Algebra

Russian

Fall 2014

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 35, № 4 (1984)

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НИЛЬСЕНА И ЕДИНИЧНОСТЬ ГРУППЫ

А. Г. Мясников

Некоторые вопросы алгебраической топологии (см. [1—3]) сводятся к следующей все еще не решенной проблеме Эндрюса и Кертиса: если $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$ — единичная группа, то можно ли последовательностью преобразований Нильсена и сопряжениями одного из элементов перевести набор соотношений в набор порождающих?

В данной статье указанная проблема решается положительно в многообразии разрешимых групп.

Если класс допустимых преобразований расширить, добавляя преобразование, приписывающее к данному набору элементов справа единицу группы, то для расширенной системы преобразований задача Эндрюса и Кертиса решается положительно в классе всех групп.

Пусть G — произвольная группа. Элементарными преобразованиями n-ки, $n \geqslant 2$, элементов $(w_1, \ldots, w_n)$ группы G назовем следующие преобразования:

1) замена w_i на w_i^{-1}, $i = 1, \ldots, n$;

2) замена w_i на $w_i w_j^{\pm 1}$ или на $w_j^{\pm 1} w_i$, $i \neq j$;

3) замена w_i на сопряженный элемент, $i = 1, \ldots, n$.

Очевидно, обратное к элементарному преобразованию также является элементарным. Обозначим через T_n группу преобразований множества n-ок, порожденную элементарными преобразованиями.

По определению n-ка $(w_1, \ldots, w_n)$ вырождает группу G, если нормальное замыкание множества $\{w_1, \ldots, w_n\}$ в G совпадает со всей группой G.

Будем говорить, что в группе G выполнено условие (Т), если группа G действует транзитивно на множестве n-ок, вырождающих группу G. В дальнейшем через $\sim$ будем обозначать эквивалентность n-ок относительно действия группы T_n.

ТЕОРЕМА. *Пусть F — свободная группа ранга $n \geqslant 2$, N — ее нормальная подгруппа, лежащая в коммутанте группы F. Тогда, если в группе F/N выполняется условие* (Т), *то и в группе $F/[N, N]$ выполняется условие* (Т).

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые свойства эквивалентности $\sim$. Далее всюду G — произвольная группа, G' — ее коммутант, $x^y = y^{-1}xy$.

Свойство 1. *Пусть $N \lhd G$, «—» — естественный гомоморфизм группы G на G/N. Тогда, если*

$$(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n) \sim (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n).$$

то для некоторых $h_1, \ldots, h_n$ из N имеем

$$(w_1, \ldots, w_n) \sim (v_1h_1, \ldots, \bar{v}_nh_p).$$

Доказательство очевидно.

Свойство 2. *Если элементы $w_1, \ldots, w_n$ порождают группу G, а элемент g принадлежит коммутанту группы G, то*

$$(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_ng) \sim (w_1, \ldots, w_n),$$

причем элементарные преобразования применяются только к последней координате.

Доказательство. По условию g принадлежит коммутанту группы G. Следовательно, существует разложение g в произведение порождающих $w_1, \ldots, w_n$ и их обратных такое, что суммарная степень ε_k всех вхождений элемента w_k равна нулю, $1 \leqslant k \leqslant n$. Зафиксируем это разложение g. Если g оканчивается на $w_k^{\pm 1}$, $k \neq n$, то умножаем w_ng справа на $w_k^{\mp 1}$. Если g оканчивается на $w_n^{\pm 1}$, то сопрягаем элемент w_ng элементом $w_k^{\mp 1}$. Продолжая этот процесс, придем к эквивалентной n-ке:

$$(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n^{\varepsilon_n}w_n).$$

По построению $\varepsilon_n = 0$, и свойство 2 доказано.

