получаемые при этом выражения, мы находим по замене
мм

$$q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3\cdots+q_my_m,$$
$$q_1y_1^2+q_2y_2^2+q_3y_3^2\cdots+q_my_m^2,$$
$$q_1+q_2+q_3+\cdots+q_m,$$

основании (1), (2), (3), через b, b_1, 1 такой результат:

$$a_1r_\nu\cdots+b_1r_\nu\cdots+r_\nu\cdots z_\nu^2+\cdots$$
$$+2abr_\nu\cdots+2ar_\nu\cdots z_\nu+2br_\nu\cdots z_\nu+\cdots$$
$$-2(a+b+c+\cdots)ar_\nu\cdots-2(a+b+c+\cdots)br_\nu\cdots$$
$$-2(a+b+c+\cdots)r_\nu\cdots z_\nu-\cdots+(a+b+c+\cdots)^2r_\nu\cdots$$

оступая таким же образом со всеми числами λ, μ, ν, ..., мы находим, то сумма всех значений выражения

$$(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2p_\lambda q_\mu r_\nu\cdots,$$

олучаемых при

$$\lambda=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l;\qquad \mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m;\qquad \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;\ \ldots$$

азна

$$a_1+b_1+c_1+\cdots$$
$$+2ab+2ac+2bc+\cdots$$
$$-2(a+b+c+\cdots)a-2(a+b+c+\cdots)b-$$
$$-2(a+b+c+\cdots)c-\cdots$$
$$+(a+b+c+\cdots)^2,$$

а это по раскрытии скобок и сокращении, приводится к следующему:

$$a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots$$

Из этого мы заключаем, что сумма значений выражения

$$\frac{(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}p_\lambda q_\mu r_\nu\cdots,$$

получаемых при

$$\lambda=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l;\quad \mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m;\quad \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;\ \ldots$$

будет равна $\frac{1}{\alpha^2}$. Выкидывая же из этой суммы все члены, в которых множитель

$$\frac{(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}$$

не превосходит 1, и заменяя его единицею там, где он больше 1, мы, очевидно, сумму эту уменьшим, и, следовательно, получим сумму меньше

$$\frac{1}{\alpha^2}.$$

Но эта уменьшенная сумма, состоя из одних значений произведения

$$p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

соответствующих тем величинам x_λ, y_μ, z_ν, ..., для которых

$$\frac{(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}>1,$$

будет представлять вероятность, что x, y, z, ... имеют значения, удовлетворяющие условию

$$\frac{(x+y+z+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}>1. \tag{4}$$

Эта же вероятность может быть заменена разностью

$$1-P,$$

если через P означим вероятность, что условие (4) не выполняется, или, что одно и то же, что x, y, z, ... имеют значения, при которых отношение

$$\frac{(x+y+z+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}$$

не >1, и, следовательно, сумма

$$x+y+z+\cdots$$

не выходит из пределов

$$a+b+c+\cdots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots},$$
$$a+b+c+\cdots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots},$$

откуда видно, что для вероятности P будет иметь место такое неравенство:

$$1-P<\frac{1}{\alpha^2},$$

которое дает

$$P>1-\frac{1}{\alpha^2},$$

в чем и заключается предложенная теорема.

Если мы изобразим через N число величин $x, y, z, \ldots$, и, полагая в доказанной сейчас теореме

$$a = \frac{\sqrt{N}}{t},$$

разделим на N как сумму

$$x + y + z + \cdots,$$

так и пределы ее

$$a + b + c + \cdots + a\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots},$$
$$a + b + c + \cdots - a\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots},$$

то из этой теоремы получим следующую относительно средних величин:

Теорема. *Если математические ожидания величин*

$$x, y, z, \ldots, x^2, y^2, z^2, \ldots$$

суть

$$a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots,$$

то вероятность, что среднее арифметическое N величин $x, y, z, \ldots$ от среднего арифметического математических ожиданий этих величин разнится не более как на

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{N}},$$

при всяком значении t, будет превосходить $1 - \frac{t^2}{N}$.

