Russian-Geometry

Линейная перспектива (картинка 1)

Основной принцип рисования в перспективе обманчиво прост. Рисуя с натуры, художник наносит пятнышко краски на холст в том месте, где глаз, находящийся в фиксированном положении по отношению к картине, должен видеть изображаемую точку. Геометрически это та точка, где линия взгляда, соединяющая глаз и объект, пересекает плоскость рисунка. Со времен Альбрехта Дюрера и Возрождения постоянно изобретались всё более остроумные механические приспособления, помогающие осуществить эту проекцию. Сегодня фотографическая камера позволяет без труда получать безупречно перспективные снимки реальных объектов – ландшафтов, зданий, комнат, моделей. Недорогие, ориентированные на графику микрокомпьютеры выполняют эту задачу в случае мысленных образов, точки которых существуют лишь как математические объекты.

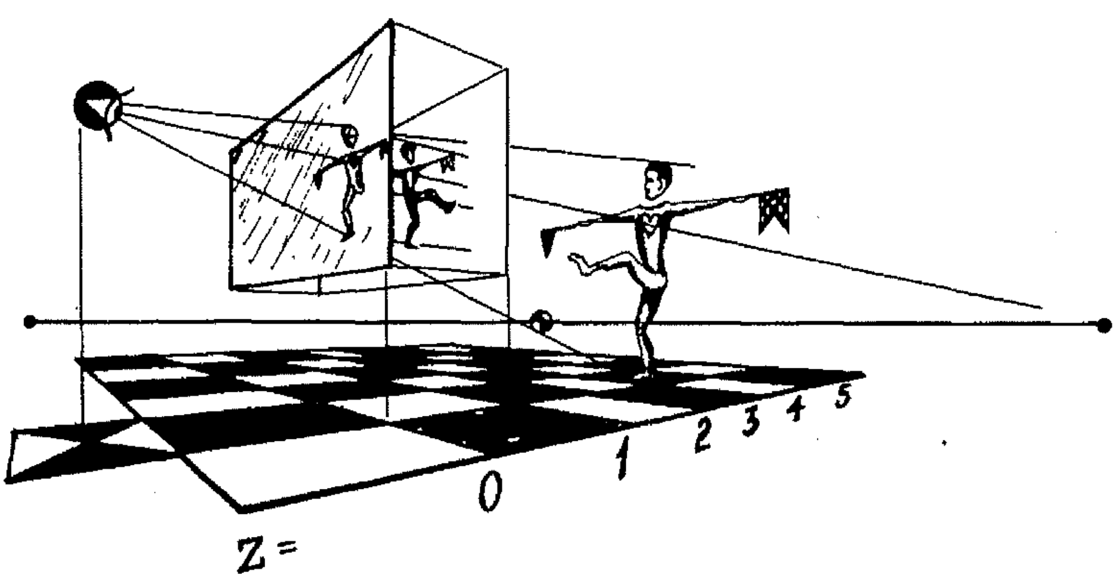
Выберем декартовы координаты, по отношению к которым глаз находится в точке $(0, 0, -\delta)$ – на расстоянии δ (называемом *фокальным расстоянием*) от плоскости рисунка xy. Перспективный образ $(X, Y, 0)$ точки (x, y, z) задаётся формулами

$$X = xZ,$$
$$Y = yZ,$$

где

$$Z = \frac{\delta}{\delta + z}.$$

Тем самым мы сжали изображаемое полупространство, где $z > 0$, в область, где $0 < Z < 1$. Это – (*отражённое*) *рельефное преобразование*.



Картинка 1. Линейная перспектива.

Russian-Algebra

§ 13. Язык категорий

1. Определение категории. Категория C состоит из следующих данных:

а) Класс (или множество) $\mathrm{Ob}\, C$, элементы которого называются *объектами* категории.