Свойство 3. *Пусть элементы s_1, s_2 принадлежат абелевой нормальной подгруппе группы G; w_1, w_2*

произвольны. Тогда

$$(w_1s_1,\ w_2s_2) \sim (w_1s_1^{w_2^k},\ w_2s_2)$$

для всех целых k.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это свойство для $k = 1$. Это делает следующая цепочка элементарных преобразований:

$$\begin{aligned}(w_1s_1,\ w_2s_2) &\sim (s_1w_1,\ w_2s_2) \sim (s_2^{-1}s_1w_1s_2,\ w_2s_2) = \\ &= (s_1s_2^{-1}w_1s_2,\ w_2s_2) \sim (s_1s_2^{-1}w_1w_2^{-1},\ w_2s_2) \sim \\ &\sim (w_1s_2^{-1}s_1s_2^{-1},\ w_2s_2) \sim (w_1w_2^{-1}s_1s_2^{-1},\ s_2w_2) \sim \\ &\sim (w_1w_2^{-1}s_1w_2,\ s_2w_2) \sim (w_1s_1^{w_2},\ w_2s_2).\end{aligned}$$

Свойство 4. *Пусть элементы $w_1, \ldots, w_n$ порождают группу G, а элементы $s_1, \ldots, s_n$ лежат в абелевой нормальной подгруппе группы G. Тогда для любого элемента g группы G и любого целого k, $1 \leqslant k \leqslant n$,*

$$(w_1s_1, \ldots, w_ks_k, \ldots, w_ns_n) \sim (w_1s_1, \ldots, w_ks_k^g, \ldots, w_ns_n).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это свойство для $g = w_i^{\pm 1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $i = k$, то сопрягаем w_ks_k элементом g. Если же $i \neq k$, то применяем эквивалентность из свойства 4. В обоих случаях получаем

$$(w_1s_1, \ldots, w_ks_k, \ldots, w_ns_n) \sim (w_1s_1, \ldots, w_ks_k^{w_i^{\pm 1}}, \ldots, w_ns_n),$$

что и требовалось.

Свойство 5. *Если какая-то n-ка вырождает группу G, то любая эквивалентная ей n-ка вырождает группу G.*

Доказательство очевидно.

В частности, если $w_1, \ldots, w_n$ порождают группу G, то все эквивалентные с $(w_1, \ldots, w_n)$ n-ки вырождают группу G.

Доказательство теоремы. Положим $N' = [N, N]$, $G = F/N'$, $H = N/N'$ и обозначим через «—» естественный эпиморфизм группы G на $\overline{G} = F/N$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — порождающие группы G. Рассмотрим n-ку $(w_1, \ldots, w_n)$, вырождающую группу G, и докажем, что

$$(w_1, \ldots, w_n) \sim (x_1, \ldots, x_n).$$

По условию теоремы n-ка $(w_1, \ldots, w_n)$ вырождает группу

$\bar{G}$, поэтому ввиду свойства 1

$$(w_1, \ldots, w_n) \sim (x_1h_1, \ldots, x_nh_n),$$

для некоторых $h_1, \ldots, h_n$ из H. Пусть H_1 — нормальная подгруппа в G, порожденная элементами $h_1, \ldots, h_{n-1}$, $G_1 = G/H_1$. Тогда в группе G_1 имеем равенство:

$$(x_1h_1, \ldots, x_nh_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_nh_n).$$

По свойству 2 в группе G_1

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_nh_n) \sim (x_1, \ldots, x_n),$$

причем элементарные преобразования применяются только к последней координате. Поднимая преобразования в группу G, получаем, что

$$(x_1h_1, \ldots, x_nh_n) \sim (x_1h_1, \ldots, x_{n-1}h_{n-1}, x_nh_n'),$$

где $h_n' \in H_1$. Выразим h_n' через произведение элементов, сопряженных с $h_1, \ldots, h_{n-1}$ и их обратными. Достаточно рассмотреть случай $h_n' = h_k^\alpha$, $\alpha \in G$, $1 \leqslant k \leqslant n$. H — абелева нормальная подгруппа в G. По свойству 4

$$(x_1h_1, \ldots, x_kh_k, \ldots, x_nh_k^\alpha) \sim (x_1h_1, \ldots, x_kh_k^\alpha, \ldots, x_nh_k^\alpha),$$

умножая $x_nh_k^\alpha$ справа на $h_k^{-\alpha}x_n^{-1}$ (нильсеновское преобразование) продолжим цепочку

$$\sim (x_1h_1, \ldots, x_kh_k^\alpha, \ldots, x_nx_k^{-1}) \sim (x_1h_1, \ldots, x_kh_k, \ldots, x_nx_k^{-1}).$$