Так как дроби

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{N},$$
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{N}$$

означают средние величины количеств

$$a_1, b_1, c_1, \ldots,$$
$$a^2, b^2, c^2, \ldots,$$

то всякий раз, когда математические ожидания

$$a, b, c, \ldots,$$
$$a_1, b_1, c_1, \ldots$$

не превосходят какого-либо конечного предела, выражение

$$\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{N}}$$

будет иметь конечную величину, как бы велико ни было число N, и, следовательно, в этом случае, принимая за t величину достаточно большую, мы можем сделать количество

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{N}}$$

по желанию малым. А так как при всяком t, с увеличением числа N до ∞, дробь $\frac{t^2}{N}$ приводится к нулю, то, на основании предыдущей теоремы, получается следующая:

Теорема. *Если математические ожидания величин*

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots,$$
$$U_1^2,\ U_2^2,\ U_3^2,\ \ldots$$

не превосходят какого-либо конечного предела, то вероятность, что среднее арифметическое N таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа N до ∞, приводится к единице.

В частном предположении, что величины

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots$$

приводятся к 1 или 0, смотря по тому, имеет ли место какое-нибудь событие E или нет в 1-м, 2-м, 3-м, ... *испытании*, мы замечаем, что сумма

$$U_1+U_2+U_3+\cdots+U_N$$

будет давать число *повторений* события E в N испытаний, а среднее арифметическое

$$\frac{U_1+U_2+U_3+\cdots+U_N}{N}$$

представит отношение числа *повторений* события E к числу испытаний. Чтобы приложить к этому случаю последнюю теорему, изобразим через

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_N$$

вероятности события E в 1-е, 2-е, 3-е, ..., N-е, ... испытание. При таком знакоположении для определения математических ожиданий величин

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots,\ U_N,\ \ldots,$$
$$U_1^2,\ U_2^2,\ U_3^2,\ \ldots,\ U_N^2,\ \ldots$$

находим

$$P_1\cdot 1+(1-P_1)\cdot 0;\quad P_2\cdot 1+(1-P_2)\cdot 0;\quad P_3\cdot 1+(1-P_3)\cdot 0;\quad \ldots,$$
$$P_1\cdot 1^2+(1-P_1)\cdot 0^2;\quad P_2\cdot 1^2+(1-P_2)\cdot 0^2;\quad P_3\cdot 1^2+(1-P_3)\cdot 0^2;\quad \ldots,$$

откуда видно, что эти математические ожидания равны

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$

и что среднее арифметическое первых N ожиданий есть

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\cdots+P_N}{N},$$

т. е. среднее арифметических вероятностей $P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_N$.

Вследствие этого, на основании предыдущей теоремы, мы приходим к такому заключению: *вероятность, что отношение числа повторений события к числу испытаний разнится от средней арифметической величины вероятности события в эти испытания менее чем на какую-нибудь данную величину, с увеличением числа испытаний до бесконечности приводится к единице.*

В частном случае, где вероятность события во все испытания одна и та же, отсюда получается теорема Бернулли.

Shy

Пусть матрица, дающая выражение для скалярного произведения в координатах (y), равна h_{ij}. Это означает, что

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = h_{kl}\zeta_1^k\zeta_2^l = g_{ij}\eta_1^i\eta_2^j. \tag{28}$$

Используя равенство (27), мы получаем

$$h_{kl}\zeta_1^k\zeta_2^l = (b_k^i g_{ij} b_l^j)(\zeta_1^k\zeta_2^l), \tag{29}$$

откуда

$$h_{kl} = b_k^i g_{ij} b_l^j. \tag{30}$$

Итак, $H = B^T G B$.

Определение 5. *Квадратичной формой (на векторах)* в точке $x_0^1, \ldots, x_0^n$ называется набор чисел g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, с $g_{ij} = g_{ji}$, отнесенный к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Если две системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны заменой $x = x(z)$, причем $x^i(z_0^1, \ldots, z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, \ldots, n$, то для новой системы координат $(z^1, \ldots, z^n)$ эта же квадратичная форма задается набором чисел h_{kl}, $k, l = 1, \ldots, n$ с $h_{kl} = h_{lk}$, который связан с исходным набором формулой

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^j}\right)\Big|_{z^s = z_0^s} h_{kl}\left(\frac{\partial x^l}{\partial z^i}\right)\Big|_{z^s = z_0^s}. \tag{31}$$

В матричной форме это означает, что

$$G = A^T H A.$$

Если в точке P задана квадратичная форма g_{ij}, преобразующаяся при заменах координат по закону (31), то на касательных векторах в точке P можно определить квадратичную (или билинейную) функцию $\{\xi, \xi\}$ (или $\{\xi, \eta\}$), полагая

$$\{\xi, \xi\} = g_{ij}\xi^i\xi^j$$
$$(\{\xi, \eta\} = g_{ij}\xi^i\eta^j).$$

Из закона преобразования (31) следует, что так определенные функции не зависят от выбора системы координат, а зависят только от точки P и вектора ξ (или векторов ξ и η).