б) Класс (или множество) $\mathrm{Mor}\, C$, элементы которого называются *морфизмами* категории, или *стрелками.*

в) Для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\, C$ задано множество $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \subset \mathrm{Mor}\, C$, элементы которого называются *морфизмами из X в Y* и обозначаются $X \to Y$ или $f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

г) Для каждой упорядоченной тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\, C$ задано отображение

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_C(X, Z),$$

сопоставляющее паре морфизмов (f, g) морфизм gf, или $g \circ f$, называемый их *композицией*, или *произведением.*

Эти данные должны удовлетворять следующим условиям:

д) $\mathrm{Mor}\, C$ есть несвязное объединение $\bigcup \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ по всем упорядоченным парам $X, Y \in \mathrm{Ob}\, C$. Иными словами, для каждого морфизма f однозначно определены объекты X, Y такие, что $f \in \mathrm{Hom}\, C(X, Y)$: *начало* X и *конец* Y стрелки f.

е) Композиция морфизмов ассоциативна.

ж) Для каждого объекта X существует тождественный морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_C(X, X)$ такой, что $\mathrm{id}_X \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$ всякий раз, когда эти композиции определены. Нетрудно видеть, что такой морфизм единствен: если id'_X — другой морфизм с тем же свойством, то $\mathrm{id}'_X = \mathrm{id}'_X \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X$.

Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $g\colon Y \to X$, *что* $gf = \mathrm{id}_X$, $fg = \mathrm{id}_Y$.

2. Примеры. а) *Категория множеств* Set. Ее объекты — множества, морфизмы — отображения множеств.

б) *Категория* $\mathscr{L}in_{\mathscr{K}}$ *линейных пространств над полем* $\mathscr{K}$. Ее объекты — линейные пространства, морфизмы — линейные отображения.

в) *Категория групп.*

г) *Категория абелевых групп.*

Различия между классом и множеством обсуждаются в аксиоматической теории множеств и связаны с необходимостью избежать знаменитого парадокса Рассела. Не всякое собирание объектов воедино образует множество, ибо понятие «множество всех множеств, не содержащих самих себя в качестве элемента», противоречиво. В аксиоматике Гёделя — Бернайса такие собрания множеств называются классами. Техника теорий категорий требует собираний объектов, лежащих в опасной близости к таким парадоксальным ситуациям. Мы, однако, будем пренебрегать этими тонкостями.

Russian-Analysis13

Важным частным случаем теоремы II является тот, в котором $\psi(n)$ постоянна. Теорема тогда утверждает, что $\lim k\varphi(n)=ka$, если $\lim\varphi(n)=a$. К этому мы можем добавить, что если $\varphi(n)\to+\infty$, то $k\varphi(n)\to+\infty$, или $k\varphi(n)\to-\infty$, в зависимости от того, положительно k или отрицательно. При $k=0$ $k\varphi(n)=0$ для всех n, и $\lim k\varphi(n)=0$. Если же $\varphi(n)$ ограниченно или неограниченно колеблется, то так же ведет себя и $k\varphi(n)$, если $k\neq 0$.

66. С. Поведение разности и отношения двух функций, поведение которых известно. Имеется, конечно, аналогичная система теорем для разности двух данных функций, являющихся очевидными следствиями из предыдущих результатов. Прежде чем рассмотреть отношение

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА III. *Если* $\lim\varphi(n)=a$ *и* a *отлично от нуля, то*

$$\lim\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{1}{a}.$$

Пусть

$$\varphi(n)=a+\varphi_1(n),$$

так что $\lim\varphi_1(n)=0$. Тогда

$$\left|\frac{1}{\varphi(n)}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|\varphi_1(n)|}{|a|\,|a+\varphi_1(n)|},$$

и так как $\lim\varphi_1(n)=0$, то очевидно, что мы можем найти такое n_0, что это выражение будет меньше любого заданного положительного числа δ для $n\geqslant n_0$.

Из теорем II и III мы можем тотчас же вывести основную теорему для отношения двух функций.

ТЕОРЕМА IV. *Если* $\lim\varphi(n)=a$ *и* $\lim\psi(n)=b$ *и* b *отлично от нуля, то*

$$\lim\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}=\frac{a}{b}.$$

Читателю рекомендуется сформулировать, доказать и проиллюстрировать примерами некоторые из „дополнительных теорем“ к теоремам III и IV.

67. ТЕОРЕМА V. *Если* $R\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\}$ — *любая рациональная функция от* $\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)$, *т. е. любая функция вида*

$$\frac{P\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\}}{Q\{\varphi(n), \psi(n), \ldots, \chi(n)\}},$$