Заметим, что по модулю H мы делали только нильсеновские преобразования, а значит, по модулю H, на каждом шаге имеем систему порождающих группы G. Из индуктивных соображений ясно, что

$$(x_1h_1, \ldots, x_nh_n) \sim (x_1h_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где h_1 из H, $x_1, u_2, \ldots, u_n$ — порождающие группы G, полученные из $x_1, \ldots, x_n$ некоторою последовательностью нильсеновских преобразований $\tau_1, \ldots, \tau_m$. По свойству 2

$$(x_1h_1, u_2, \ldots, u_n) \sim (x_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Применяя к $(x_1, u_2, \ldots, u_n)$ последовательность нильсеновских преобразований $\tau_m^{-1}, \ldots, \tau_1^{-1}$, получим $(x_1, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Произвольная конечно порожденная свободная разрешимая (нильпотентная) группа обладает свойством* (T).

Analysis

§1. Электростатика нулей многочленов Якоби

1. Постановка задачи[1]. Рассмотрим произведение

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} |x_j - x_k|, \tag{1.1}$$

т.е. модуль определителя Вандермонда. Поскольку V зависит от своих аргументов симметрично, можно рассматривать набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ как множество и фиксировать нумерацию $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ в порядке возрастания. Мы хотим найти максимум функции V при этом условии. Ясно, что без дополнительных ограничений задача бессодержательна, поэтому будем еще предполагать, что переменные принадлежат фиксированному конечному отрезку, например отрезку $[0, 1]$.

Задача 1.2. *Найти конфигурацию из n точек на отрезке,*

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \leqslant 1, \tag{1.3}$$

максимизирующую функционал (1.1).

Легко понять, что задача поставлена математически корректно: ее решение существует (ясно из соображений компактности) и единственно. Действительно, составим из двух конфигураций $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ новую конфигурацию $(z_1, \ldots, z_n)$, в которой $z_k = (x_k + y_k)/2$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$z_j - z_i = \frac{1}{2}\big((x_j - x_i) + (y_j - y_i)\big) \geqslant (x_j - x_i)^{1/2}(y_j - y_i)^{1/2}$$

при всех $i < j$, откуда следует, что

$$V(z_1, \ldots, z_n)^2 \geqslant V(x_1, \ldots, x_n)\, V(y_1, \ldots, y_n),$$

причем неравенство строгое, если только конфигурации иксов и игреков не совпадают. Иначе говоря, функция $\ln V$ строго выпукла. Теперь ясно, что максимум V не может достигаться на двух *различных* конфигурациях: в этом случае значение V на их полусумме было бы еще больше.

Для прикидки найдем оптимальные конфигурации при малых n. При $n = 2, 3$ ответ очевиден: две точки займут места на концах отрезка, а еще одна (если она имеется) — посередине. При $n = 4$ соображения симметрии сводят вопрос к оптимизации функции одной переменной, но ответ уже не так тривиален:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big), \quad x_3 = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big), \quad x_4 = 1. \tag{1.4}$$

Для продолжения анализа необходимо уточнить, в какой форме мы рассчитываем получить ответ при произвольно большом n.

[1] Нумерация в §§1,2 независимая и единая для утверждений и формул; номер параграфа не указывается.

2. Ответ. Исходная идея Томаса Стилтьеса очень проста: стоит искать не сами переменные $x_1 < \ldots < x_n$, а тот многочлен, нулями которого эти переменные являются. Такая точка зрения приводит к следующему замечательному ответу.

Теорема 2.1. *Конфигурация* (1.3), *максимизирующая функцию* $V(x_1, \ldots, x_n)$, *состоит из точек* $x_1 = 0$, $x_n = 1$ *и всех корней полинома Якоби* $J_{n-2}(1,1;x)$ *степени* $n-2$.

Существует множество эквивалентных определений полиномов Якоби. Для наших целей удобнее всего воспользоваться явной формулой:

$$J_n(a,b;x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{k} \frac{n+a+b+j}{b+j}. \tag{2.2}$$

Например, при $n = 4$ получаем полином $J_2(1,1;x) = 1 - 5x + 5x^2$, корнями которого служат x_2, x_3 из формул (1.4).