Start

§ 3. Римановы и псевдоримановы пространства

1. Риманова метрика. Понятие длины или, как говорят, метрика в пространстве или области пространства уже обсуждалось нами. Длина гладкой кривой $x^i = x^i(t)$ в n-мерном пространстве с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задается, по определению, формулой (2.6)

$$l = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt, \quad \dot{x} = v = \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Geometry

и требует предварительного определения понятия длины вектора скорости кривой в каждой точке пространства.

Риманова метрика предполагает задание длин векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в виде

$$|\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j \tag{2}$$

в данной системе координат. Это означает, что $|\xi|^2$ есть квадратичная функция от вектора ξ в смысле предыдущего параграфа. Длина вектора должна не зависеть от выбора системы координат, поэтому величины g_{ij} при замене координат должны преобразовываться как компоненты квадратичной формы, т. е. по формуле (2.31). Исходя из этого, введем понятие римановой метрики.

Определение. *Римановой метрикой* в области пространства $\mathbb{R}^n$ называется положительная квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке и гладко зависящая от точки.

Используя данное в предыдущем параграфе определение квадратичной формы, можно переформулировать определение римановой метрики в таком виде:

Определение 2. Римановой метрикой в области пространства с произвольными координатами $(z^1, \ldots, z^n)$ называется набор функций $g_{ij} = g_{ji}(z^1, \ldots, z^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем матрица (g_{ij}) положительно определена. Если заданы новые координаты $(y^1, \ldots, y^n)$ в той же области, и $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, \ldots, n$, то в новых координатах риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij} = g'_{ji}(y^1, \ldots, y^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}. \tag{3}$$

Положительная определенность матрицы (g_{ij}) означает, что $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0$, если вектор ξ отличен от нулевого.

Если задана риманова метрика, то *длина кривой* $z^i = z^i(t)$ равна

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t))\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}\, dt. \tag{4}$$

Если заданы две кривые $z^i = f^i(t)$, $z^i = h^i(t)$, причем они пересекаются при $t = t_0$, то *углом между ними* называется такое число φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, что

$$\cos\varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|},$$

где $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$, $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$, где ξ, η — векторы скорости в точке пересечения $t = t_0$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ — два вектора в точке $P = (z_0^1, \ldots, z_0^n)$. Тогда их *скалярным произведением* называется число $\langle \xi, \eta \rangle$, равное

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}(z_0^1, \ldots, z_0^n)\,\xi^i \eta^j. \tag{5}$$

Законы преобразования (3), (2.20) *) величин (g_{ij}) и (ξ^i) координат векторов обеспечивают независимость скалярного произведения двух векторов, прикрепленных в одной точке, от выбора системы координат.

Скалярное произведение двух векторов, прикрепленных к разным точкам, не инвариантно при заменах координат.

П р и м е р. Евклидова метрика.

а) $n=2$. В евклидовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = y$

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В полярных координатах r, φ

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi \text{ (см. § 1)},$$

$$r = z^1, \quad \varphi = z^2, \quad g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для кривой $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

б) $n=3$. В евклидовых координатах x^1, x^2, x^3 имеем $g_{ij} = \delta_{ij}$. В цилиндрических ($y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$, см. § 1)

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

В сферических координатах ($y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$, см. § 1)

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

*) Здесь ссылка на формулу (20) из § 2. Такая же система ссылок используется и ниже.