Чтобы сделать решение более естественным, удобно несколько обобщить первоначальную задачу.

Теорема 2.3. *Пусть* p, q — *фиксированные положительные параметры. Тогда конфигурация из* n *точек на отрезке, максимизирующая функционал*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)^p\, x_k^q \prod_{i<j}(x_j - x_i) \tag{2.4}$$

при прежних ограничениях (1.3), *состоит в точности из всех корней полинома Якоби* (2.2) *с параметрами* $a = 2p-1$, $b = 2q-1$.

Теорема 2.1 является частным случаем этой формулировки для $p = q = 1$ (при этом число свободных переменных снижается до $n-2$, так как две точки занимают положения на краях отрезка).

Пример 2.5. Если $a = b = -1/2$, то полиномы $J_n(-1/2, -1/2; 1-2x)$ лишь множителем отличаются от полиномов Чебышева I рода $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$. Точно так же при $a = b = 1/2$ многочлены $J_n(1/2, 1/2; 1-2x)$ имеют те же корни, что и полиномы Чебышева II рода $U_n(\cos\varphi) = \sin(n+1)\varphi/\sin\varphi$.

Нули полиномов Чебышева легко себе представить наглядно. Для этого разделим полуокружность, имеющую отрезок $[0,1]$ своим диаметром, на n равных дуг, и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — горизонтальные координаты их середин. Эти точки суть корни полинома Чебышева первого рода $T_n(x)$, и потому задают оптимальную конфигурацию при $p = q = 1/4$. При $p = q = 3/4$ иксы разместятся в корнях полиномов Чебышева второго рода $U_n(x)$. Очевидно, что это абсциссы точек полуокружности, делящих ее на $n+1$ равных дуг (см. рис. 1).

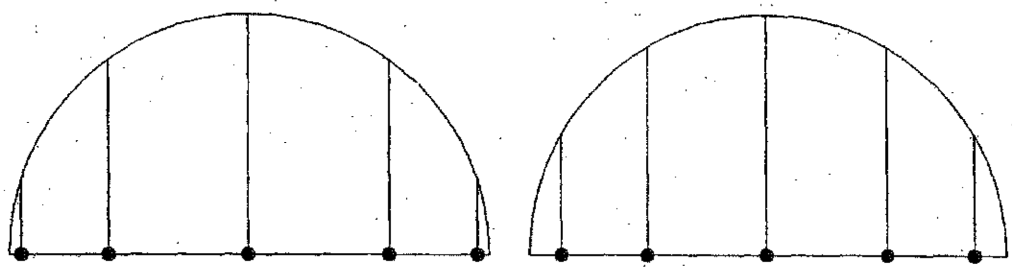

Рис. 1. Корни полиномов Чебышева I и II рода

3. Доказательство теоремы 2.3. Как обычно, для определения экстремума гладкой функции найдем ее критические точки. Предварительно имеет смысл перейти к логарифму целевой функции:

$$\begin{aligned} E(x_1, \dots, x_n) &\equiv -\ln V(x_1, \dots, x_n) \\ &= -p\sum_{k=1}^{n}\ln(1-x_k) - q\sum_{k=1}^{n}\ln x_k - \sum_{j<k}\ln(x_k - x_j) \end{aligned} \tag{3.1}$$

(знак перед логарифмом — дань „физическому смыслу", о котором речь ниже). Мы должны минимизировать функцию E. Для ее частных производных получаем формулу

$$-\frac{\partial E}{\partial x_k} = \sum_{i:i\neq k}\frac{1}{x_k - x_i} + \frac{q}{x_k} + \frac{p}{x_k - 1}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.3. *Для любого приведенного полинома* $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$ *с простыми корнями справедливо тождество*

$$\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} = \sum_{i:i\neq k}\frac{1}{x_k - x_i}.$$

Доказательство. Из формул

$$f'(x) = \sum_i \prod_{j:j\neq i}(x - x_j); \qquad f''(x) = 2\sum_{i<j}\prod_{m:m\neq i,j}(x - x_m)$$

вытекает

$$f'(x_k) = \prod_{i:i\neq k}(x_k - x_i); \qquad f''(x_k) = 2\sum_{j:j\neq k}\prod_{i:i\neq j,k}(x_k - x_i),$$