Часто также пишут формулы для дифференциала dl или dl^2:

$$dl^2 = g_{ij}\, dz^i\, dz^j. \tag{6}$$

Для разнообразных примеров получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для декартовых координат } dl^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2, \\ &\text{для полярных } dl^2 = (dr^2) + r^2(d\varphi)^2, \\ &\text{для цилиндрических } dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2, \\ &\text{для сферических } dl^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

О п р е д е л е н и е 4. Говорят, что метрика $g_{ij} = g_{ji}(z)$ *евклидова*, если найдутся координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i = x^i(z)$ с

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}.$$

Тогда в координатах $x^1, \ldots, x^n$

$$g'_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются *евклидовыми координатами*.

Все разобранные выше примеры метрик — это евклидовы метрики в разных координатах. В следующей главе мы рассмотрим другие примеры римановых метрик.

2. Метрика Минковского. Пусть величины $g_{ij} = g_{ji}(z)$, $i, j = 1, \ldots, n$, таковы, что матрица g_{ij} не вырождена, $\det(g_{ij}) \neq 0$, но форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ неположительна (индефинитна). Тогда мы говорим, что имеется *псевдориманова метрика*.

Мы говорим, что g_{ij} — псевдориманова метрика *типа* (p, q), где $p + q = n$, если p и q — положительный и отрицательный индекс инерции квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$.

Нетрудно видеть (см. задачу в конце параграфа), что числа p и q определены корректно, т. е. индексы инерции не зависят от системы координат.

Если g_{ij}—псевдориманова метрика типа (p, q) и $g^0_{ij} = g_{ij}(z_0^1, \ldots, z_0^n)$, то квадратичную форму $g^0_{ij}\xi^i\xi^j$ заменой $\xi^i = \lambda^i_k \eta^k$ можно привести к виду

$$\eta_1^2 + \ldots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \ldots - \eta_n^2.$$

В окрестности точки такое приведение уже, вообще говоря, невозможно.

Определение 5. Говорят, что метрика $g_{ij}=g_{ij}(z)$ *псевдоевклидова*, если найдутся новые координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i=x^i(z)$, $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)\neq 0$ такие, что

$$g_{ij}=\frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j}+\ldots+\frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j}-\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j}-\ldots-\frac{\partial x^n}{\partial z^i}\frac{\partial x^n}{\partial z^j}.$$

В этих новых координатах

$$g'_{ij}=0 \quad \text{при} \quad i\neq j,$$
$$g'_{ii}=1 \quad \text{при} \quad i\leqslant p, \quad g'_{ii}=-1 \quad \text{при} \quad i\geqslant p+1.$$

Координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ называются *псевдоевклидовыми координатами типа* (p, q), где $q=n-p$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести псевдоевклидову метрику типа (p, q), определив «скалярное произведение» векторов $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta=(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ формулой

$$\langle\xi, \eta\rangle_{p,q}=\xi^1\eta^1+\ldots+\xi^p\eta^p-\xi^{p+1}\eta^{p+1}-\ldots-\xi^n\eta^n; \tag{8}$$

при этом псевдоевклидовыми будут обычные координаты $x^1, \ldots, x^n$; пространство $\mathbb{R}^n$ с этой метрикой также называется псевдоевклидовым и обозначается $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Можно считать, что $p\leqslant[n/2]$, поскольку возможна замена $g_{ij}\to -g_{ij}$.

Особенно важен случай пространства $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Это — пространство специальной теории относительности («пространство Минковского»). В специальной теории относительности постулируется, что пространственно-временной континуум, определенный в § 1, является пространством Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Напомним, что точка в пространственно-временном континууме задается своими декартовыми координатами (t, x^1, x^2, x^3). Здесь первая координата t имеет размерность времени, а координаты (x^1, x^2, x^3) — размерность длины. Соответствующие псевдоевклидовы координаты таковы: $x^0=ct, x^1, x^2, x^3$, где c — постоянная, имеющая размерность скорости (длина/время) и являющаяся скоростью света в пустоте.

Квадрат элемента длины dl^2 имеет вид

$$dl^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2. \tag{9}$$

Если есть две точки (события) $P_1=(x_1^0, \ldots, x_1^3)$, $P_2=(x_2^0, \ldots, x_2^3)$, то величина

$$|P_1-P_2|^2=(x_1^0-x_2^0)^2-(x_1^1-x_2^1)^2-(x_1^2-x_2^2)^2-(x_1^3-x_2^3)^2 \tag{10}$$

называется пространственно-временным интервалом между событиями P_1 и P_2. Величина $|P_1-P_2|^2$ может быть как положительной, так и отрицательной, а также нулем (при несовпадающих точках P_1 и P_1) (см. § 6).

В заключение этого параграфа рассмотрим полезный пример координат в пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$ — *псевдосферические координаты*. Пусть псевдоевклидовы координаты в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ суть x^0, x^1, x^2. Определим псевдосферические координаты (ρ, χ, φ), полагая

χ - вместо θ

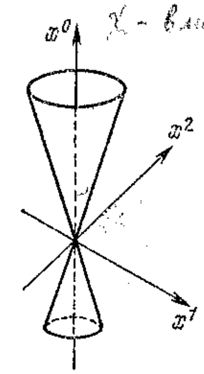

Рис. 4.

$$\left.\begin{aligned} x^0&=\rho\,\mathrm{ch}\,\chi,\\ x^1&=\rho\,\mathrm{sh}\,\chi\cos\varphi,\\ x^2&=\rho\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\varphi,\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} -\infty&<\rho<\infty,\\ 0&<\chi<\infty,\\ 0&\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2=\rho^2>0.$$

Следовательно, координаты ρ, χ, φ заданы лишь в области $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2>0$. В пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$ эта область — внутренность конуса $(x^0)^2=(x^1)^2+(x^2)^2$ (рис. 4). Все точки этой области (кроме точек оси x^0) — неособые для псевдосферических координат. Квадрат элемента длины dl^2 в этой области имеет вид

$$dl^2=d\rho^2-\rho^2[(d\chi)^2+\mathrm{sh}^2\chi\,(d\varphi)^2]. \tag{12}$$

Нетрудно ввести псевдосферические координаты и во внешности конуса, задавая их формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0&=\rho\,\mathrm{sh}\,\chi,\\ x^1&=\rho\,\mathrm{ch}\,\chi\cos\varphi,\\ x^2&=\rho\,\mathrm{ch}\,\chi\sin\varphi,\end{aligned}\right\}\quad \rho>0. \tag{13}$$

Этот случай менее важен для приложений.

Задача. Доказать, что тип псевдоримановой метрики не зависит от выбора системы координат.

Stop

§ 4. Простейшие группы преобразований евклидова пространства

1. Группы преобразований области. Предположим, что в n-мерном пространстве заданы две области: область Ω_x с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и область Ω_z с координатами $z^1, \ldots, z^n$. Предположим, далее, что каждой точке области Ω_z поставлена в соответствие точка области Ω_x, так что $x^i=x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i=1, \ldots, n$. Если координаты $z^1, \ldots, z^n$ можно выразить обратно через $x^1, \ldots, x^n$, т. е. $z^j=z^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j=1, \ldots, n$, то говорят, что задано *преобразование области* Ω_z в область Ω_x. При этом мы, конечно, требуем, чтобы функции $x^i(z^1, \ldots, z^n)$ и обратные им функции

Мы снова получаем разложение Эйлера:

$$\sin z = z\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Рекомендуем читателю получить из общей формулы Бореля — Адамара, независимо от разложения для $\sin z$, разложение

$$e^z - 1 = e^{\frac{z}{2}} z\prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right).$$

(Указание: воспользуйтесь тем, что $\frac{e^z-1}{ze^{c_1 z}}$ есть четная функция.)

ГЛАВА ПЯТАЯ

Analyze

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

Start

29. Мы видели, что целая функция $f(z)$, отличная от многочлена, не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению (п. 16). Именно поэтому такие функции и называются трансцендентными. Однако две трансцендентные целые функции могут быть связаны между собой алгебраическим уравнением. Простейший пример — это $\sin z$ и $\cos z$, удовлетворяющие соотношению

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1. \tag{75}$$

Рассмотрим более общее соотношение

$$[f(z)]^n + [g(z)]^n = 1, \tag{76}$$

где n — целое число, не меньшее двух, и поставим задачу разыскать все целые функции, которые ему удовлетворяют.