и утверждение леммы очевидно. •

Geometry / Topology

Математические заметки

Том 84 выпуск 5 ноябрь 2008

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Конструктивное доказательство теоремы Киршбрауна

А. В. Акопян, А. С. Тарасов

В статье пойдет речь о теореме Киршбрауна, утверждающей, что любое 1-липшицево (нерастягивающее) отображение из подмножества $\mathbb{E}^d$ в $\mathbb{E}^d$ может быть продолжено на все пространство $\mathbb{E}^d$. Валентайном в [1] было доказано аналогичное утверждение для сферических и гиперболических пространств. Здесь и далее $\mathscr{X}$ будет обозначать одно из трех пространств $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{S}^d$ или $\mathbb{H}^d$.

Теорема (Киршбраун, Валентайн [1]). *Пусть U – подмножество в $\mathscr{X}$ и $f\colon U \to \mathscr{X}$ – нерастягивающее отображение. Тогда это f может быть продолжено до нерастягивающего отображения $f'\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$.*

Имеется множество интересных обобщений теоремы Киршбрауна, например, [2]–[5].

Все имеющиеся на данный момент доказательства теорем Киршбрауна являются аналитическими. Данцер, Грюнбаум и Кли в [6] поднимают задачу о построении простого геометрического продолжения.

В данной работе будет показано, как в случае конечного множества U построить продолжение функции f в классе PL-изометрий, т.е. кусочно-линейных отображений, сохраняющих длины кривых. Дадим более строго определение.

Определение. *PL-изометрией $\varphi\colon P \to \mathscr{X}$* политопа P из $\mathscr{X}$ называется непрерывное отображение, обладающее следующим свойством: существует такая локально-конечная триангуляция P, что для любого симплекса T из этой триангуляции ограничение φ на T есть движение.

Наглядным примером PL-изометрии служит отображение, переводящие обычный лист бумаги в фигуру оригами.

Основная теорема. *Пусть на конечном множестве точек $U \subset \mathscr{X}$ задано слабосжимающее отображение f. Тогда это слабосжимающее отображение можно продолжить до PL-изометрии на все пространство.*

Замечание. Пользуясь теоремой Хелли и тем фактом, что пространство $\mathscr{X}$ всегда сепарабельно, не сложно показать, что из основной теоремы следует полная теорема Киршбрауна–Валентайна (не обязательно для конечного U).

Понятно, что PL-изометрия является нерастягивающим (иногда его также называют коротким или слабосжимающим) отображением, т.е. не увеличивает расстояние между любыми двумя точками.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-00648 и 08-01-00565-а), а также Фонда поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса". Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00565-а, 08-01-91202-ЯФ_а).

Пусть PL-изометрия φ переводит точки A и B в точки $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$. Предположим, что существует такое движение g, что $\varphi(A) = g(A)$, а $\varphi(B) = g(B)$. Тогда в силу слабого сжатия для любой точки X, лежащей на отрезке $[A, B]$, верно $\varphi(X) = g(X)$ (иначе бы нарушалось неравенство треугольника).

Поэтому каждому движению из набора движений PL-изометрии соответствует одна и притом выпуклая область. Далее будем называть такие области *листами* и считать, что всем листам соответствуют разные движения.

Рассмотрим какие-нибудь два соседних по гиперграни листа L и L'. Поскольку на этой гиперграни движения листов совпадают, но сами они отличаются, можно сказать, что движение первого листа это композиция движений второго листа и симметрии относительно этой гиперграни (поскольку существует только два движения, совпадающие на гиперплоскости):

$$g_{L'} = g_L \circ \operatorname{sym}(L \cap L').$$

Отметим еще одно важное свойство, которое является удобным инструментом при построении различных PL-изометрий и пригодится для доказательства основной теоремы.

Лемма. *Для любой PL-изометрии φ, заданной на конечном политопе P, можно указать несколько точек и их образов под действием φ, так что по этим точкам PL-изометрия φ восстанавливается однозначно.*

Доказательство. В случае $\mathbb{E}^d$ и $\mathbb{H}^d$ достаточно выбрать все вершины всех многогранников. Поскольку каждый выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, все листы (которые в данном случае будут выпуклыми многогранниками) можно однозначно восстановить.

Это свойство можно обобщить и на все сферическое пространство. Но возникает трудность, поскольку лист может содержать полусферы в качестве своих граней и тогда вершин листов не достаточно для их определения (например, в $\mathbb{S}^2$ существует целое семейство полуокружностей с общими концами). "Разрежем" сферу $\mathbb{S}^d$ с помощью $d+1$ попарно перпендикулярных гиперплоскостей. Эти гиперплоскости также и разрезают листы, из которых состоит наша PL-изометрия. Новые "маленькие" листы не могут содержать полусферы, потому мы можем задать действие PL-изометрии на них, задав его только на вершинах.

Доказательство основной теоремы. Если размерность пространства равна 0, то утверждение очевидно. Далее мы воспользуемся утверждением теоремы для $\mathbb{S}^{d-1}$.

Доказательство будем проводить индукцией по числу точек, на которых задано отображение f.

В случае, если у нас задано отображение только для одной точки, теорема очевидна. Действительно, все пространство можно считать одним листом, а соответствующим движением – какое-нибудь движение, переводящее точку $A \in U$ в $f(A)$.

Итак, будем считать, что теорема доказана в случае, когда число точек в отображении не превосходит $n-1$. Докажем ее для случая, когда число точек равно n.

Обозначим точки множества U через $A_1, A_2, \dots, A_n$. Без ограничения общности можно считать, что f оставляет точку A_n на месте. По предположению индукции существует PL-изометрия ψ (заданная на всем d-мерном пространстве), переводящая A_i в B_i для $i = 1, \dots, n-1$.

Пусть ψ не оставляет A_n на месте (иначе в качестве нужной нам PL-изометрии можно взять само ψ). Рассмотрим множество точек X, удаляющихся от A_n при отображении ψ, иначе говоря, множество точек X таких, что

$$d(A_n, X) < d(A_n, \psi(X)).$$

Обозначим его через Ω. Понятно, что Ω не пусто, открыто (ψ – непрерывное отображение, а неравенство, ограничивающее Ω, – строгое) и не заполняет все пространство, поскольку точки A_i, $i = 1, \dots, n-1$, ему не принадлежат (они по условию теоремы не удаляются от A_n).

Покажем, что вместе с любой точкой X, принадлежащей Ω, отрезок $[A_n, X]$ также целиком лежит в Ω. Возьмем произвольную точку Y, лежащую на этом отрезке. Так как ψ – слабосжимающее отображение, $d(X,Y) \geqslant d(\psi(X),\psi(Y))$, а поскольку $d(A_n, X) < d(A_n, \psi(X))$, имеем

$$d(A_n, Y) = d(A_n, X) - d(X,Y) < d(A_n, \psi(X)) - d(\psi(X), \psi(Y)) \leqslant d(A_n, \psi(Y)).$$

Последнее верно в силу неравенства треугольника.

Посмотрим, как образуется граница Ω. Пусть L – какой-нибудь лист PL-изометрии ψ, а g_L – соответствующее ему движение. Рассмотрим точку $g_L^{-1}(A_n)$ (она не обязательно должна лежать в L). Легко понять, что $L \cap \Omega$ суть множество точек L, лежащих ближе к A_n, чем к $g_L^{-1}(A_n)$. Если это множество не пусто и не весь лист L (эти случаи нам не интересны, поскольку тогда L лежит либо целиком вне, либо целиком внутри Ω), то часть границы Ω, лежащей в L, – это просто пересечение L и срединной гиперплоскости между точками A_n и $g_L^{-1}(A_n)$. Таким образом, рассматривая все листы ψ, приходим к тому, что граница Ω состоит из выпуклых политопов.

Теперь опишем построение нужного нам отображения φ. Вне множества Ω отображение φ будет совпадать с ψ. Далее, пусть L' – часть границы Ω, лежащей внутри листа L. Рассмотрим пирамиду с вершиной в A_n и основанием L' (или, проще говоря, их выпуклую оболочку) – это будет лист φ'. Сопоставим ему движение $g_L \circ s_{L'}$, где $s_{L'}$ – симметрия относительно гиперплоскости, содержащей L'. По построению этой симметрии $s_{L'}(A_n) = g_L^{-1}(A_n)$. Проведем эту процедуру для всей границы Ω.