Начнем со случая $n = 2$. Имеются ли другие целые функции, кроме $\sin z$ и $\cos z$, которые связаны между собой уравнением того же вида? Так как (75) является тождеством относительно z, оно останется в силе, если вместо z подставить любую целую функцию. Так, например, мы можем писать:

$$\sin^2(1 - z + 2z^3) + \cos^2(1 - z + 2z^3) = 1,$$

$$\sin^2(e^z) + \cos^2(e^z) = 1.$$

И вообще, если $h(z)$ — какая-либо целая функция, то

$$\sin^2[h(z)] + \cos^2[h(z)] = 1.$$

Так как целая функция от целой функции снова является целой (п. 5), то мы получаем следующий результат:

существует бесчисленное множество пар целых функций

$$\sin[h(z)] \quad и \quad \cos[h(z)] \tag{77}$$

(где $h(z)$ — какая угодно целая функция), связанных между собой алгебраическим соотношением (75).

Докажем теперь справедливость обратного предложения:

если $f(z)$ и $g(z)$ — пара целых функций, удовлетворяющих соотношению

$$[f(z)]^2+[g(z)]^2=1, \tag{78}$$

то существует такая целая функция $h(z)$, что $f(z)=\cos[h(z)]$ и $g(z)=\sin[h(z)]$.

Для доказательства преобразуем уравнение (78) к виду

$$[f(z)+ig(z)][f(z)-ig(z)]=1. \tag{78'}$$

Отсюда видно, что $f(z)+ig(z)$ есть целая функция, не обращающаяся в нуль ни при каком z. Поэтому (см. п. 9) существует некоторая целая функция — представим ее в виде $ih(z)$ — такая, что

$$f(z)+ig(z)=e^{ih(z)}, \tag{79}$$

следовательно,

$$f(z)-ig(z)=\frac{1}{f(z)+ig(z)}=e^{-ih(z)}. \tag{80}$$

Из (79) и (80) следует:

$$f(z)=\frac{e^{ih(z)}+e^{-ih(z)}}{2}=\cos[h(z)],$$

$$g(z)=\frac{e^{ih(z)}-e^{-ih(z)}}{2i}=\sin[h(z)],$$

что и нужно было показать.

30. Вернемся к общему уравнению

$$[f(z)]^n+[g(z)]^n=1, \tag{76}$$

где $n\geqslant 3$, и докажем принадлежащую французскому математику Монтелю теорему о том, что *не существует никакой пары целых функций, не равных тождественно константам, которые удовлетворяли бы этому уравнению.*

Предварительно разложим двучлен вида x^n+1 на линейные множители. Для этого достаточно найти все n корней уравнения $x^n+1=0$, или $x^n=-1$.

Корни эти таковы: $x_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. В самом деле, все они попарно различны и каждый удовлетворяет условию $x_k^n=-1$.

Полагая для краткости $x_0=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}=\varepsilon$, будем иметь:

$$x_k=\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2k+1}=\varepsilon^{2k+1}, \quad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно,

$$x^n+1=(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})=$$
$$=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^3)\ldots(x-\varepsilon^{2n-1});$$

подставляя вместо x частное $\frac{f(z)}{g(z)}$ и умножая обе части на $[g(z)]^n$, получим тождество

$$[f(z)]^n+[g(z)]^n=$$
$$=[f(z)-\varepsilon g(z)][f(z)-\varepsilon^3 g(z)][f(z)-\varepsilon^5 g(z)]\ldots$$
$$\ldots[f(z)-\varepsilon^{2n-1}g(z)]. \tag{81}$$

Из соотношения (76) вытекает, что ни один из множителей в правой части (81) не может обратиться в нуль ни при каком z. Так как каждый из них есть целая функция, то замечаем (см. п. 9), что существуют целые функции $h_0(z), h_1(z), \ldots, h_{n-1}(z)$ такие, что

$$\begin{gathered} f(z)-\varepsilon g(z)=e^{h_0(z)}, \qquad f(z)-\varepsilon^3 g(z)=e^{h_1(z)}, \\ f(z)-\varepsilon^5 g(z)=e^{h_2(z)}, \ldots, f(z)-\varepsilon^{2n-1}g(z)=e^{h_{n-1}(z)}. \end{gathered} \tag{82}$$

Рассмотрим первые три из этих равенств (всего таких равенств n, а мы предположили, что $n\geqslant 3$). Вычитая почленно второе из первого, а третье из второго, найдем

$$\begin{gathered} (\varepsilon^3-\varepsilon)g(z)=e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)}, \\ (\varepsilon^5-\varepsilon^3)g(z)=e^{h_1(z)}-e^{h_2(z)}. \end{gathered} \tag{83}$$

Заметим, что

$$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\neq 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon^2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq\pm 1$$

(так как $n \geqslant 3$). Поэтому из тождеств (83) следует:

$$\frac{e^{h_0(z)} - e^{h_1(z)}}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} = \frac{e^{h_1(z)} - e^{h_2(z)}}{\varepsilon^3(\varepsilon^2-1)},$$

или

$$\varepsilon^2 e^{h_0(z)} + e^{h_2(z)} = (1+\varepsilon^2)\, e^{h_1(z)}.$$

Представим последнее в виде

$$\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, e^{\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, e^{\frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}}\right]^2 = 1.$$

Так как функции в квадратных скобках целые, то по теореме п. 29 должна существовать такая целая функция $h(z)$, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, e^{\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}} &= \cos[h(z)], \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, e^{\frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}} &= \sin[h(z)]. \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Покажем, что $h(z)$ есть тождественная константа. Если допустить противное, то $h(z)$ должна быть либо многочленом степени не ниже первой, либо целой трансцендентной функцией. В первом случае найдется такое значение $z = z_0$, что $h(z) = \frac{\pi}{2}$ (в силу основной теоремы высшей алгебры). При $z = z_0$ левая часть первого из уравнений (84) отлична от нуля, а правая равна нулю, что невозможно. Во втором случае, в силу малой теоремы Пикара (п. 24), хотя бы одно из двух уравнений $h(z) = \frac{\pi}{2}$ и $h(z) = -\frac{\pi}{2}$ будет иметь корни (и даже бесконечное множество корней). Если z_0 — один из них, то, подставляя z_0 в первое из уравнений (84), снова получим противоречие.

Итак, доказано, что $h(z)$ есть константа. Из равенств (84) следует, что показатели в левых частях также константы

$$\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2} \equiv a, \qquad \frac{h_2(z)-h_1(z)}{2} \equiv b.$$

Но первое из равенств (83) дает

$$g(z) = \frac{e^{h_0(z)} - e^{h_1(z)}}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} = e^{h_1(z)}\,\frac{e^{h_0(z)-h_1(z)} - 1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} = \\ = e^{h_1(z)}\,\frac{e^{2a}-1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} = \alpha e^{h_1(z)}, \qquad (85)$$

где $\alpha = \frac{e^{2a}-1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)}$ есть константа. С другой стороны, из второго из равенств (82) вытекает, что

$$f(z) = \varepsilon^3 g(z) + e^{h_1(z)} = (\varepsilon^3\alpha + 1)\, e^{h_1(z)} = \beta e^{h_1(z)}, \qquad (86)$$

где $\beta = \varepsilon^3\alpha + 1$.

Подставляя в (76), найдем

$$(\alpha^n + \beta^n)\, e^{h_1(z)} = 1,$$

т. е.

$$e^{h_1(z)} = \frac{1}{\alpha^n + \beta^n} = \gamma$$

есть тождественная константа. Сопоставляя с (85) и (86), убеждаемся в том, что $f(z)$ и $g(z)$ — также тождественные константы. Теорема Монтеля доказана.

Подведем итоги двух последних пунктов: *если целые функции $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют алгебраическому соотношению вида*

$$[f(z)]^n + [g(z)]^n = 1,$$

где n — целое число $\geqslant 2$, то при $n = 2$ они необходимо имеют вид

$$f(z) = \cos[h(z)], \qquad g(z) = \sin[h(z)],$$

где $h(z)$ — целая функция, а при $n \geqslant 3$ тождественно равны константам.

Stop

Заметим, что приведенное выше доказательство теоремы Монтеля можно почти без изменений применить к доказательству следующей более общей теоремы: *не существует ни одной пары целых функций $f(z)$ и $g(z)$, не равных тождественно константам, которые удовлетворяли бы уравнению вида*

$$a_0[f(z)]^n + a_1[f(z)]^{n-1} g(z) + \ldots + a_n[g(z)]^n = b,$$

где $n \geqslant 3$, $b \neq 0$, и уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет, по крайней мере, три не равных