Пусть точка X принадлежит L'. Тогда легко понять, что движение $g_L \circ s_{L'}$ переводит отрезок $[X, A_n]$ в отрезок $[\psi(X), A_n]$. Действительно, $g_L \circ s_{L'}(X) = g_L(X) = \psi(X)$, а $g_L \circ s_{L'}(A_n) = g_L(g_L^{-1}(A_n)) = A_n$, и отрезок $[X, A_n]$ лежит целиком внутри одного листа отображения ψ.

Таким образом, на границе двух листов соответствующие листам движения совпадают, поскольку они совпадают на границе Ω.

Если мы определили отображение φ на всем Ω, то оно является искомым. Однако φ может быть определено не на всем Ω. Рассмотрим луч, выходящий из A_n. Если он пересекает границу Ω, то на нем отображение φ определено. Если же он полностью лежит в Ω, то A_n является единственной точкой на луче, на которой определено отображение φ.

Покажем, что в случае, если мы находимся в $\mathbb{S}^d$, φ уже определен на всем пространстве. Заметим, что точка A'_n – противоположная A_n, не может удалиться от A_n (поскольку уже находится на максимальном расстоянии). Покажем, что она принадлежит внутренности дополнения к Ω.

1. Если A'_n не остается на месте, значит она приближается к A_n, а в силу непрерывности приближается вместе с некоторой своей окрестностью.

2. Если $\psi(A'_n) = A'_n$. Легко понять, что существует такая окрестность точки A'_n, что для любой точки X из этой окрестности $A'_n X = A'_n \psi(X)$ (в качестве этой окрестности можно взять все точки листов, содержащих A'_n). Поскольку точки A_n и A'_n – противоположные, для любой точки сферы верно равенство

$$d(A_n, X) = d(A_n, A'_n) - d(A'_n, X) = d(A_n, \psi(X)).$$

Значит, выбранная нами окрестность не пересекается с Ω. Таким образом, любая дуга большой окружности $[A_n, A'_n]$ пересекает границу Ω, а значит, на ней определено отображение φ.

Теперь покажем, что можно доопределить φ в случае пространств $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{H}^d$.

Рассмотрим сферу S с центром в A_n и достаточно маленькую, чтобы она целиком лежала внутри Ω. Построенная нами неполная PL-изометрия φ (т.е. PL-изометрия, область определения которой не совпадает со всем пространством) отображает S в себя. Таким образом, у нас определена неполная PL-изометрия на S. Из леммы следует, что движение каждого листа можно однозначно восстановить по движению нескольких точек (вершин и иногда точек внутри и на границе листа). Отметим все такие точки для каждого листа. Если у нас задана PL-изометрия, которая действует так же, как и φ на всех этих точках, то она совпадает с действием φ на сфере S. Такая PL-изометрия существует, поскольку для сферических пространств наша теорема уже доказана. Ее можно продолжить на все Ω. Действительно, если точка X, лежащая на сфере, переходит в точку X', то луч $[A_n, X)$ (точнее его часть, лежащая внутри Ω) переведем в $[A_n, X')$. Это отображение будет совпадать с φ там, где φ определено. Поэтому, если мы доопределим φ таким образом, то получим PL-изометрию, действующую на все пространство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] F. A. Valentine, *Amer. J. Math.*, **67**:1 (1945), 83–93. **[2]** U. Lang, V. Schroeder, *Geom. Funct. Anal.*, **7**:3 (1997), 535–560. **[3]** B. Grünbaum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**:5 (1962), 812–814. **[4]** K. Ball, *Geom. Funct. Anal.*, **2**:2 (1992), 137–172. **[5]** W. Johnson, J. Lindenstrauss, *Conference in Modern Analysis and Probability* (New Haven, Conn., 1982), Contemp. Math., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 189–206. **[6]** Л. Данцер, Л. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968.

А. В. Акопян
Институт системного анализа РАН
E-mail: akopjan@gmail.com

Поступило
05.02.2008

А. С. Тарасов
Институт системного анализа РАН
E-mail: tarasov@isa.ru